一般两级可修 CIMS 生产线的显式结果[1)]

李 伟 曹晋华
(中国科学院应用数学研究所 北京 100080)

摘 要

此文考虑了由两个工作站所组成的一类带有缓冲库及返工率的可修 CIMS 生产线的运行特征. 在两工作站的生产率、失效率、修复率以及加工工件的返工率皆为依赖于缓冲库中工件数的假设下,给出了系统运行特征的精确显式解.

关键词: 计算机集成制造系统 (CIMS),可靠性,随机服务系统.

1 引言

CIMS 的研究是我国"863 计划"自动化技术领域的主题之一，目前已受到越来越多的学者们的关注[1-7], 2-4)． 一般的 CIMS 生产线由可修的工作站和容量有限的缓冲库级联而成[1-6]. 人们在讨论这类 CIMS 生产线时,为方便起见,总是假定工件经工作站一次加工后,即被该工作站加工完毕并转往下一级或离开生产线;同时，机器的加工时间、失效时间和修复时间都与缓冲库的负载无关[1-7]. 然而,在一般的实际生产线中，经工作站加工的工件出现报废或由于加工不完善需要重新加工的情况经常出现，而机器的随机加工、失效和修复时间则更是随着缓冲库的负载不同而发生变化. 在本文中,称这种具有一般性的 CIMS 生产线为一般 CIMS 生产线.

对于两级 CIMS 生产线，人们首先关心的是它有关指标的精确显式解. 早在 1981 年，Gershwin[7] 就讨论了这一问题,给出了状态概率的乘积形式

$$P(n,\alpha_1,\alpha_2)=\sum_{i=1}^{4}C_iX_i^nY_{1i}^{\alpha_1}Y_{2i}^{\alpha_2},\quad 1\leqslant n\leqslant N-1$$

然而,由于其中待定参数的确定要涉及三次方程的非负解及一系列方程的解,所以，实际上没有得出问题的显式结果. 为了实际上的应用,有关学者又深入地研究了同一模型,分

1) 本研究项目得到国家自然科学基金资助.
2) 谭民,疏松桂. 两级 CIMS 串行生产线可靠性模型. 中科院自动化所技术报告，1991,3.
3) 疏松桂,谭民 CIMS 局部网络可靠性研究《成果汇编》. 中科院自动化所. 1991,1.
4) 郑应平,何善堉. CIMS 论文集(一、二、三). 中科院自动化所 CIMS 研究中心. 1989,12.
本文于 1993 年 1 月 12 日收到

别得到了系统的近似解析解[1),2)]。

本文讨论上述的一般两级 CIMS 生产线问题，给出了马氏过程稳态概率的一个精确显式解，将一般两级 CIMS 生产线问题转化为一个马氏过程而得到了几乎所有感兴趣指标的精确显式解，然后，给出了一种算法，并计算了几个具体例子。

2　系统的建模与分析

2.1　假设条件

1）生产线由两个工作站和中间一个容量为 N 的缓冲库串行构成。工作站 1 不因缺料而空闲，工作站 2 输出无阻塞。

2）由工作站 1 加工完的工件，当缓冲库的工件数与工作站 2 上的工件数之和为 n 时，以概率 q_{in} 重新加工、以概率 p_{in} 进入缓冲库或阻塞（$n=0,1,\cdots,N+1$）；由工作站 2 加工完的工件，当缓冲库的工件数为 $n-1$ 且工作站 1 不处于阻塞状态时，以概率 q_{2n} 重新加工、以概率 p_{2n} 离开生产线（$n=1,2,\cdots,N+1$）；由工作站 2 加工完的工件，当缓冲库的工件数为 N 且工作站 1 已加工完一个工件由于缓冲库已满而处于阻塞时，以概率 q_{2N+2} 重新加工，以概率 p_{2N+2} 离开生产线。

3）当缓冲库的容量与工作站 2 上的工件数之和为 n 时，工作站 1 的加工率为 ω_{1n}，失效率为 α_{1n}，修复率为 β_{1n}（$n=0,1,\cdots,N+1$）；当缓冲库的工件数为 $n-1$ 且工作站 1 不处于阻塞状态时，工作站 2 的加工率为 ω_{2n}，失效率为 α_{2n}，修复率为 β_{2n}（$n=1,\cdots,N+1$）；当缓冲库的工件数为 N 而工作站 1 处于阻塞状态时，工作站 2 对工件的加工率为 ω_{2N+2}，失效率为 α_{2N+2}，修复率为 β_{2N+2}。

