第 20 卷 第 4 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 20, No. 4
1994 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1994

短 文

应用非参数统计理论辨识一类非线性系统[1)]

郎 自 强
（东北大学自动化研究中心　沈阳　110006）

摘　　要

应用非参数统计理论提出了含已知结构输入非线性的线性系统的开环辨识算法；给出了对算法的理论分析结果；并针对典型系统进行了仿真研究.

关键词： 输入非线性，非参数辨识，仿真.

1　前言

相当广泛的一类带有非线性执行机构的受控对象可以由含输入非线性的线性系统描述. 对于这类非线性系统的辨识问题，采用现有的方法[1-7]得到的模型一般都是逼近模型，在非线性环节结构已知的情况下也是如此. 实际中，许多这类受控对象非线性特性的结构是已知的，显然这时应该辨识出其准确模型. 我们曾针对这一问题，对某些具体系统提出了解决方法[8-10]. 本文应用非参数统计理论，提出了比较一般的含有已知结构输入非线性的线性系统的开环辨识算法.

2　线性子系统的非参数辨识

考虑图 1 所示系统，其中 $\{y(k)\}$，$\{u(k)\}$ 分别为系统的输入输出序列，$\{\xi(k)\}\{\eta(k)\}$ 均为零均值白噪声，其方差有界，且分别独立于 $\{u(k)\}$ 和 $\{w(k)\}$. ϕ 为系统输入 $u(k)$ 实际变化范围内的分段连续函数. $\{h_i\}, i=0,1,2,\cdots$ 为线性子系统的脉冲响应序列；满足条件 $h_0=0$，$h_1=1$，$\sum_{i=2}^{\infty} h_i < \infty$.

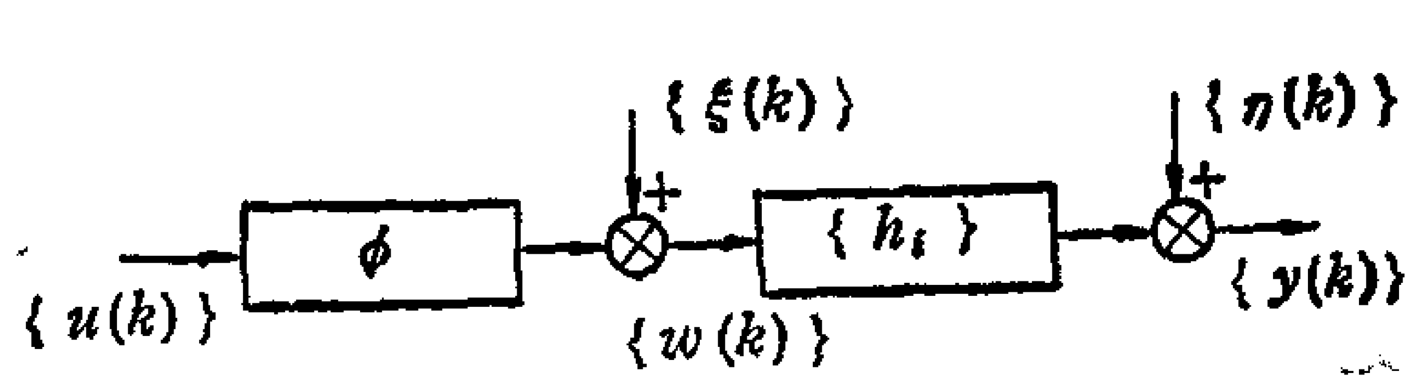

图 1　含无记忆输入非线性的离散时间线性系统

设 $\{u(k)\}$ 为独立同分布 ($i.i.d.$) 的随机变量序列，由图 1 将系统表示成

1）本项研究得到国家自然科学基金的资助.
本文于 1992 年 9 月 21 日收到

$$y(k)=\phi[u(k-1)]+\sum_{i=2}^{\infty}h_i\phi[u(k-i)]+\sum_{i=2}^{\infty}h_i\xi(k-i)+\xi(k-1)+\eta(k), \tag{1}$$

应用相关分析理论由(1)式可得

$$h_m=E\{y(k+m)G[u(k)]\}/E\{y(k+1)G[u(k)]\}\quad m=1,2,\cdots, \tag{2}$$

其中，$G(.)$ 为满足条件

$$E\{G[u(k)]\}=0,\qquad \beta=E\{\phi[u(k)]G[u(k)]\}\neq 0$$

的一已知函数.

