第 20 卷 第 4 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 20, No. 4
1994 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1994

短　文

用动态补偿器实现鲁棒对角优势

赵长安　金昌喜
(哈尔滨工业大学控制工程系　150006)

摘　　要

该文讨论了用动态补偿器实现鲁棒对角优势问题. 给出了用动态补偿器实现鲁棒对角优势的条件和求取动态补偿器的具体算法. 最后给出了一个具体算例.

关键词: 鲁棒对角优势,动态补偿器,多输入多输出系统,不确定性.

1　引言

对于多输入多输出系统 (MIMO), Rosenbrock 利用对角优势的概念创立了 INA 法. 1981 年, Doyle 和 Stein 指出,一些由 INA 法设计的 MIMO 系统,对模型不确定性很敏感. 1984 年, Arkun 等[1]推广了 INA 法,首次引入鲁棒对角优势的概念,提出了鲁棒 INA 法. 然而,文[1]没有给出鲁棒对角优势可实现条件. 目前, 关于对角优势的实现问题研究得较多[2,3], 但对鲁棒对角优势研究得尚少. 文[4]给出了鲁棒对角优势和鲁棒稳定性关系,文[5]研究了在某一点和某一频段内用常数补偿器实现鲁棒对角优势的条件. 本文研究了用动态补偿器实现鲁棒对角优势的条件及其算法.

2　鲁棒对角优势的实现

研究图 1 (a) 所示的具有加性不确定性的开环系统.