其它假设与文献[7]（$P4$），张文[2)]（$P49$）一致。

2.2　记号

$$\Delta\{d_i\}=\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{N+1}\end{bmatrix},\quad \Delta\{a_i,b_i,c_i\}=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_N & b_N & c_N \\ & & & a_{N+1} & b_{N+1}\end{bmatrix},$$

$$D_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},\quad D_6=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$D_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ \vdots & \vdots\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad D_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \vdots & \vdots\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad D_4=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ \vdots & \vdots\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad D_5=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \vdots & \vdots\\ 0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

1）同前页脚注 2)。

2）张一刚. CIMS 生产线的可靠性建模与分析. 中科院自动化所博士论文. 1991.

$$\nu_k = -[\alpha_{1k} + \alpha_{2k} + p_{1k}\omega_{1k} + p_{2k}\omega_{2k}], \qquad k = 1,2,\cdots,N+1;$$
$$\lambda_k = -[\beta_{1k} + \alpha_{2k} + p_{2k}\omega_{2k}], \qquad k = 1,2,\cdots,N+1;$$
$$\mu_k = -[\alpha_{1k} + \beta_{1k} + p_{1k}\omega_{1k}], \qquad k = 1,2,\cdots,N+1;$$
$$B = \begin{bmatrix} -\alpha_{10}-p_{10}\omega_{10} & \alpha_{10} \\ \beta_{10} & -\beta_{10} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -\beta_{2N+2} & \beta_{2N+2} \\ \alpha_{2N+2} & -\alpha_{2N+2}-p_{2N+2}\omega_{2N+2} \end{bmatrix}.$$

2.3 有关定义

为方便起见,引入如下一些定义:

工作站的稳态返工频度．当系统处于稳态时，单位时间内由工作站返工的平均工件数,即 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}$, 其中 $N(t)$ 为 $(0,t]$ 内由工作站返工的平均工件数.

工作站的稳态失效频度．当系统处于稳态时，单位时间内工作站失效的平均次数.

工作站的稳态输出频度．当系统处于稳态时,单位时间内由工作站输出工件(不含返工)的平均个数.

系统的稳态可用度．当系统处于稳态时,系统有工件输出的概率.

系统的稳态生产率．当系统处于稳态时，单位时间内系统输出工件(不含返工)的平均个数.

2.4 系统分析

定义工作站和系统的状态如下:

$X_i(t) = 1$: 表示时刻 t 时工作站 i 正常(包括正在工作，饥饿或阻塞)，$i = 1,2$.

$X_i(t) = 0$: 表示时刻 t 时工作站 i 正在修理，$i = 1,2$.

$(0,\alpha_1,1)$: 表示时刻 t 时 $X_1(t) = \alpha_1(\alpha_1 = 0,1)$，而工作站 2 处于饥饿状态.

(n,α_1,α_2): 表示时刻 t 时 $X_i(t) = \alpha_i(\alpha_i = 0, 1; i = 1, 2)$，缓冲库中的工件数为 $n-1$ $(n = 1,2,\cdots,N+1)$.

$(N+2,1,\alpha_2)$: 表示时刻 t 时 $X_2(t) = \alpha_2(\alpha_2 = 0,1)$，而工作站 1 已加工完一个工件由于缓冲库已满而处于阻塞状态.

令 $S(t)$ 表示时刻 t 系统所处的状态,由指数分布的无记忆性，易知 $\{S(t)\}$ 为状态空间

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(0,1,1),(0,0,1);(1,1,1),\cdots,(N+1,1,1);(1,0,1),\cdots,\\ &(N+1,0,1);(1,1,0),\cdots,(N+1,1,0);(1,0,0),\cdots,(N+1,0,0);\\ &(N+2,1,0),(N+2,1,1)\}\end{aligned}$$

上的马尔科夫过程.