根据(2)式提出 h_m 的估计算法为

$$\hat{h}_m=\left\{\frac{1}{(n-m)}\sum_{k=0}^{n-m-1}y(k+m)G[u(k)]\right\}\Big/\left\{\frac{1}{(n-1)}\sum_{k=0}^{n-2}y(k+1)G[u(k)]\right\},\quad m=1,2,\cdots \tag{3}$$

鉴于 $\{y(k)\}$ 在此具有各态历经性质[12],故一般有

$$n\to\infty,\quad \hat{h}_m\to h_m,\qquad \text{in Prob.}\ m=1,2,\cdots. \tag{4}$$

3 非线性函数值的非参数估计

设 $i.i.d.$ 随机变量序列 $\{u(k)\}$ 的概率分布为

$$u(k)=\begin{cases}D_1 & w.p.1/N\\ \vdots & \vdots\\ D_N & w.p.1/N\end{cases} \tag{5}$$

其中N为大于等于 2 的整数，$D_i,i=1,\cdots,N$ 在 $u(k)$ 的实际变化范围之内.

从(1)式可得

$$E[y(k)/u(k-1)]=\phi[u(k-1)]+hr_u \tag{6}$$

其中 $h=\sum_{i=2}^{\infty}h_i$，$r_u=E\{\phi[u(k-i)]\}$. (6) 式意味着

$$y(k)=\phi_u[u(k-1)]+\varepsilon_u(k) \tag{7}$$

其中

$$\phi_u[u(k-1)]=\phi[u(k-1)]+hr_u \tag{8}$$

$$\varepsilon_u(k)=\left\{\sum_{i=2}^{\infty}h_i\phi[u(k-i)]-hr_u\right\}+\sum_{i=2}^{\infty}h_i\xi(k-i)+\xi(k-1)+\eta(k) \tag{9}$$

显然这里 $\varepsilon_u(k)$ 均值为 0，并且独立于 $\phi[u(k-1)]$.

根据非参数统计理论的基本思想[5,11],由(7)式提出 ϕ_u 在 $D_i,i=1,\cdots,N$ 上的函数值 $\phi_u(D_i)$，$i=1,\cdots,N$ 的非参数回归估计算法如下:

$$\hat{\phi}_u(D_i)=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}y(k+1)K[D_i-u(k)]}{\sum_{k=0}^{n-1}K[D_i-u(k)]}\quad i=1,\cdots,N \tag{10}$$

其中

$$K[x]=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \tag{11}$$

关于估计值 $\hat{\phi}_u(D_i)$ 的性质有如下定理.

定理 1：对系统(1)采用概率分布为 (5) 式的 $i.i.d.$ 随机变量序列做为 $\{u(k)\}$，由(10)式计算非线性函数 ϕ_u 在 $D_i, i=1,\cdots,N$ 上的函数值的估计 $\hat{\phi}_u(D_i), i=1,\cdots,N$. 那么估计误差

$$|\hat{\phi}_u(D_i)-\phi_u(D_i)|=O[n^{-1/2}] \quad \text{in Prob.} \quad i=1,\cdots,N \tag{12}$$

其中，$O[n^{-1/2}]$ 表示 n 趋于无穷时 $n^{-1/2}$ 的同阶无穷小量.

该定理表明，由(10)式求得的估计值 $\hat{\phi}_u(D_i)$ 不仅能收敛到真值，而且还具有较快的收敛速度.