定义　对于具有不确定性的有理传递函数阵 $Q(s)=G(s)P_0(s)+G(s)\Delta P(s)=(q_{ij}(s))$, 如果满足条件

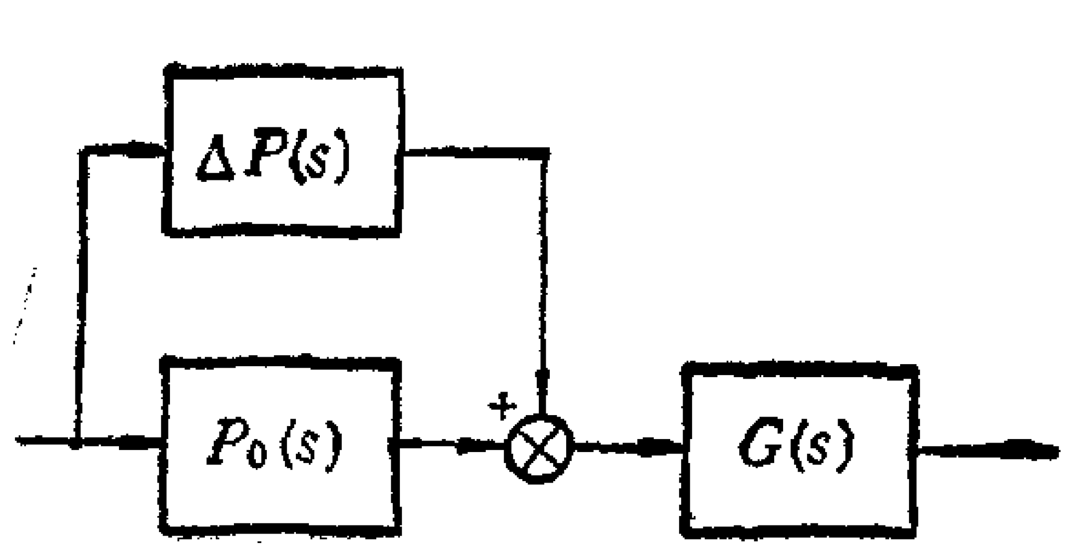

图 1(a)　具有加性不确定性的开环系统

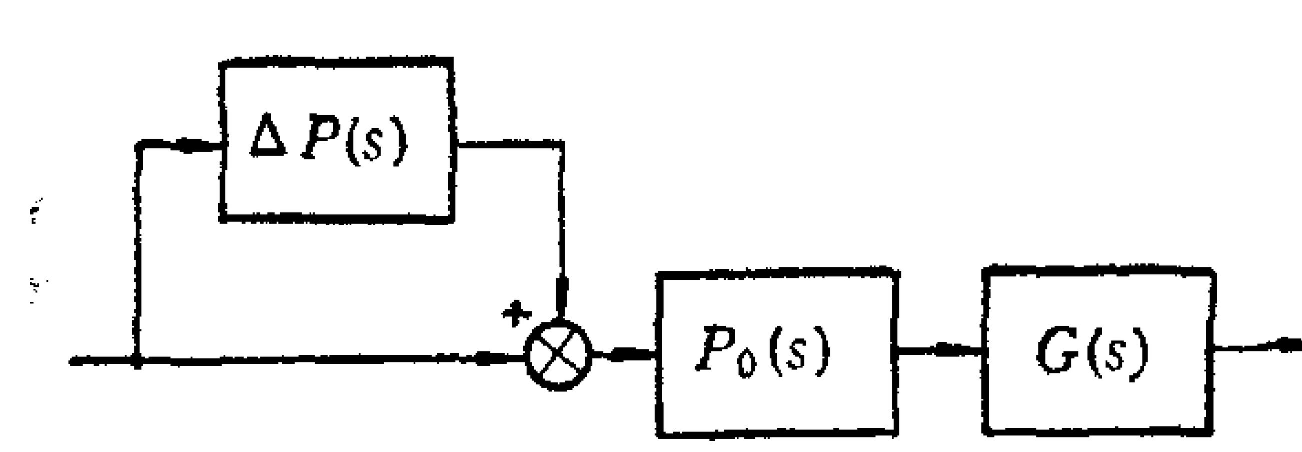

图 1(b)　具有乘性不确定性的开环系统

$$|q_{ii}(s)| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} |q_{ij}(s)|, \quad i=1,2,\cdots,m. \tag{1}$$

本文于 1992 年 10 月 15 日收到

则称 $Q(s)$ 是鲁棒对角优势的. 比值

$$J_i = \frac{\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} |q_{ij}(s)|}{|q_{ii}(s)|}, \quad i=1,2,\cdots,m. \tag{2}$$

称为对角优势度.

为推导方便,引入正交投影阵 P_j

$$P_j = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \text{第 } m+j \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$P_j \in R^{2m\times 2m}$, 且 i) $P_j = P_j^T$; ii) $P_jP_j = P_j$; iii) $\sum\limits_{j=1}^{m} P_j = I_{2m}$. 令

$$Z^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{\cdot 1} & \cdots & \boldsymbol{u}_{\cdot m} & \boldsymbol{v}_{\cdot 1} & \cdots & \boldsymbol{v}_{\cdot m} \\ -\boldsymbol{v}_{\cdot 1} & \cdots & -\boldsymbol{v}_{\cdot m} & \boldsymbol{u}_{\cdot 1} & \cdots & \boldsymbol{u}_{\cdot m} \end{bmatrix}, \quad Z_0^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{\cdot 1} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{\cdot m} & \boldsymbol{\beta}_{\cdot 1} & \cdots & \boldsymbol{\beta}_{\cdot m} \\ -\boldsymbol{\beta}_{\cdot 1} & \cdots & -\boldsymbol{\beta}_{\cdot m} & \boldsymbol{\alpha}_{\cdot 1} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_{\cdot m} \end{bmatrix},$$

$$Z_\triangle^T = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\alpha}_{\cdot 1} & \cdots & \Delta\boldsymbol{\alpha}_{\cdot m} & \Delta\boldsymbol{\beta}_{\cdot 1} & \cdots & \Delta\boldsymbol{\beta}_{\cdot m} \\ -\Delta\boldsymbol{\beta}_{\cdot 1} & \cdots & -\Delta\boldsymbol{\beta}_{\cdot m} & \Delta\boldsymbol{\alpha}_{\cdot 1} & \cdots & \Delta\boldsymbol{\alpha}_{\cdot m} \end{bmatrix}, \quad Z^T, Z_0^T, \ Z_\triangle^T \in R^{2m\times 2m}$$

其中 $\boldsymbol{u}_{\cdot j}$, $\boldsymbol{v}_{\cdot j}$ 分别为实际对象传递函数矩阵 $P(s)$ 的第 j 列 $\boldsymbol{P}_{\cdot j}$ 的实部和虚部; $\boldsymbol{\alpha}_{\cdot j}$, $\boldsymbol{\beta}_{\cdot j}$ 分别为名义对象传递函数矩阵 $P_0(s)$ 的第 j 列 $\boldsymbol{P}_{0\cdot j}$ 的实部和虚部; $\Delta\boldsymbol{\alpha}_{\cdot j}$, $\Delta\boldsymbol{\beta}_{\cdot j}$ 分别为加性不确定性传递函数矩阵 $\Delta P(s)$ 的第 j 列 $\Delta\boldsymbol{P}_{\cdot j}$ 的实部和虚部. 显然有 $Z^T = Z_0^T + Z_\triangle^T$, 记