记 $p_{ijk}(t) = P\{S(t) = (i,j,k)\}$,

$$P_1(t) = (p_{011}(t), p_{001}(t)), \qquad P_2(t) = (p_{111}(t),\cdots,p_{N+111}(t)),$$
$$P_3(t) = (p_{101}(t),\cdots,p_{N+101}(t)), \qquad P_4(t) = (p_{110}(t),\cdots,p_{N+110}(t)),$$
$$P_5(t) = (p_{100}(t),\cdots,p_{N+100}(t)), \qquad P_6(t) = (p_{N+210}(t), p_{N+211}(t)),$$
$$P(t) = (P_1(t),P_2(t),P_3(t),P_4(t),P_5(t),P_6(t)).$$

根据以上假设,通过概率分析,易知

$$P'(t) = P(t)A, \tag{1}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix} B & p_{10}\omega_{10}D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{21}\omega_{21}D_2 & \Delta\{p_{2k}\omega_{2k},\nu_k,p_{1k}\omega_{1k}\} & \Delta\{\alpha_{1k}\} & \Delta\{\alpha_{2k}\} & 0 & p_{1N+1}\omega_{1N+1}D_3 \\ p_{21}\omega_{21}D_4 & \Delta\{\beta_{1k}\} & \Delta\{p_{2k}\omega_{2k},\lambda_k,0\} & 0 & \Delta\{\alpha_{2k}\} & 0 \\ 0 & \Delta\{\beta_{2k}\} & 0 & \Delta\{0,\mu_k,p_{1k}\omega_{1k}\} & \Delta\{\alpha_{1k}\} & p_{1N+1}\omega_{1N+1}D_5 \\ 0 & 0 & \Delta\{\beta_{2k}\} & \Delta\{\beta_{1k}\} & \Delta\{-\beta_{1k}-\beta_{2k}\} & 0 \\ 0 & p_{2N+2}\omega_{2N+2}D_6 & 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix}.$$

由(1)式知[10]

$$P(t)=P(0)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!},$$

$P(t)$ 的拉氏变换为

$$P^*(s)=P(0)(sI-A)^{-1}. \tag{2}$$

3　基本引理

定义 1. 如果 $n(\geqslant 2)$ 阶方阵 $Q=(q_{ij})$ 满足 $|q_{ii}|\geqslant\sum\limits_{k\neq i}|q_{ik}|(i=1,\cdots,n)$，且至少存在一个 $k_0\in\{1,\cdots,n\}$，使上式成为严格不等式，则称方阵 Q 是对角占优的[11]。

定义 2. 有限个行列互换的初等矩阵的乘积称为一个置换矩阵。如果存在一个置换矩阵 P 使得

$$PQP^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} B & 0 \\ C & D\end{bmatrix}.$$

其中 P^{T} 表示 P 的转置矩阵，B、D 为阶数$\geqslant 1$ 的方阵，则称 Q 是可约的；否则称 Q 是不可约的[12,13]。

引理 1. $n(\geqslant 2)$ 阶方阵 Q 是不可约的充要条件是对任意 $i,j\in E=\{1,\cdots,n\}$，有 $i\rightarrow j$，即存在 $k_1,\cdots,k_m\in E$ 使得 $q_{ik_1}q_{k_1k_2}\cdots q_{k_mj}>0$。

证明．充分性．如果存在一个置换矩阵 P 使得 $PQP^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} B & 0 \\ C & D\end{bmatrix}$，不妨设 m 阶方阵 $B=(b_{ij})$ 中 $b_{ij}=q_{k_ik_j}(1\leqslant i\leqslant m<n)$，则易知对 $k\in\{k_1,\cdots,k_m)$ 及 $l\in\{1,2,\cdots,n\}-\{k_1,\cdots,k_m\}$ 有 $k\not\rightarrow l$。

必要性．如果存在 $i,j\in E$ 使得 $i\not\rightarrow j$．令 $E_1=\{k:k\not\rightarrow j\}$，$E_2=\{k:k\rightarrow j\}$，则 $E_1\neq\Phi$。

(1) 若 $E_2 \neq \Phi$，则易知对任意 $k \in E_1$ 及任意 $l \in E_2$ 有 $k \not\to l$。不妨设 $E_1 = \{i_1, \cdots, i_s\}$，$E_2 = \{i_{s+1}, \cdots, i_n\} (1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s < i_{s+1} < \cdots < i_n \leqslant n)$，而 $I(l,m)$ 为 n 阶单位阵第 l 行和第 m 行互换后的初等矩阵，并记 $P = I(s, i_s) \cdots I(2, i_2) I(1, i_1)$，则易知 $PQP^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ * & D \end{bmatrix}$，即 Q 可约.

