第 20 卷 第 4 期 自 动 化 学 报 Vol. 20, No. 4
1994 年 7 月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1994

短 文

自回归模型参数的递阶辨识

胡 峰

(西安卫星测控中心 710043)

摘 要

本文给出了自回归模型系数与误差方差的递阶估计算法，导出了 $AIC_{(p)}$ 定阶准则在工程中易于实现的数学关系式，并进行了仿真计算.

关键词: AR 模型，递阶估计，$AIC_{(p)}$ 准则.

1 引言

自回归（autoregressive, AR）模型是现代时间序列分析与随机控制理论中广泛研究的基本模型之一.

假定 $AR_{(p)}$ 的数学表达式为:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{p}a_i x(t-i)+\varepsilon(t) \tag{1.1}$$

其中 $\{\varepsilon(t)\}$ 为方差 σ^2 的 0 均值平稳白噪声过程，且在某次飞行器试验任务中采集到一组由白噪声激励产生的平稳数据序列 $\{x(1),\cdots,x(n)\}$，如果用 AR 模型(1.1)拟合该数据序列则必须解决的首要问题是阶次 p 如何选取，以及采用不同的 p 对拟合效果有何改变?

当阶次 p 选定之后，由经典的最小二乘理论不难导出如下结果[1]:

1) 引进记号 $\varphi_x(i,j)=\begin{bmatrix}x(i)\\ \vdots\\ x(j)\end{bmatrix}$，$H(n,\ p)\triangleq\begin{bmatrix}\varphi_x^\tau(p,1)\\ \vdots\\ \varphi_x^\tau(n-1,p-1)\end{bmatrix}$，则 $\theta_{(p)}\triangleq\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_p\end{bmatrix}$ 的最小二乘估计为:

$$\hat{\theta}_{(p|p)}\triangleq(\hat{a}_{(1\ p)},\cdots,\hat{a}_{(p\ p)})^\tau=[H^\tau_{(n,p)}H_{(n,p)}]^{-1}H^\tau_{(n,p)}\varphi_x(p+1,n). \tag{1.2}$$

2) 误差方差 σ^2 的最优无偏估计为:

$$\hat{\sigma}^2_{(p)}=\frac{1}{n-2p-1}\varphi_x^\tau(p+1,n)[I-H_{(n,p)}(H^\tau_{(n,p)}H_{(n,p)})^{-1}H^\tau_{(n,p)}]\varphi_x(p+1,n). \tag{1.3}$$

本文第二节与第三节将具体讨论模型阶次 p 的增减对系数与误差方差估计值的影响.

本文于 1992 年 6 月 20 日收到

2　模型系数的递阶估计

如果用 $p-1$ 阶自回归模型 $AR_{(p-1)}$ 拟合 $\{x_{(1)},\cdots,x_{(n)}\}$，并记系数阵 $\theta_{(p-1)}$ 的最小二乘估计 $\hat{\theta}_{(p-1|p-1)}$，则有

定理 1. 引进记号 $\widetilde{H}_{(n,p-1)} \triangleq \begin{bmatrix} x_{(p)} & \cdots & x_{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{(n-1)} & \cdots & x_{(n-p+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_x^\tau(p,2) \\ \vdots \\ \varphi_x^\tau(n-1,n-p+1) \end{bmatrix}$

则：(i) $\hat{\theta}_{(p|p)}$ 和 $\hat{\theta}_{(p-1|p-1)}$ 间有如下的递阶关系：

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_{(1|p)} \\ \vdots \\ \hat{a}_{(p-1|p)} \\ \hat{a}_{(p|p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{(1|p-1)} \\ \vdots \\ \hat{a}_{(p-1|p-1)} \\ 0 \end{bmatrix} - L_{(p)} \begin{bmatrix} x_{(p)} - \sum_{i=1}^{p-1} \hat{a}_{(i|p-1)} x_{(p-i)} \\ \vdots \\ x_{(n)} - \sum_{i=1}^{p-1} \hat{a}_{(i|p-1)} x_{(n-i)} \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