$$\boldsymbol{K}_{i\cdot} = [\boldsymbol{\eta}_{i\cdot}, \boldsymbol{\xi}_{i\cdot}] \in R^{1\times 2m}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}_{i\cdot}, \boldsymbol{\xi}_{i\cdot}$ 分别为动态补偿器 $G(s)$ 的第 i 行 $\boldsymbol{g}_{i\cdot}$ 的实部和虚部.

引理 1[5]. 下列两个条件相互等价:

i) $|q_{ii}(s)| > \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} |q_{ij}(s)|, \quad i=1,2,\cdots,m;$

ii) $\dfrac{1}{m-1}|q_{ii}(s)|^2 > \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} |q_{ij}(s)|^2, \quad i=1,2,\cdots,m.$

引理 2[6]. 设矩阵 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 则 A 的最大奇异值 $\bar{\sigma}(A)$ 的一个下界为

$$C_l = \max\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} \|\boldsymbol{a}_{i\cdot}^T\|_2, \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|\boldsymbol{a}_{\cdot j}\|_2\}$$

这里 $\|\boldsymbol{x}\|_2$ 为向量 $\boldsymbol{x}\in C^n$ 的 Euclid 范数.

定理 1. 设实对称矩阵 $W_i = Z_0^T\left(\dfrac{m}{m-1}P_i - I_{2m}\right)Z_0$, $\Delta W_i = Z_\triangle^T\ \Big(I_{2m} -$

$\frac{m}{m-1}P_i\Big)Z_0+Z_0^T\Big(I_{2m}-\frac{m}{m-1}P_i\Big)Z_\Delta+Z_\Delta^T\Big(I_{2m}-\frac{m}{m-1}P_i\Big)Z_\Delta$，如果满足条件

$$\lambda_{\max}(\Delta W_i)<\lambda_{\max}(W_i) \tag{3}$$

则存在动态补偿器，在 $s=j\omega$ 处满足等式

$$W_i\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T=\lambda_{\max}(W_i)\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T \tag{4}$$

使系统在 $s=j\omega$ 处实现鲁棒对角优势.

证明　因为 $Q(s)=G(s)P(s)$，故

$$q_{ij}(s)=\boldsymbol{g}_{i\cdot}\boldsymbol{P}_{\cdot j}=(\boldsymbol{\eta}_{i\cdot}\boldsymbol{u}_{\cdot j}-\boldsymbol{\xi}_{i\cdot}\boldsymbol{v}_{\cdot j})+j(\boldsymbol{\eta}_{i\cdot}\boldsymbol{v}_{\cdot j}+\boldsymbol{\xi}_{i\cdot}\boldsymbol{u}_{\cdot j}) \tag{5}$$

$$|q_{ij}(s)|^2=\left\|\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_{\cdot j}^T\boldsymbol{\eta}_{i\cdot}^T-\boldsymbol{v}_{\cdot j}^T\boldsymbol{\xi}_{i\cdot}^T\\ \boldsymbol{v}_{\cdot j}^T\boldsymbol{\eta}_{i\cdot}^T+\boldsymbol{u}_{\cdot j}^T\boldsymbol{\xi}_{i\cdot}^T\end{bmatrix}\right\|_2^2=\|P_jZ\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T\|_2^2 \tag{6}$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}|q_{ij}(s)|^2=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\|P_jZ\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T\|_2^2=\boldsymbol{K}_{i\cdot}Z^T(I_{2m}-P_i)Z\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T \tag{7}$$

故

$$\frac{1}{m-1}|q_{ii}(s)|^2-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}|q_{ij}(s)|^2=\boldsymbol{K}_{i\cdot}(W_i-\Delta W_i)\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T$$
$$>[\lambda_{\max}(W_i)-\lambda_{\max}(\Delta W_i)]\|\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T\|_2^2>0 \tag{8}$$

于是，由引理 1 得证.　　证毕

该定理可用于实际系统设计. 如果在感兴趣的频段内，(3)式均成立，则由(4)式可得不同频率下的 $\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T(i=1,2,\cdots,m)$，由此可作出在所给频段内 $G(s)$ 的每个元素的 Bode 图，从而得到动态补偿器的传递函数矩阵 $G(s)$.