(2) 若 $E_2 = \Phi$，由 $I(j,n) Q I^{\mathrm{T}}(j, n) = \begin{bmatrix} C & 0 \\ * & q_{ij} \end{bmatrix}$ 即知 Q 可约.

引理 2[11]. 如果方阵 Q 既不可约又对角占优，则 Q 非奇异.

定义 3. 设 $P(t) = (p_{ij}(t))$ 为状态空间 $E = \{1, \cdots, n\}$ 上马氏过程的转移概率矩阵，如果对 $i, j \in E$，存在 $t_0 > 0$ 使得 $p_{ij}(t_0) > 0$，则称 i 可达 j；如果对任意 $i, j \in E$ 有 i 可达 j，则称该马氏过程是不可约的[14].

引理 3. 设状态空间 $E = \{1, 2, \cdots, n\}$ 上马氏过程 $\{Y(t)\}$ 的转移率矩阵为 $Q = \{q_{ij}\}$，即 $Q = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{P(t) - I}{t}$，则该马氏过程是不可约的充要条件为 Q 是不可约的.

证明. 充分性. 对任意 i、$j \in E$，由引理 1 易知，存在 $k_1, \cdots, k_m \in E$ 满足 $k_1 \neq i$，$k_m \neq j$，且 $k_1, \cdots, k_m$ 互不相同，使得 $q_{ik_1} q_{k_1 k_2} \cdots q_{k_m j} > 0$. 再由 Q 的定义知，存在 $t_1, \cdots, t_{m+1} \in (0, \infty)$，使得 $p_{ik_1}(t_1) p_{k_1 k_2}(t_2) \cdots p_{k_m j}(t_{m+1}) > 0$. 取 $t_0 = t_1 + \cdots + t_{m+1}$，则有

$$p_{ij}(t_0) \geqslant p_{ik_1}(t_1) p_{k_1 k_2}(t_2) \cdots p_{k_m j}(t_{m+1}) > 0.$$

由定义 3 知，马氏过程是不可约的.

必要性. 由 E 有限易知[13]

$$P(t) = (p_{ij}(t)) = \mathrm{e}^{Qt} = I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Q^m t^m}{m!} \quad (0 \leqslant t < \infty),$$

既对任意不同的 $i, j \in E$ 有

$$p_{ij}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{k_1 \in E \cdots k_m \in E} q_{ik_1} \cdots q_{k_m i}.$$

由定义 3 及上式可知，当 i 可达 j 且 j 可达 i 时，必有 $i \to j$ 和 $j \to i$，进而也有 $i \to i$. 利用引理 1 可知 Q 为不可约的.

定理 1. 设 $Q = (q_{ij})$ 为状态空间 $E = \{1, 2, \cdots, n\}$ 上不可约马氏过程 $\{Y(t)\}$ 的转移率矩阵，M_{ii} 为 q_{ii} 的余子式，则 $|M_{ii}| \neq 0 (i = 1, \cdots, n)$.

证明. 1) 先证 $|M_{11}| \neq 0$.

由引理 3 知 Q 不可约，故存在 $i \in \{2, \cdots, n\}$ 使 $q_{i1} \neq 0$，从而由转移率矩阵的性质

$$\sum_{k=1}^{n} q_{ik} = 0, \quad q_{il} \geqslant 0, \quad i \neq l, \quad i, l = 1, \cdots, n$$

知 M_{11} 对角占优. (a) 如果 M_{11} 不可约，则由引理 2 知 $|M_{11}| \neq 0$; (b) 如果 M_{11} 可约，则由定义 2 易知存在置换阵 P 及不可约矩阵 $B_1, \cdots, B_L$ 使得

$$PM_{11}P^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}B_1 & & & \\ * & B_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & & B_L\end{bmatrix}. \tag{3}$$

若存在某个 $k\in\{1,\cdots,L\}$ 使 $|B_k|=0$，则由置换阵的性质(左乘置换阵，右乘置换阵的转置不改变转移率矩阵行的和为零及主对角线元素为负数）及引理 2 知，B_k 中每行之和必为零。不妨设 $PM_{11}P^{\mathrm{T}}$ 中 B_k 对应的行为 $k_1,k_1,\cdots,k_s,(k_1<k_2<\cdots<k_s,s\geqslant 1)$，记

$$P_0=I(s,k_s+s)\cdots I(2,k_2+2)I(1,k_1+1)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P\end{bmatrix},$$

