第 20 卷 第 4 期 自 动 化 学 报 Vol. 20, No. 4
1994 年 7 月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1994

短 文

广义离散随机线性系统的降阶估计

秦超英 戴冠中
(西北工业大学一系 西安 710072)

摘 要

该文讨论广义离散随机线性系统的状态估计问题,给出了一种降阶估计方法,该方法可直接估计系统的部分状态或系统状态的某个线性组合.

关键词: 广义系统,降阶估计.

1 引言

由于广义系统的状态估计问题在理论和应用方面具有十分重要的意义,因而受到人们的关注.文献 [1—6] 采用不同方法对此问题进行了研究,其中文献 [1、2] 基于系统的快、慢子系统分解,得到了系统状态的递推估计,估计方法存在的主要问题是:当系统状态变量维数较高时,计算量太大.文献 [3、4] 采用了一种新的分解方法,估计算法的计算量虽有所减小,但估计不是最优或不完全是最优的.上述所有估计方法的共同特点是它们同时估计系统的全部状态.然而,人们有时并不需要知道系统的全部状态,而只需要知道其中部分状态.为了估计这些状态,而必须估计出全部状态,特别对大系统而言,这显然是不适宜的.本文提出的估计方法可直接获得所需部分状态的估计,更一般地,该方法可估计系统状态的某个线性组合.

2 问题描述

考虑广义离散随机线性系统

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bw(k) \tag{1a}$$

$$y(k) = Cx(k) + v(k) \tag{1b}$$

其中,状态 $x(k)$ 是 n 维向量,观测向量 $y(k)$ 的维数 $m \leqslant n$, $w(k)$ 和 $v(k)$ 分别为 p 维和 m 维动态噪声和观测噪声, E、A、B、C 为已知适当维数的常值矩阵.假设系统(1)是正则的,即 $\operatorname{rank}E = n_1 < n$ 且 $\det(zE - A) \not\equiv 0$,这使方程 (1a) 对任意 $Bw(k)$ 其解存在且唯一; $w(k)$ 和 $v(k)$ 是零均值的白噪声,且

$$E\{w(k)w^T(j)\} = Q\delta_{kj}, E\{v(k)v^T(j)\} = R\delta_{kj}, E\{w(k)v^T(j)\} = 0 \tag{2}$$

本文于 1992 年 9 月 10 日收到

其中 Q、R 是正定对称矩阵,$E\{\cdot\}$ 表示期望算子;容许初值 $\boldsymbol{x}(0)$ 的期望和方差为

$$E\{\boldsymbol{x}(0)\}=\bar{\boldsymbol{x}}_0,\operatorname{var}\{\boldsymbol{x}(0)\}=P_0, \tag{3}$$

且

$$E\{\boldsymbol{w}(k)\boldsymbol{x}^T(0)\}=0,E\{\boldsymbol{v}(k)\boldsymbol{x}^T(0)\}=0,\forall k. \tag{4}$$

本文的目的是估计状态向量 $\boldsymbol{x}(k)$ 的线性函数

$$\boldsymbol{z}(k)=L\boldsymbol{x}(k) \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{z}(k)$ 的维数 $l\leqslant n$, L 为已知 $l\times n$ 矩阵. 最优滤波器具有如下形式

$$\hat{\boldsymbol{z}}(k+1)=F(k)\hat{\boldsymbol{z}}(k)+K(k+1)\boldsymbol{y}(k+1) \tag{6}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{z}}(k)$ 表示 $\boldsymbol{z}(k)$ 的估计值,估计误差定义为

$$\boldsymbol{e}(k)=\boldsymbol{z}(k)-\hat{\boldsymbol{z}}(k). \tag{7}$$

要求确定矩阵 $F(k)$ 和 $K(k+1)$,使

$$E\{\boldsymbol{e}(k)\}=0,\forall k\geqslant 0, \tag{8}$$

且性能指标

$$J=E\{\boldsymbol{e}^T(k+1)\boldsymbol{e}(k+1)\} \tag{9}$$

达到极小.