定理 2. 对于任意给定的传递函数阵 $R(s)=\mathrm{diag}(r_{11}(s),r_{22}(s),\cdots,r_{mm}(s))$，如果关于 $G(s)$ 的矩阵方程

$$G(s)P_0(s)=R(s) \tag{9}$$

的解存在，且存在 $\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T$，使

$$C_u^2=\frac{|r_{ii}(s)|^2}{m\|\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T\|_2^2} \tag{10}$$

取最大值，且满足条件

$$C_u>\bar{\sigma}(Z_\Delta) \tag{11}$$

则系统在 $s=j\omega$ 处可鲁棒对角优势化.

证明　因为 $R(s)=\mathrm{diag}(r_{11}(s),r_{22}(s),\cdots,r_{mm}(s))$，故

$$q_{ij}(s)=\Delta g_{ij}(s),\ q_{ii}(s)=r_{ii}(s)+\Delta g_{ii}(s),\ i,j=1,2,\cdots,m,\ 且\ i\neq j \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{m}|\Delta g_{ij}(s)|^2=\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{K}_{i\cdot}Z_\Delta^TP_jZ_\Delta\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T=\boldsymbol{K}_{i\cdot}Z_\Delta^TZ_\Delta\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T \tag{13}$$

$$\frac{1}{m}|r_{ii}(s)|^2-\sum_{j=1}^{m}|\Delta g_{ij}(s)|^2\geqslant\frac{1}{m}|r_{ii}(s)|^2-\lambda_{\max}(Z_\Delta^TZ_\Delta)\|\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T\|_2^2$$
$$=[C_u^2-\lambda_{\max}(Z_\Delta^TZ_\Delta)]\cdot\|\boldsymbol{K}_{i\cdot}\|_2^2 \tag{14}$$

故当 $C_u > \bar{\sigma}(Z_\Delta)$ 时，$\frac{1}{m}|r_{ii}(s)|^2 - \sum_{j=1}^{m}|\Delta g_{ij}(s)|^2 > 0$. 由引理 1 及(12)式，易知定理成立. 证毕

关于矩阵方程(9)的解存在的充要条件及具体算法可参见[7]. 下面给出 $\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T$ 的一种求法.

$$\boldsymbol{g}_{i\cdot}\boldsymbol{P}_{0\cdot j} = (\boldsymbol{\alpha}_{\cdot j}^T\boldsymbol{\eta}_{i\cdot}^T - \boldsymbol{\beta}_{\cdot j}^T\boldsymbol{\xi}_{i\cdot}^T) + j(\boldsymbol{\beta}_{\cdot j}^T\boldsymbol{\eta}_{i\cdot}^T + \boldsymbol{\alpha}_{\cdot j}^T\boldsymbol{\xi}_{i\cdot}^T), \quad j = 1,2,\cdots,m \tag{15}$$

由(9)式，有

$$\boldsymbol{\alpha}_{\cdot j}^T\boldsymbol{\eta}_{i\cdot}^T - \boldsymbol{\beta}_{\cdot j}^T\boldsymbol{\xi}_{i\cdot}^T = 0, \quad \boldsymbol{\beta}_{\cdot j}^T\boldsymbol{\eta}_{i\cdot}^T + \boldsymbol{\alpha}_{\cdot j}^T\boldsymbol{\xi}_{i\cdot}^T = 0, \quad j = 1,2,\cdots,m \text{ 且 } j \neq i \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{\cdot i}^T\boldsymbol{\eta}_{i\cdot}^T - \boldsymbol{\beta}_{\cdot i}^T\boldsymbol{\xi}_{i\cdot}^T = R_e r_{ii}(s), \quad \boldsymbol{\beta}_{\cdot i}^T\boldsymbol{\eta}_{i\cdot}^T + \boldsymbol{\alpha}_{\cdot i}^T\boldsymbol{\xi}_{i\cdot}^T = I_m r_{ii}(s) \tag{17}$$

写成矩阵形式

$$Z_0\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T = \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R_e r_{ii}(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_m r_{ii}(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \text{第 } m+i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \tag{18}$$

由线性方程组(18)求得 $\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T$ 的解集，再从中寻优求取使 C_u^2 取最大值的 $\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T$ 即为所求. 事实上，在实际计算中，只须找出满足下式的 $\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T$ 即可.