则有 $P_0QP_0^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}B_k & 0\\ * & D\end{bmatrix}$，这与 Q 不可约矛盾。故对任意 $k\in\{1,\cdots,L\}$ 有 $|B_k|\neq 0$。再由(3)式知 $|M_{11}|=|B_1||B_k|\cdots|B_L|\neq 0$。这样，就证明了 $|M_{11}|\neq 0$。

2) 对任意 $k\in\{2,\cdots,n\}$，记 $P_1=I(1,2)I(2,3)\cdots I(k-1,k)$，则由 $P_1QP_1^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}q_{kk} & *\\ * & M_{kk}\end{bmatrix}$ 及 1)的结论即知 $|M_{kk}|\neq 0$。

推论 1. 设 $Q=(q_{ij})$ 为状态空间 $E=\{1,2,\cdots,n\}$ 上不可约马氏过程 $\{Y(t)\}$的转移率矩阵，则秩 $(Q)=n-1$。

推论 2. 设 $P(t)=(p_{ij}(t))$ 为不可约马氏过程的转移概率矩阵，则极限 $\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\pi_j$ 存在且唯一地由方程组 $\pi Q=0$ 和 $\pi e=1$ 确定，其中 $\pi=(\pi_1,\cdots,\pi_n)$，$\boldsymbol{e}$ 为元素全为 1 的列向量。

定理 2. 设 Q 为状态空间 $E=\{1,2,\cdots,n\}$ 上不可约马氏过程 $\{Y(t)\}$ 的转移率矩阵，记 $P_k=\lim\limits_{t\to\infty}P\{Y(t)=k\}(k=1,2,\cdots,n)$，则

$$P_k=\frac{Q_{kk}}{\sum\limits_{k=1}^{n}Q_{kk}},\quad k=1,2,\cdots,n,$$

其中 Q_{kk} 为 Q 中第 k 行第 k 列的代数余子式。

证明．记 Q_{kj} 和 $B_{kj}(s)$ 分别为矩阵 Q 和 $sI-Q$ 中第 k 行第 j 列的代数余 子式。由 Q 的每行之和必为零的性质可推知

$$Q_{k1}=Q_{k2}=\cdots=Q_{kn},\quad k=1,\cdots,n. \tag{4}$$

$$B_{kj}(0)=(-1)^{n-1}Q_{kj},\quad k,j=1,\cdots,n. \tag{5}$$

又设 $P_k(t)=P\{Y(t)=k\}$ 及其拉氏变换为 $P_k^*(s)$，则由马氏过程的基本 理论[10]推知

$$P_k^*(s)=|sI-Q|^{-1}\sum_{i=1}^{n}P_i(0)B_{ki}(s),\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{6}$$

记 $f(s)=s|sI-Q|^{-1}$，由定理 1 易知 $s=0$ 为 $|sI-Q|=0$ 的单根，且

$$f(0)=\lim_{s\to 0}f(s)=(-1)^{n-1}[Q_{11}+\cdots+Q_{nn}]^{-1}<\infty.$$

再由(4)，(6)式及定理 1 知

$$P_k=\lim_{t\to\infty}P_k(t)=\lim_{s\to 0}\ sP_k^*(s)=\frac{Q_{kk}}{\sum\limits_{k=1}^{n}Q_{kk}},\ k=1,\cdots,n.$$

注 1. 如果能求出Q的所有特征根，则当Q的特征根互不相同时，文献[8]曾用特征根方法给出过类似的结论，但由于实际问题中特征根的计算不容易且特征根有非零重根时结论得不到保证，故文献[8]中的结论常常受到局限。本文不涉及特征根问题，并且由于实际问题中不可约性极易确定，故所得结论具有较大的理论和实际意义。

4 主要结论

考虑第二节所述生产线的运行特征。

由马氏过程的遍历性定理易知 $\lim\limits_{t\to\infty}p_{ijk}(t)$ 存在，记其为 p_{ijk}，相应地记向量 $P_k=\lim\limits_{t\to\infty}P_k(t)(k=1,\cdots,6)$，并记$A$的第$k$行第$k$列的代数余子式为 $A_k(k=1,2,\cdots,4(N+2))$，则有

定理 3. 一般两级 CIMS 生产线的稳态概率为

$$P_1=\frac{1}{a}(A_1,A_2),\qquad P_2=\frac{1}{a}(A_3,\cdots,A_{N+3}),$$

$$P_3=\frac{1}{a}(A_{N+4},\cdots,A_{2N+4}),\qquad P_4=\frac{1}{a}(A_{2N+5},\cdots,A_{3N+5}),$$

$$P_5=\frac{1}{a}(A_{3N+6},\cdots,A_{4N+6}),\qquad P_6=\frac{1}{a}(A_{4N+7},A_{4N+8}).$$

其中 $a=\sum\limits_{k=1}^{4N+8}A_k$.