3 问题的解

在系统正则性假设下,存在两个非奇异矩阵 $\overline{M}$、$\overline{N}\in R^{n\times n}$,使得

$$\overline{M}E\overline{N}=\begin{bmatrix}I_{n_1} & 0\\ 0 & N\end{bmatrix},\ \overline{M}A\overline{N}=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & I_{n_2}\end{bmatrix} \tag{10}$$

其中 $N\in R^{n_2\times n_2}$ 为幂零阵,$n_1+n_2=n$. 引入状态变换

$$\boldsymbol{x}(k)=\overline{N}[\boldsymbol{x}_1^T(k)\ \ \boldsymbol{x}_2^T(k)]^T \tag{11}$$

则系统(1)受限等价于如下系统

$$\boldsymbol{x}_1(k+1)=A_1\boldsymbol{x}_1(k)+B_1\boldsymbol{w}(k) \tag{12a}$$

$$N\boldsymbol{x}_2(k+1)=\boldsymbol{x}_2(k)+B_2\boldsymbol{w}(k) \tag{12b}$$

$$\boldsymbol{y}(k)=C_1\boldsymbol{x}_1(k)+C_2\boldsymbol{x}_2(k)+\boldsymbol{v}(k) \tag{12c}$$

式中 $\boldsymbol{x}_1(k)\in R^{n_1}$, $\boldsymbol{x}_2(k)\in R^{n_2}$

$$\overline{M}B\triangleq\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix},\ C\overline{N}\triangleq[C_1\ \ C_2] \tag{13}$$

记

$$L\overline{N}\triangleq[L_1\ \ L_2]$$

则(5)式变为

$$\boldsymbol{z}(k)=L\overline{N}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(k)\\ \boldsymbol{x}_2(k)\end{bmatrix}=L_1\boldsymbol{x}_1(k)+L_2\boldsymbol{x}_2(k) \tag{14}$$

由(6)、(7)、(12)和(14)式,误差传播方程为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}(k+1)&=\boldsymbol{z}(k+1)-\hat{\boldsymbol{z}}(k+1)\\ &=[L_1A_1-F(k)L_1-K(k+1)C_1A_1]\boldsymbol{x}_1(k)+[L_2-F(k)L_2N\\ &\quad -K(k+1)C_2]\boldsymbol{x}_2(k+1)+F(k)\boldsymbol{e}(k)+[L_1B_1+F(k)L_2B_2\\ &\quad -K(k+1)C_1B_1]\boldsymbol{w}(k)-K(k+1)\boldsymbol{v}(k+1)\end{aligned} \tag{15}$$

若令
$$L_1A_1 - F(k)L_1 - K(k+1)C_1A_1 = 0 \tag{16}$$
$$L_2 - F(k)L_2N - K(k+1)C_2 = 0 \tag{17}$$
则(15)式成为
$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}(k+1) = F(k)\boldsymbol{e}(k) + [L_1B_1 + F(k)L_2B_2 - K(k+1)C_1B_1]\boldsymbol{w}(k) \\ - K(k+1)\boldsymbol{v}(k+1) \end{aligned} \tag{18}$$
显然，选取 $\hat{\boldsymbol{z}}(0) = L\bar{\boldsymbol{x}}_0$ 时 $E\{\boldsymbol{e}(0)\} = 0$，又由于 $\boldsymbol{w}(k)$和 $\boldsymbol{v}(k+1)$ 的期望值均为零，由(18)式可见
$$E\{\boldsymbol{e}(k)\} = 0, \forall k \geqslant 0 \tag{19}$$
于是，若选取 $F(k)$ 和 $K(k+1)$ 满足(16)和(17)式，则估计是无偏的．记
$$\Psi \triangleq [L_1A_1 \ \ L_2]$$
则(16)和(17)式可以写成
$$[F(k) \ \ K(k+1)]\begin{bmatrix} L_1 & L_2N \\ C_1A_1 & C_2 \end{bmatrix} = \Psi \tag{20}$$
我们确定 $F(k)$ 和 $K(k+1)$ 的方法是：先由(20)式求出 $F(k)$ 和 $K(k+1)$ 中的部分元素，其余元素则通过使性能指标 J 达到极小来确定，为使这种方法可行，我们需假设(5)式中的 L 满足
$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} L_1 & L_2N \\ C_1A_1 & C_2 \end{bmatrix} = n \tag{21}$$
于是，可以选取矩阵 $\begin{bmatrix} L_1 & L_2N \\ C_1A_1 & C_2 \end{bmatrix}$ 中 n 个线性无关的行记为 H_1，其余的行记为 H_2，$[F(k) \ \ K(k+1)]$与 H_1 相乘所对应的 n 个列记为 G_1，其余的列记为 G_2，那么，如果
$$H_1 = S_1\begin{bmatrix} L_1 & L_2N \\ C_1A_1 & C_2 \end{bmatrix} \tag{22}$$
其中 S_1 是选择矩阵，它的元素由 0 或 1 构成，且
$$S_1S_1^T = I_n \tag{23}$$
则有
$$G_1 = [F(k) \ \ K(k+1)]S_1^T \tag{24}$$
这样，(20)式就可以写成
$$G_1H_1 + G_2H_2 = \Psi \tag{25}$$
由于我们选取的 H_1 是可逆阵，故有
$$G_1 = (\Psi - G_2H_2)H_1^{-1} \tag{26}$$
根据 G_1 和 G_2 的定义，$F(k)$ 和 $K(k+1)$ 可以通过 G_1 和 G_2 表示成为
$$F(k) = G_1M_1 + G_2M_2 \tag{27}$$
$$K(k+1) = G_1N_1 + G_2N_2 \tag{28}$$
其中 M_1、M_2、N_1、N_2 是适当维数的、类似于 S_1 的选择矩阵．将(26)式代入(27)和(28)式得
$$F(k) = \Gamma_1 + G_2\Gamma_2 \tag{29}$$
$$K(k+1) = \Omega_1 + G_2\Omega_2 \tag{30}$$