$$\frac{1}{m}|r_{ii}(s)|^2 > \lambda_{\max}(Z_\Delta^T Z_\Delta)\|\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T\|_2^2 \tag{19}$$

注 1 由(18)式可得 $\|Z_0\boldsymbol{K}_{i\cdot}^T\|_2^2 = |r_{ii}(s)|$，因此，如果定理 2 中的条件改为

$$\frac{1}{m}Z_0^T Z_0 > Z_\Delta^T Z_\Delta \tag{20}$$

则开环系统也可实现鲁棒对角优势. 事实上，如果(20)式成立，则对任意动态补偿器解耦系统均能保证鲁棒对角优势，亦即对这类系统，解耦控制是可靠的.

注 2 如果对象不确定性为图 1(b) 所示的乘性不确定性，则易证：如果满足条件

$$\|\boldsymbol{\Delta P}_{j\cdot}^T\|_2^2 < \frac{1}{m}, \quad j = 1,2,\cdots,m \tag{21}$$

那么系统在 $s = j\omega$ 处可鲁棒对角优势化. 由引理 2，条件(21)可进一步加强为

$$\bar{\sigma}^2(\Delta P(s)) < \frac{1}{m} \tag{22}$$

3 算例

设对象的名义传递函数阵及其乘性不确定性的传递函数阵分别为

$$P_0(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+0.5} & -\dfrac{2}{s+2}\\[2mm] -\dfrac{1}{2s+1} & \dfrac{5}{s+2}\end{bmatrix},\quad \Delta P(s)=\varepsilon\begin{bmatrix}\dfrac{0.5}{s+20} & -\dfrac{2}{s+20}\\[2mm] -\dfrac{5}{s+50} & \dfrac{10}{s+50}\end{bmatrix}$$

其中 ε 为摄动参数，$\varepsilon\in[-3,3]$。由定理 2 及注 2，经计算可知解耦控制对该系统是可靠的。又 $\det P_0(s)\neq 0$，故矩阵方程(9)的解存在且唯一。取

$$R(s)=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{s+2},\ \frac{1}{s+0.5}\right),$$

求解矩阵方程(9)，得

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{10(s+0.5)}{s+2} & \dfrac{4(s+0.5)}{s+2}\\[2mm] \dfrac{0.5(s+2)}{s+0.5} & \dfrac{s+2}{s+0.5}\end{bmatrix},$$

$$Q(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{2(s+20+\varepsilon)}{(s+2)(s+20)} & \dfrac{2\varepsilon}{(s+2)(s+20)}\\[2mm] \dfrac{-5\varepsilon}{(s+0.5)(s+50)} & \dfrac{s+50+10\varepsilon}{(s+0.5)(s+50)}\end{bmatrix}$$