证明. 对任意 $i,j\in\Omega$，易知 $i\to j$，从而由定理 2 即得上述结论。

由定理 3 及 CIMS 生产线有关运行特征的定义，有

定理 4. 当系统处于稳态运行时

1）工作站 1 的可用度 $P_{A1}=\frac{1}{a}\left[A_1+\sum\limits_{k=3}^{N+3}A_k+\sum\limits_{k=2N+5}^{3N+5}A_k+\sum\limits_{k=4N+7}^{4N+8}A_k\right]$;

2）工作站 1 的阻塞概率 $P_B=\frac{1}{a}\sum\limits_{k=4N+7}^{4N+8}A_k$;

3）工作站 1 的失效概率 $P_{F1}=1-P_{A1}$;

4）工作站 1 的失效频度

$$W_{F1}=\frac{1}{a}\left[\alpha_{10}A_1+\sum_{k=3}^{N+3}\alpha_{1k-2}A_k+\sum_{k=2N+5}^{3N+5}\alpha_{1k-2N-4}A_k\right];$$

5）工作站 1 的返工率

$$W_{t1}=\frac{1}{a}\left[q_{10}\omega_{10}A_1+\sum_{k=3}^{N+3}q_{1k-2}\omega_{1k-2}A_k+\sum_{k=2N+5}^{3N+5}q_{1k-2N-4}\omega_{1k-2N-4}A_k\right];$$

6）工作站 1 的输出率

$$W_{o1}=\frac{1}{a}\left[p_{10}\omega_{10}A_1+\sum_{k=3}^{N+3}p_{1k-2}\omega_{1k-2}A_k+\sum_{k=2N+5}^{3N+5}p_{1k-2N-4}\omega_{1k-2N-4}A_k\right].$$

证明. 利用文[9]中关于马氏可修系统中失效频度的一般公式、定理 3 和有关定义即得上述结论.

类似于定理 4 的思想，有

定理 5. 当系统处于稳态运行时

1）工作站 2 的可用度 $P_{A2}=\frac{1}{a}\left[A_1+A_2+\sum_{k=3}^{2N+4}A_k+A_{4N+8}\right]$;

2）工作站 2 的饥饿概率　$P_S=\frac{1}{a}[A_1+A_2]$;

3）工作站 2 的失效概率　$P_{F2}=1-P_{A2}$;

4）工作站 2 的失效频度

$$W_{F2}=\frac{1}{a}\left[\sum_{k=3}^{N+3}\alpha_{2k-2}A_k+\sum_{k=N+4}^{2N+4}\alpha_{2k-N-3}A_k+\alpha_{2N+2}A_{4N+8}\right];$$

5）工作站 2 的返工率

$$W_{R2}=\frac{1}{a}\left[\sum_{k=3}^{N+3}q_{2k-2}\omega_{2k-2}A_k+\sum_{k=N+4}^{2N+4}q_{2k-N-3}\omega_{2k-N-3}A_k+q_{2N+2}\omega_{2N+2}A_{4N+8}\right];$$

6）CIMS 生产线的生产率(即工作站 2 的输出率)

$$W=\frac{1}{a}\left[\sum_{k=3}^{N+3}p_{2k-2}\omega_{2k-2}A_k+\sum_{k=N+4}^{2N+4}p_{2k-N-3}\omega_{2k-N-3}A_k+p_{2N+2}\omega_{2N+2}A_{4N+8}\right];$$

7）CIMS 生产线的可用度

$$P_A=\frac{1}{a}\left[\sum_{k=3}^{2N+4}A_k+A_{4N+8}\right];$$

注 2. *a*）利用矩阵 A 的表达式及定理 2 中稳态概率的精确显式解，可得到几乎所有感兴趣的运行指标的明显表达式；*b*）当 $q_{1k},q_{2k},\alpha_{1k},\alpha_{2k},\omega_{1k},\omega_{2k},\beta_{1k},\beta_{2k}$ 都与 k 无关时，可得到文献[7]中所讨论模型的精确显式解，此时结论的表达式相对于上述要简单的多，但由于表达方式与上述无本质变化，所以不专门列出其相应的结论；*c*）由于定理 3，4，5 的结果皆由行列式确定，而行列式在计算机上极易计算，故上述结果具有较大的实用价值.