其中

$$\Gamma_1 = \Psi H_1^{-1} M_1, \qquad \Gamma_2 = M_2 - H_2 H_1^{-1} M_1 \tag{31}$$

$$\Omega_1 = \Psi H_1^{-1} N_1, \qquad \Omega_2 = N_2 - H_2 H_1^{-1} N_1 \tag{32}$$

(29)和(30)式相当于利用无偏性(8)式确定了 $F(k)$ 和 $K(k+1)$ 中的部分元素 G_1，为确定其余的元素 G_2，将性能指标 J 改写成等价形式

$$J = tr\{P(k+1)\} \tag{33}$$

其中

$$P(k+1) = E\{\boldsymbol{e}(k+1)\boldsymbol{e}^T(k+1)\} \tag{34}$$

为估计误差方差阵．由(18)式且考虑到 $\boldsymbol{e}(k)$、$\boldsymbol{w}(k)$ 和 $\boldsymbol{v}(k+1)$ 均互不相关，则误差方差阵的传播方程为

$$\begin{aligned} P(k+1) = {} & F(k)P(k)F^T(k) + (L_1B_1 + F(k)L_2B_2 \\ & - K(k+1)C_1B_1)Q(L_1B_1 + F(k)L_2B_2 - K(k+1)C_1B_1)^T \\ & + K(k+1)RK^T(k+1) \end{aligned} \tag{35}$$

$$P(0) = LP_0L^T \tag{36}$$

将(29)和(30)式代入(35)式得

$$\begin{aligned} P(k+1) = {} & (\Gamma_1 + G_2\Gamma_2)P(k)(\Gamma_1 + G_2\Gamma_2)^T + (L_1B_1 + \Gamma_1L_2B_2 - \Omega_1C_1B_1 \\ & + G_2(\Gamma_2L_2B_2 - \Omega_2C_1B_1))Q(L_1B_1 + \Gamma_1L_2B_2 - \Omega_1C_1B_1 \\ & + G_2(\Gamma_2L_2B_2 - \Omega_2C_1B_1))^T + (\Omega_1 + G_2\Omega_2)R(\Omega_1 + G_2\Omega_2)^T \end{aligned} \tag{37}$$

将(37)式代入(33)式后令 J 关于 G_2 的梯度等于 0，得

$$\begin{aligned} & \Gamma_1P(k)\Gamma_2^T + G_2\Gamma_2P(k)\Gamma_2^T + (L_1B_1 + \Gamma_1L_2B_2 - \Omega_1C_1B_1)Q(\Gamma_2L_2B_2 - \Omega_2C_1B_1)^T \\ & + G_2(\Gamma_2L_2B_2 - \Omega_2C_1B_1)Q(\Gamma_2L_2B_2 - \Omega_2C_1B_1)^T + \Omega_1R\Omega_2^T \\ & + G_2\Omega_2R\Omega_2^T = 0 \end{aligned} \tag{38}$$