$Q(s)$ 的对角优势度曲线如图 2 所示。

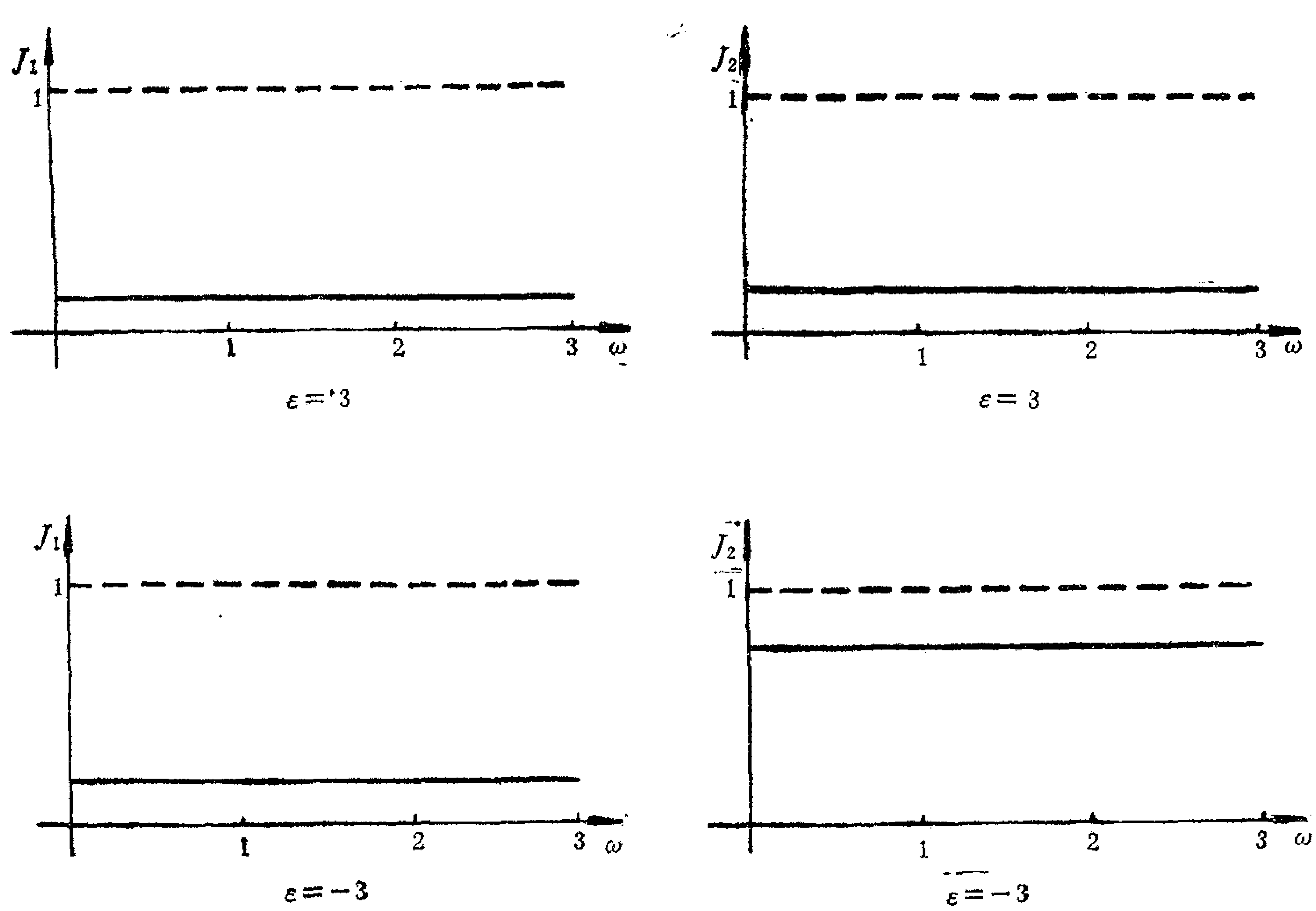

图 2　$\varepsilon=\pm 3$ 时的对角优势度曲线

4　结束语

本文研究了用动态补偿器实现鲁棒对角优势的问题。定理1、2所给均为充分条件，具

有一定的保守性，其保守程度如何，有待于进一步研究。

参 考 文 献

[1] Arkun Y, Manousiouthakis B and Putz P. Robust Nyquist Array Methodology: A New Theoretical Framework for Analysis and Design of Robust Multivariable Feedback System. *Int. J. Control*, 1984, **40**(4): 603—629.
[2] 江青茵. 对角优势的常数阵实现. 控制理论与应用，1988,**5**(1): 84—89.
[3] 李元春，吴瑶华，杨涤. 利用常数补偿器实现对角优势的二步法. 哈尔滨工业大学学报，1991,(1): 50—56.
[4] 庞国仲，陈振跃. 鲁棒稳定性和鲁棒对角优势的关系. 自动化学报，1992,**18**(3): 273—280.
[5] 李元春，吴瑶华，杨涤. 利用常数补偿器实现鲁棒对角优势. 控制理论与应用，1992,**9**(1): 74—77.
[6] Qi L. Some Simple Estimate for singular Values of a Matrix. Linear Algebra. Appl., 1984, **56**:105—119.
[7] Wang S H and Davison E J. Design of Minimal-Order Controllers for Exact Model Matching. 6th Annu. Princeton Conf. Information Science and Systems. Princeton, N. J. March 1992.

REALIZATION OF ROBUST DIAGONAL DOMINANCE BY DYNAMIC COMPENSATOR

ZHAO CHANG'AN JIN CHANGXI
(*Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin*, 150006)

ABSTRACT

In this paper, the realization of robust diagonal dominance by dynamic compensator is investigated. The condition for the realization of robust diagonal dominance by using a dynamic compensator and the algorithm for such dynamic compensator are presented. An example for illustration is given.

Key words: robust diagonal dominance; dynamic compensator; multiinput multioutput system; uncertainty.