5　算例

对于给定的 N，容易编出程序计算矩阵 A 的代数余子式 $A_1,\cdots,A_{4N+8}$ 及 $A_1+\cdots+A_{4N+8}$，利用此程序可解决以下问题.

例 1. 当两站的失效率分别为 0.001 和 0.002、修复率分别为 0.02 和 0.03、生产率分别为 4 和 3、工件在各站的返工率皆为零时，1）若 $N=2$，求系统的稳态可用度及生

产率；2）若要求系统的稳态可用度不少于 89%，试设计缓冲区的容量.

解. 据题意将矩阵 A 的元素输入计算机后，得

$$
\begin{aligned}
A_1 &= -.01099221, & A_{10} &= -.00001690,\\
A_2 &= -.00351410, & A_{11} &= -.00002968,\\
A_3 &= -.01463651, & A_{12} &= -.00000091,\\
A_4 &= -0.1951002, & A_{13} &= -.00000091,\\
A_5 &= -.02602726, & A_{14} &= -.00000091,\\
A_6 &= -.00001977, & A_{15} &= -.00627394,\\
A_7 &= -.00001502, & A_{16} &= -.03474259,\\
A_8 &= -.00000862, & &\\
A_9 &= -.00000727, & a &= -.11579660.
\end{aligned}
$$

从而由定理 5 知

系统的稳态可用度 $P_A = \frac{1}{a}[A_3 + \cdots + A_8 + A_{16}] = 0.82006$,

系统的稳态生产率 $W = \frac{\omega_2}{a}[A_3 + \cdots + A_8 + A_{16}] = 2.46017$.

注 3. 文献[1]中用等效工作站方法得到的近似解 $P = 0.874718$ 和 $W = 2.161235$ 与上述的精确解基本吻合，这进一步说明了在精度要求不很高的前提下等效工作站方法是有效的.

2）由于可用度和生产率皆为 N 的增函数，类似于 1）计算，结果见表 1.

表 1

容量 N	2	3	4	5	6	7
可用度	0.82006	0.84647	0.86387	0.87579	0.88419	0.89023
生产率	2.46017	2.53941	2.59161	2.62737	2.65256	2.67069

由表 1 可知在设计缓冲区容量时，选取 $N = 7$ 即可满足条件.

例 2. 在例 1 的诸项条件中，若工件在各站的返工率分别皆为 0.1 和 0.2 时，欲使生产线的稳态生产率大于 2.19，试设计缓冲区的容量.

解. 上机计算容易得出 $N = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 时矩阵 A 中诸主对角线元素的代数余子式，从而由定理 5 可得如表 2 所示的结果.

表 2

容量 N	2	3	4	5	6	7
可用度	0.84642	0.86958	0.88392	0.89310	0.89896	0.91344
生产率	2.03140	2.08718	2.12158	2.14345	2.15751	2.19225

故选取$N=7$可使稳态生产率大于 2.19.

注 4. 由例 1 和例 2 可知，在考虑工件在工作站上的返工率后，系统的生产率有所下降，这是很直观的事实；然而系统的可用度却随之有所增加，这一点并不直观. 系统的可用度是如何随返工率不为零而发生变化，这是一般 CIMS 生产线要考虑的一个新课题，作者将另文探讨.

由于本文给出了模型的理论上的显式解，同时还给出了计算具体问题时的计算机程序，故所得成果可以直接应用到 CIMS 生产线及其它工业生产系统，如石油管道、自来水厂、水陆交通和信号传递等中.

参 考 文 献

[1] 疏松桂. 带有缓冲库的 CIMS 分析及其可靠性的研究. 自动化学报，1992,**18**(1): 15—22.

[2] 谭民. 多级 CIMS 生产线的可靠性分析. 信息与控制，1991，**20**（增刊）: 28—33.