记

$$D_1(k) \triangleq [\Gamma_2P(k)\Gamma_2^T + (\Gamma_2L_2B_2 - \Omega_2C_1B_1)Q(\Gamma_2L_2B_2 - \Omega_2C_1B_1)^T + \Omega_2R\Omega_2^T]^{-1} \tag{39}$$

$$D_2 \triangleq \Omega_1R\Omega_2^T + (L_1B_1 + \Gamma_1L_2B_2 - \Omega_1C_1B_1)Q(\Gamma_2L_2B_2 - \Omega_2C_1B_1) \tag{40}$$

则

$$G_2 = -(\Gamma_1P(k)\Gamma_2^T + D_2)D_1(k) \tag{41}$$

将(41)式代入(29)和(30)式得

$$F(k) = \Gamma_1 - D_2D_1(k)\Gamma_2 - \Gamma_1P(k)\Gamma_2^TD_1(k)\Gamma_2 \tag{42}$$

$$K(k+1) = \Omega_1 - D_2D_1(k)\Omega_2 - \Gamma_1P(k)\Gamma_2^TD_1(k)\Omega_2 \tag{43}$$

这样，我们便按照线性最小方差无偏估计准则确定出了 $F(k)$ 和 $K(k+1)$．于是，可得降阶最优滤波器的方程为

$$\hat{\boldsymbol{z}}(k+1) = F(k)\hat{\boldsymbol{z}}(k) + K(k+1)\boldsymbol{y}(k+1) \tag{44}$$

$$\hat{\boldsymbol{z}}(0) = L\bar{\boldsymbol{x}}_0 \tag{45}$$

$$\begin{aligned} P(k+1) = {} & F(k)P(k)F^T(k) + (L_1B_1 + F(k)L_2B_2 - K(k \\ & + 1)C_1B_1)Q(L_1B_1 + F(k)L_2B_2 - K(k+1)C_1B_1)^T \\ & + K(k+1)RK^T(k+1) \end{aligned} \tag{46}$$

$$P(0) = LP_0L^T \tag{47}$$

其中 $F(k)$ 和 $K(k+1)$ 由(42)和(43)式确定。

注. 上述算法可实现的条件是(21)式成立. 若此条件不满足，则可通过适当增加滤波器的维数来满足这一条件，即先将(5)式变为

$$\xi(k) = \tilde{L}x(k) \tag{48}$$

其中

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} L \\ L' \end{bmatrix}$$

只要选取适当的矩阵 L'，使

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \tilde{L}_1 & \tilde{L}_2 N \\ C_1 A_1 & C_2 \end{bmatrix} = n$$

成立即可. 然后利用上述方法可得到 $\xi(k)$ 的估计值 $\hat{\xi}(k)$，则 $z(k)$ 的估计值便为

$$\hat{z}(k) = [I_l \ \ 0]\hat{\xi}(k)$$

参 考 文 献

[1] Dai Liyi, State Estimation Schemes for Singular Systems, IFAC 10th Triennial World Congress, 1987, 209—215

[2] 王恩平，王朝珠，广义离散随机线性系统的最优递推滤波方法(I)，自动化学报，1988，**14**(6)：409—415

[3] 王恩平，广义离散随机线性系统的次优滤波，科学通报，1989，**34**(15)：1186—1188

[4] 王恩平，广义离散随机线性系统的马尔可夫估计，自动化学报，1991，**17**(6)：641—648

[5] Dai Liyi, Filtering and LQG Problems for Discrete-Time Stochastic Singular Systems, *IEEE Trans* 1989, **AC-34** (10): 1105—1108

[6] 秦超英，戴冠中，广义离散随机线性系统的状态估计，信息与控制，1992，**21**(5)：261—265

REDUCE ORDER ESTIMATION FOR SINGULAR DISCRETE STOCHASTIC LINEAR SYSTEMS

Qin Chaoying Dai Guanzhong

(Northwestern Polytechnical University Xi'an 710072)

Abstract

In this note, the state estimation problem of the singular discrete stochastic linear systems is discussed and a reduced-order estimation scheme is given. The scheme can directly estimate part states of the systems or linear combination of the systems' states.

Key words: Singular Systems; Reduced-order estimation