(ii) 修正矩阵 $L_{(p)}$ 由下式给定：

$$L_{(p)} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1}\varphi_x(p-1,1) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] + \frac{1}{\Omega}\left[\begin{array}{c} A_{11}^{-1}A_{12} \\ \hline 1 \end{array}\right]\left(A_{21}A_{11}^{-1}\varphi_x(p-1,1) \;\vdots\; \varphi_x^\tau(1,n-p)\right), \tag{2.2}$$

式中 $A_{11} = \widetilde{H}_{(n,p-1)}^\tau \widetilde{H}_{(n,p-1)}$, $A_{12} = A_{21}^\tau = \widetilde{H}_{(n,p-1)}^\tau \varphi_x(1,n-p)$,

$\Omega = \varphi_x^\tau(1,n-p)[I - \widetilde{H}_{(n,p-1)} A_{11}^{-1} \widetilde{H}_{(n,p-1)}^\tau)\varphi_x(1,n-p)$.

证明：本定理的论证过程分为如下三步：

1) 记由数据序列 $\{x_{(2)},\cdots,x_{(n)}\}$ 给出的 $AR_{(p-1)}$ 的系数最小二乘估计

$$\hat{\theta}_{(p-1)}^* \triangleq (\hat{a}_1^*,\cdots,\hat{a}_{p-1}^*)^\tau,$$

则由(1.1)有

$$\begin{bmatrix} x_{(p+1)} \\ \vdots \\ x_{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{(p)} & \cdots & x_{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{(n-1)} & \cdots & x_{(n-p+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{(p+1)} \\ \vdots \\ \varepsilon_{(n)} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

易见下式

$$\hat{\theta}_{(p-1)}^* = (\widetilde{H}_{(n,p-1)}^\tau \widetilde{H}_{(n,p-1)})^{-1} \widetilde{H}_{(n,p-1)}^\tau \varphi_x(p+1,n) \tag{2.4}$$

代入式(1.2)中，得 $\hat{\theta}_{(p|p)}$ 与 $\hat{\theta}_{(p-1)}^*$ 的关系式：

$$\hat{\theta}_{(p|p)} = \left\{\begin{bmatrix} \widetilde{H}_{(n,p-1)}^\tau \\ \varphi_x^\tau(1,n-p) \end{bmatrix} \cdot [\widetilde{H}_{(n,p-1)} \;\vdots\; \varphi_x(1,n-p)]\right\}^{-1} \times \begin{bmatrix} \widetilde{H}_{(n,p-1)}^\tau \\ \varphi_x^\tau(1,n-p) \end{bmatrix} \varphi_x(p+1,n)$$

$$=\begin{bmatrix}\hat{\theta}^*_{(p-1)}+\frac{1}{\Omega}A_{11}^{-1}A_{12}\varphi_x^\tau(1,n-p)\{\widetilde{H}_{(n,p-1)}\hat{\theta}^*_{(p-1)}-\varphi_x(p+1,n)\}\\ -\frac{1}{\Omega}\varphi_x^\tau(1,n-p)(\widetilde{H}_{(n,p-1)}\hat{\theta}^*_{(p-1)}-\varphi_x(p+1,n))\end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

2）考虑到记号 $\widetilde{H}_{(n,p-1)}$，并代入 $\hat{\theta}_{(p-1|p-1)}$ 的表达式中

有 $$\hat{\theta}_{(p-1|p-1)}=\left\{\begin{bmatrix}\varphi_x^\tau(p-1,1)\\ \widetilde{H}_{(n,p-1)}\end{bmatrix}^\tau\begin{bmatrix}\varphi_x^\tau(p-1,1)\\ \widetilde{H}_{(n,p-1)}\end{bmatrix}\right\}^{-1}\begin{bmatrix}\varphi_x^\tau(p-1,1)\\ \widetilde{H}_{(n,p-1)}\end{bmatrix}^\tau\varphi_x(p,n)$$

$$=A_{11}^{-1}\left(A_{11}-\frac{B_{12}B_{21}}{1+B_{21}A_{11}^{-1}B_{12}}\right)(\hat{\theta}^*_{(p-1)}+A_{11}^{-1}\varphi_x(p-1,1)x_{(p)})\cdot \tag{2.6}$$