[3] 喻明，吴澄. 级联生产线系统的可靠性建模与分析. 控制与决策，1992,**7**(4): 265—270.

[4] 伍乃骐，庄颂新，薛劲松. 考虑机器故障和有限缓冲器的级联生产线系统的建模和分析. 自动化学报，1991，**17**(4): 481—486.

[5] 潘裕焕，庄颂新. 自动生产线和柔性制造系统的建模、分析与控制. 自动化学报，1987,**13**(4): 312—318.

[6] 熊光楞. 计算机集成制造系统. 控制与决策，1990,**5**(1): 59—64.

[7] Gershwin S B and Berman O. Analysis of Transfer Lines Consisting of Two Unreliable Machines with Random Processing Times and Finite Storage Buffers. *AIIE trans.*, 1981, **13**(1): 2—11.

[8] 蒋庆琅. 随机过程原理与生命科学模型. 方积乾译. 上海翻译出版公司，1987 年.

[9] 史定华. 计算可修系统在 (0,t] 中平均失效次数的新方法. 应用数学学报，1985,**11**(1): 71—79.

[10] 曹晋华，程侃. 可靠性数学引论. 科学出版社，1986.

[11] 张德荣等. 计算方法与算法语言. 高等教育出版社，1981.

[12] 蒋正新，施国梁. 矩阵理论及其应用. 北京航空航天大学出版社. 1988.

[13] 胡迪鹤. 可数状态的马尔可夫过程论. 武汉大学出版社，1983.

[14] 伊曼纽尔. 帕尔苏. 随机过程. 邓永录，杨振明译. 高等教育出版社，1987.

THE EXPLICIT RESULTS OF A GENERALIZED REPAIRABLE CIMS TRANSFER LINES WITH TWO STATIONS

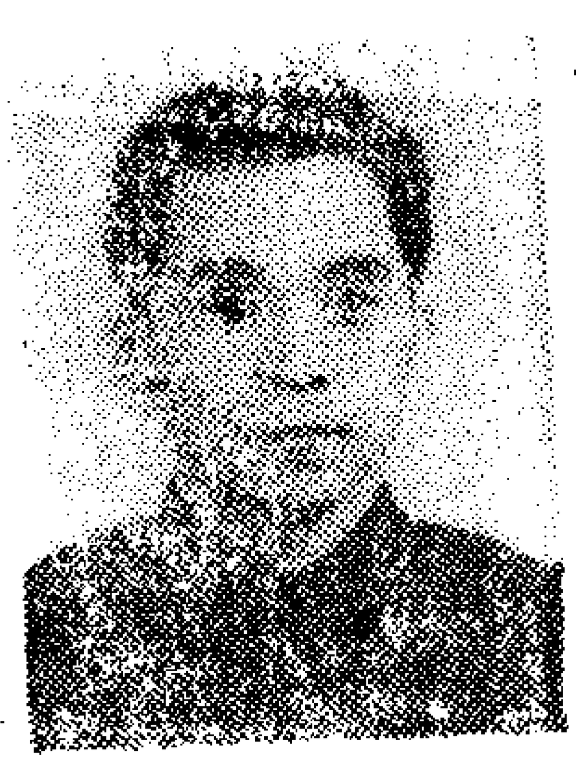
LI WEI CAO JINHUA
(*Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica Beijing* 100080)

ABSTRACT

In this paper, we discuss a kind of generalized repairable CIMS transfer lines with two stations, in which the production rates, failure rates and repairable rates of two stations, as well as the reprocessing rates ot workpieces on two stations, are all related to the capacity of the buffer between the two stations. By introducing to a new result in Markov process, we obtain some explicit indices for the transfer lines.

Key words: Computer integrated manufacturing system; reliability; stochastic service systems.

李 伟 1982年毕业于陕西师范大学数学系，1987年在河北工学院获硕士学位，现在中国科学院应用数学所攻读博士学位。主要研究兴趣为与随机运筹和随机控制有关的问题。



曹晋华 1963年毕业于中国科学技术大学应用数学系。现任应用数学所研究员、运筹学研究室主任、中国运筹学会可靠性专业学会理事长。多年来主要从事随机运筹学（可靠性、维修性、排队论、随机优化等）和应用随机过程的研究。曾获全国科技大会成果奖、中国科学院重大成果奖、中国科学院科技成果一等奖、解放军全军科技进步奖二等奖和其它部委的科技进步奖。