4 辨识算法

假设系统(1)的输入非线性 $\phi[u(k)]$ 在下述意义下结构已知

(i) 已知此非线性函数有 l 个参数

(ii) 若已知 $\phi_u=\phi+hr_u$ 在 $l+1$ 个点 $D_i, i=0,\cdots,l$ 上的函数值，通过求解方程组

$$\begin{cases}\phi_u(D_0)=\phi(D_0)+hr_u\\ \qquad\vdots\\ \phi_u(D_l)=\phi(D_l)+hr_u\end{cases} \tag{13}$$

可唯一确定这 l 个参数.

显然相当广泛的一类非线性函数满足上述假设. 具体条件存在着多种可能性. 但有一点是肯定的,那就是 ϕ_u 中 $l+1$ 个未知参数必须是彼此可分离的.

利用一、二节中的结果,提出系统的辨识算法如下

(1) 用概率分布为 (5) 式的 $i.i.d.$ 随机变量序列做 $\{u(k)\}$ 进行辨识实验，其中 $N\geqslant l+1$，且

$$\{D_1,D_2,\cdots,D_N\}\ni\{D_0,D_1,\cdots,D_l\}$$

(2)由(3)式计算线性子系统脉冲响应序列 $\{h_i\}$ 的估计值 $\{\hat{h}_i\}$.

(3) 由(10)式计算 $\phi_u(D_i)=\phi(D_i)+hr_u$, $i=0,1,\cdots l$, 的估计值 $\hat{\phi}_u(D_i), i=0,\cdots,l$.

(4) 记(13)式中 $\phi_u(D_i)=\hat{\phi}_u(D_i)$, $i=0$, 求解此方程组，确定 $\phi[u(k)]$ 中 l 个参数的估计值.

关于应用该辨识算法得到的参数估计结果的性质有如下定理.

定理 2. 若系统(1)中输入非线性 $\phi[u(k)]$ 在 (i)(ii) 意义下结构已知，那么采用算法(1)—(4)得到的线性子系统脉冲响应序列及非线性输入特性中参数的估计均具有一致性. 即计算这些估计结果利用的数据长度 n 趋于无穷时,估计值趋于真值.

5 针对典型系统的仿真研究

5.1 含死区非线性输入的线性系统

这类系统的输入非线性

$$\phi[u(k)] = \begin{cases} \gamma u(k) - \Delta \mathrm{sgn}[u(k)] & |u(k)| \geq \Delta \\ 0 & |u(k)| < \Delta \end{cases} \tag{14}$$

应用提出的算法，取概率分布为

$$u(k) = \begin{cases} D_2 & w.p.1/5 \\ D_1 & w.p.1/5 \\ 0 & w.p.1/5 \\ -D_1 & w.p.1/5 \\ -D_2 & w.p.1/5 \end{cases} \tag{15}$$

的 $i.i.d.$ 做输入序列，γ，Δ的具体估计算法为

$$\hat{\gamma} = [\hat{\phi}_u(D_1) - \hat{\phi}_u(D_2)]/(D_1 - D_2) \tag{16}$$

$$\hat{\Delta} = \{D_2[\hat{\phi}_u(D_1) - \hat{\phi}_u(0)] - D_1[\hat{\phi}_u(D_2) - \hat{\phi}_u(0)]\}/(D_1 - D_2) \tag{17}$$

针对系统

$$\begin{cases} y(k) = \dfrac{q^{-1}(1 + 0.2q^{-1})}{(1 - 0.5q^{-1})} w(k) + \eta(k) \\ w(k) = \phi[u(k)] + \xi(k) \end{cases} \tag{18}$$

其中 q^{-1} 为后移算子，$\eta(k)$ 和 $\xi(k)$ 标准差为 0.2，$\phi[u(k)]$ 中的 $\gamma = 1, \Delta = 0.5$，的仿真辨识结果见表 1。