式中，$B_{12}=B_{21}^\tau\triangleq\varphi_x(p-1,1)$。再对(2.6)移项并进行分块求逆[3]化简，得：

$$\hat{\theta}^*_{(p-1)}=\hat{\theta}_{(p-1|p-1)}-A_{11}^{-1}\varphi_x(p-1,1)\left(x_{(p)}-\sum_{i=1}^{p-1}\hat{a}_{(i|p-1)}x_{(p-i)}\right). \tag{2.7}$$

3）将式(2.7)代入(2.5)中，并进行矩阵化简得：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\hat{a}_{(1|p)}\\ \vdots\\ \hat{a}_{(p-1|p)}\end{bmatrix}=\hat{\theta}_{(p-1|p-1)}-\left[(A_{11}^{-1}+\frac{1}{\Omega}A_{11}^{-1}A_{12}A_{21}A_{11}^{-1})\varphi_x(p-1,1)\ \Big|\ \frac{1}{\Omega}A_{11}^{-1}A_{12}\varphi_x^\tau(1,n-p)\right]\\ \qquad\cdot\begin{bmatrix}\hat{\varepsilon}_{(p|p-1)}\\ \vdots\\ \hat{\varepsilon}_{(n|p-1)}\end{bmatrix}\\ \hat{a}_{(p|p)}=\frac{1}{\Omega}[\varphi_x^\tau(1,n-p)\widetilde{H}_{(n,p-1)}A_{11}^{-1}B_{12}\ \big|\ \varphi_x^\tau(1,n-p)]\cdot\begin{bmatrix}\hat{\varepsilon}_{(p|p-1)}\\ \vdots\\ \hat{\varepsilon}_{(n|p-1)}\end{bmatrix},\end{cases} \tag{2.8}$$

式中， $$\hat{\varepsilon}_{(k|p-1)}\triangleq x_{(k)}-\sum_{i=1}^{p-1}\hat{a}_{(i|p-1)}x_{(k-i)},\ (k=p,\cdots,n). \tag{2.9}$$

为基于自回归模型 $AR_{(p-1)}$ 的一步预报残差。

由式(2.8)进行适当的矩阵运算和化简，即可得修正矩阵 $L_{(p)}$ 的表达式(2.2)。

证毕

由式(2.8)—(2.9)可见，定理1给出的递阶辨识有着很直观的意义，即用 $AR_{(p)}$ 建模时系数的最小二乘估计为 $AR_{(p-1)}$ 下系数最小二乘估计与一步预报残差的修正量两部分组成。一步预报残差的大小反映了模型拟合的效果。

3 误差方差的递阶估计

假定用 p 阶自回归模型 $AR_{(p)}$ 拟合采样数据序列 $\{x_{(1)},\cdots,x_{(n)}\}$，可导出最小二乘拟合的残差平方和为：

$$R_{ss(p)}=\sum_{k=p+1}^{n}\left(x_{(k)}-\sum_{i=1}^{p}\hat{a}_{(i|p)}x_{(k-i)}\right)^2$$

$$= \varphi_x^\tau(p+1,n)[I - H_{(n,p)}(H_{(n,p)}^\tau H_{(n,p)})^{-1}H_{(n,p)}^\tau]\varphi_x(p+1,n). \tag{3.1}$$

相应地，若改用 $p-1$ 阶模型 $AR_{(p-1)}$ 进行拟合，则有

$$R_{ss(p-1)} = \varphi_x^\tau(p,n)[I - H_{(n,p-1)}(H_{(n,p-1)}^\tau H_{(n,p-1)})^{-1}H_{(n,p-1)}^\tau\varphi_x(p,n). \tag{3.2}$$

定理 2. 沿用上述记号和符号，平稳序列 AR 模型最小二乘拟合的残差平方和递阶公式为：

$$R_{ss(p)} = R_{ss(p-1)} - \frac{\{\varphi_x^\tau(p+1,n)(I-D_p)\varphi_x(1,n-p)\}^2}{\varphi_x^\tau(1,n-p)(I-D_p)\varphi_x(1,n-p)} - \frac{\hat{\varepsilon}^2_{(p|p-1)}}{1-\varphi_x^\tau(p-1,1)[H_{(n,p-1)}^\tau H_{(n,p-1)}]^{-1}\varphi_x(p-1,1)}, \tag{3.3}$$

式中 (i) $D_p \triangleq \widetilde{H}_{(n,p-1)}(\widetilde{H}_{(n,p-1)}^\tau\widetilde{H}_{(n,p-1)})^{-1}\widetilde{H}_{(n,p-1)}^\tau$,

(ii) $\hat{\varepsilon}_{(p|p-1)} = x_{(p)} - \sum_{i=1}^{p-1}\hat{a}_{(i|p-1)}x_{(p-i)}$.

证明. 本定理的论证过程分为如下三步完成：

1) 如果记用 $AR_{(p-1)}$ 拟合测量数据序列 $\{x_{(2)},\cdots,x_{(n)}\}$ 时的拟合残差平方和为 $R^*_{(p-1)}$，则有

$$R^*_{(p-1)} = \varphi_x^\tau(p+1,n)[I-D_p]\varphi_x(p+1,n). \tag{3.4}$$

采用矩阵分块 $H_{(n,p)} = (\widetilde{H}_{(n,p-1)} \vdots \varphi_x(1,n-p))$ 和分块矩阵运算和求逆公式[3]，可导出下述关系：

$$R_{ss(p)} = R^*_{(p-1)} - \frac{\{\varphi_x^\tau(p+1,n)(I-D_p)\varphi_x(1,n-p)\}^2}{\varphi_x^\tau(p-1,1)(I-D_p)\varphi_x(p-1,1)} \tag{3.5}$$

2) 如果对式(3.2)中的 $H_{(n,p-1)}$ 采用如下分块：

$$H_{(n,p-1)} = \begin{bmatrix} \varphi_x^\tau(p-1,1) \\ \hdashline \widetilde{H}_{(n,p-1)} \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

并采用矩阵的分块求逆公式[3]对(3.2)进行化简，得删除点 $x_{(1)}$ 前后的 $AR_{(p-1)}$ 拟合残差平方和满足：

$$R_{ss(p-1)} = R^*_{(p-1)} + \frac{\left\{x_{(p)} - \sum_{i=1}^{p-1}\hat{a}_{(i|p-1)}x_{(p-i)}\right\}^2}{1-\varphi_x^\tau(p-1,1)(H_{(n,p-1)}^\tau H_{(n,p-1)})^{-1}\varphi_x(p-1,1)}. \tag{3.7}$$

3) 将(3.7)式代入(3.5)中，可知式(3.3)成立.

证毕

利用误差方差 σ^2 的最优无偏估计公式(1.3)与定理 2 的结果，可以导出 $\hat{\sigma}^2$ 估计的递阶关系：

$$\hat{\sigma}^2_{(p)} = \hat{\sigma}^2_{(p-1)} + \frac{1}{n-2p-1}\delta_{1(p-1)} + \frac{1}{n-2p-1}\delta_{2(p-1)}, \tag{3.8}$$

其中，(i)

$$\delta_{1(p-1)} \triangleq \hat{\sigma}^2_{(p-1)} - \frac{\{\varphi_x^\tau(p+1,n)(I-D_p)\varphi_x(1,n-p)\}^2}{\varphi_x^\tau(1,n-p)(I-D_p)\varphi_x(1,n-p)}, \tag{3.9}$$

(ii) $\delta_{2(p-1)} \triangleq \hat{\sigma}^2_{(p-1)} - \dfrac{\hat{\varepsilon}^2_{(p'p-1)}}{1-\varphi_x^\tau(p-1,1)(H^\tau_{(n,p-1)}H_{(n,p-1)})^{-1}\varphi_x(p-1,1)}$, (3.10)

式中各符号的含义同定理 2.

4 平稳序列的定阶与建模

在平稳序列 AR 模型拟合的定阶分析中,目前应用得最广泛的是 Akaike 信息准则(AIC):

$$\begin{cases} \mathrm{AIC}(p) = \log \hat{\sigma}^2(p) + \dfrac{2p}{n} \\ p_0 = \mathrm{argmin}\{\mathrm{AIC}_{(p)}, p \in N\} \end{cases} \tag{4.1}$$

即选取使 AIC(p) 达到极小值的正整数 p_0 为最优的拟合阶次.