表 1　仿真结果一（$G = 1, D_2 = 1.2, D_1 = 0.7, n = 700$）

参　数	γ	Δ	h_1	h_2	h_3	h_4
真　值	1	0.5	1.0000	0.7000	0.3500	0.1750
估计值	1.0234	0.5148	1.0000	0.6444	0.3578	0.1598
参　数	h_5	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}
真　值	0.0875	0.0438	0.0219	0.0109	0.0055	0.0027
估计值	0.0413	0.0429	0.1166	0.0405	0.1386	0.0786

5.2 含有指数非线性输入的线性系统

此类系统的输入非线性

$$\phi[u(k)] = e^{\beta u(k)} - 1 \tag{19}$$

应用提出的算法采用的输入序列 $\{u(k)\}$ 同 1，β 估计值的计算公式为

$$\hat{\beta} = \ln[\hat{\phi}_u(D_1) - \hat{\phi}_u(0) + 1]/D_1 \tag{20}$$

对将非线性输入特性改为

$$\phi[u(k)] = [e^{0.8u(k)} - 1] \tag{21}$$

的系统(18)的仿真辨识结果见表2。

表 2 仿真结果二 ($G=1, D_2=1.2, D_1=0.7, n=1000$)

参 数	β	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5
真 值	0.8	1.0000	0.7000	0.3500	0.1750	0.0875
估计值	0.8216	1.0000	0.6813	0.3650	0.1783	0.1097
参 数	h_6	h_7	h_8	h_9	h_{10}	
真 值	0.0438	0.0219	0.0109	0.0055	0.0027	
估计值	0.0300	0.0257	0.0364	0.0122	0.0117	

参 考 文 献

[1] Billings S A and Fakhouri S Y. Nonlinear System Identification Using the Hammerstein Model. Int. J. Syst. Sci., 1979,**10**:567—578.

[2] Hisa T C. System Identification-Least Squares Methods. Lexington Books, Toronto, 1977, Chapter 8.

[3] Stoica P and Soderstrom T. Instrumental Variable Methods for Identification of Hammerstein System. INT. J. Control, 1982, **35**:459—476.

[4] 余鹤龄,顾仲文,周春辉. Hammerstein 模型的模型参考自适应参数估计方法及其应用. 控制理论与应用, 1989, 增刊 2:45—52.

[5] Greblicki W and Pawlak M. Identification of Discrete Hammerstein Systems Using Kernel Regression Estimates. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1986, **AC-31**: 74—77.

[6] 郎自强. 一种辨识 Hammerstein 模型的新方法. 自动化学报, 1993,**19**(1): 37—45.

[7] Pawlak M. On the Series Expansion Approach to the Identification of Hammerstein Systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1991, **AC-30**: 763—767.

[8] 顾兴源,郎自强,鲍玉安. 一种非线性系统的参数辨识. 自动化学报, 1990,**16**(1): 85—89.

[9] 郎自强. Parameter Identification of A Class of Discrete Time Nonlinear Systems——A Further Research Work. Proceedings of Beijing International Conference on System Simulation and Scientific Computing, October 23—26, 1989, Beijing, P. R. C, 117—121.

[10] 郎自强,含有齿隙非线性的动态系统的辨识,信息与控制, 1991,**20**(1): 44—48.

[11] 陈希孺,方兆本,李国英,陶波 非参数统计 上海科学技术出版社,1989.

[12] Ljung Lennart. System Identification: Theory for the User. Prentice-Hall, Inc., 1987.

IDENTIFICATION OF A CLASS OF NONLINEAR SYSTEMS USING NONPARAMETRIC STATISTICS

LANG ZIQIANG
(The Research Center of Automation, Northeastern University Shenyang 110006 *P. R. China)*

ABSTRACT

In this paper, using nonparametric Statistics an open-loop identification algorithm for the linear dynamics with input nonlinearity is proposed in the case of the nonlinearity's structure being known a priori. Theoretical analysis results for the proposed algorithm are given. The concrete forms of the algorithm for typical systems are presented and the simulation results are given.

Key words: Input nonlinearity, Nonparametric identification, Simulation.