AIC 定阶准则在工程应用中的一个缺点是计算量大.为了确定一个合适的拟合阶次,先必须计算一系列的 AIC(p)($p=1,2,\cdots$) 的值,再从中找出极小值点 p_0. 但是,如果结合本文第二、三节提供的递阶公式,并考虑到 AIC(p)的值是离散下凸的[3],可以导出一个与 AIC 准则等价的却更易于工程实现的定阶统计量.

由式(3.8)~(3.10),AIC(p) 的递阶关系为:

$$\mathrm{AIC}(p+1) - \mathrm{AIC}(p) = \frac{2}{n} + \log\left\{1 + \frac{\delta_1(p)+\delta_2(p)}{(n-2p-3)\hat{\sigma}^2(p)}\right\}. \tag{4.2}$$

因此,构造统计量:

$$G(p) \triangleq \frac{\delta_1(p)+\delta_2(p)}{(n-2p-3)\hat{\sigma}^2(p)} \tag{4.3}$$

并且不难验证:

当 $G(p) \geqslant e^{-\frac{2}{n}} - 1$ 时, $\mathrm{AIC}(p+1) \geqslant \mathrm{AIC}(p)$. (4.4)

由(4.4)和 AIC(p) 的离散下凸特性[3],我们可构造如下的递阶建模程序:

1) 计算初值:

$$\hat{a}_{(1|1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_{(i)}x_{(i+1)}}{\sum_{i=1}^{n-1} x^2(i)}, \quad \hat{\sigma}^2_{(1)} = \sum_{i=1}^{n-1} x^2_{(i)} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_{(i)}x_{(i+1)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} x^2(i)}.$$

2) 按式(2.1)、(3.3)及(3.8)~(3.10)递阶估计模型的系数及误差方差,得估计值

$$(\hat{a}_{(1|p)}, \cdots, \hat{a}_{(p|p)}; \hat{\sigma}^2_{(p)});$$

3) 计算统计量 $G_{(p)}$;

4) 判断: 当 $G_{(p)} > e^{-\frac{2}{n}} - 1$ 时, p 即为最优拟合阶次, 输出 p 值及参数估计值;否则,取 $p+1 \Rightarrow p$,返回(2),直到出现满足(4.4)的正整数 p_0.

表 1 是 $AR_{(2)}$ 模型 $x_{(t)} = 2x_{(t-1)} + 8x_{(t-2)} + \varepsilon_{(t)}$ 的仿真数据在 PC-386 微机上的计算情况 ($n=200$):

表 1　$AR_{(2)}$ 仿真情况比较

	定　阶	耗费机时	系数估计值	σ^2 估计
逐阶计算	2	73秒	$\hat{a}_1 = 1.99961^{(*)}$　$a_2 = 7.89991^{(*)}$	1.100420
递阶计算	2	48秒	$\hat{a}_{(1\|2)} = 1.99968$　$\hat{a}_{(2\|2)} = 7.90037$	1.100372

表中带(*)数据为定阶后再行估计计算的.

参　考　文　献

[1] 杨位钦,顾岚. 时间序列分析与动态数据建模. 北京工业学院出版社,1986.90—161.
[2] 邓自立、郭一新. 现代时间序列分析及应用——建模滤波、去卷、预报和控制. 北京：知识出版社，1988.1—49.
[3] 王松桂. 线性模型的理论及应用. 安徽教育出版社,1987.1—152.
[4] H Akaike. AR Model Fitting for Control Ann. Inst. Statist. Math., 1971, **23**: 163—180.

HIERARCHICAL IDENTIFICATION FOR PARAMETERS OF AUTOREGRESSIVE MODELS

Hu Feng
(*Xian Satellite Control Center* 710043)

Abstract

In this paper, some formulas for the hierarchical estimation of autoregressive coefficients and error variance are given; an equivalent, but more convenient, algorithm of $AIC_{(p)}$ is obtained. At the end of the paper, a simulation analysis of $AR_{(2)}$ is given.

Key words: autoregressive model, hierarchical estimators, the Akaike Information Criterion (AIC).