第20卷 第4期　　自 动 化 学 报　　Vol. 20, No. 4
1994 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1994

短 文

求一类 H^∞ 控制最优值的非迭代算法[1)]

杨 富 文
（福州大学电气工程系　福州　350002）

摘　　要

本文讨论了一类 H^∞ 最优控制问题，并给出了求 H^∞ 控制最优值的非迭代算法，最后通过一个简单例子说明非迭代算法的计算过程.

关键词: H^∞ 最优控制，代数 Riccati 方程，最优值，非迭代算法.

1　引言

求 H^∞ 控制最优值通常采用 γ 迭代算法[1,2]. 而近几年人们试图寻找求 H^∞ 控制最优值的非迭代算法，对某些特定的问题，如鲁棒控制和混合灵敏度问题，目前已有一些求解方法[3-5]. 本文是从一般情况 H^∞ 控制问题的两个代数 Riccati 方程出发，给出了求一类 H^∞ 控制最优值的非迭代计算方法. 这种方法可以直接由系统参数求最优值，不必通过 γ 迭代，非常简单.

2　H^∞ 最优控制问题的求解

具有标准补偿结构的反馈控制系统如图 1 所示. 图中 P 为广义对象，K 为控制器，$\boldsymbol{w} \in R^{m_1}$ 为干扰向量，$\boldsymbol{u} \in R^{m_2}$ 为控制输入向量，$\boldsymbol{z} \in R^{p_1}$ 为误差向量，$y \in R^{p_2}$ 为输出向量，$m_1 \geqslant p_2, p_1 \geqslant m_2$. 已知

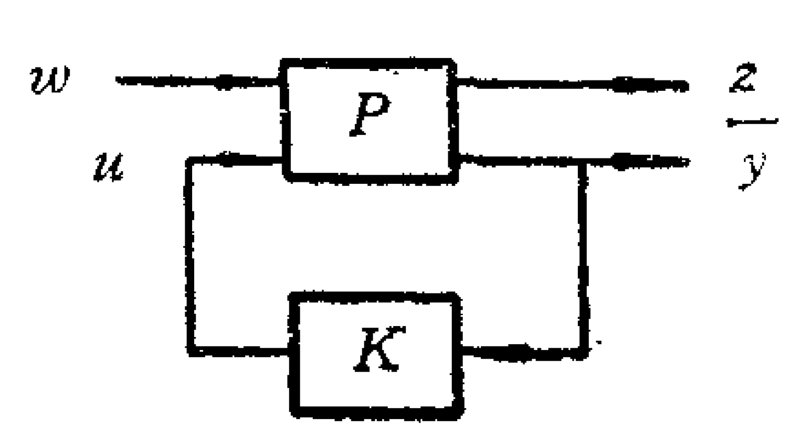

图 1　具有标准补偿结构

$$P = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} [B_1 B_2] \in R^{(p_1+p_2)\times(m_1+m_2)}. \tag{2.1}$$

现作下列假设：

假设 1. (A, B_2, C_2) 可稳可检测.

假设 2. 对所有 ω 有 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} j\omega I - A & -B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m_2$,

---

1) 福建省自然科学基金资助.
本文于 1992 年 5 月 19 日收到

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} j\omega I - A & -B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_2.$$

假设 3. $D_{22}=0$，$D_{11}=0$.

假设 4. $[D_{12}D_{12}^{\perp}]$ 和 $[D_{21}^T\ \ D_{21}^{\perp T}]$ 都是正交矩阵，其中 $D_{12}^{\perp}$、$D_{21}^{\perp}$ 分别为 D_{12}、D_{21} 的正交补.

假设 5. $D_{12}^T[C_1\quad D_{12}]=[0\quad I]$，$\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21}\end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$.

则有下列定理成立：

定理 2.1 若系统 (2.1) 满足假设 1—5，则存在内稳控制器 $K(s)$ 使得 $\|P_{11}+P_{12}K(I-P_{22}K)^{-1}P_{21}\|_\infty \leqslant \gamma$ 的充要条件是

(i) 存在 $X_\infty \geqslant 0$，$Y_\infty \geqslant 0$ 满足下列代数 Riccati 方程：

$$A^TX_\infty + X_\infty A + X_\infty(\gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T)X_\infty + C_1^TC_1 = 0, \tag{2.2}$$

$$AY_\infty + Y_\infty A^T + Y_\infty(\gamma^{-2}C_1^TC_1 - C_2^TC_2)Y_\infty + B_1B_1^T = 0. \tag{2.3}$$

(ii) $\lambda_{\max}(Y_\infty X_\infty) \leqslant \gamma^2$.

证明. 根据假设 3—5，由文献[5]中定理 2.1 即得.

从上述定理可以看出：X_∞ 和 Y_∞ 都是 γ 的函数，为了求最优值 γ_0，必须通过反复迭代（γ-迭代）求得满足 $X_\infty(\gamma)\geqslant 0$，$Y_\infty(\gamma)\geqslant 0$ 和 $\gamma^2 \geqslant \lambda_{\max}(Y_\infty X_\infty)$ 的最小 γ 值，计算相当麻烦. 下节将介绍一种非迭代计算方法.

3 一类 H^∞ 控制最优值 γ_0 的求解

假设 $C_1=0$（这种情况在某些 H^∞ 最优控制问题中是存在的[1)]），则式(2.2)和(2.3)可以写成：

$$A^TX_\infty + X_\infty A + X_\infty(\gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T)X_\infty = 0, \tag{3.1}$$

$$AY_\infty + Y_\infty A^T - Y_\infty C_2^TC_2Y_\infty + B_1B_1^T = 0. \tag{3.2}$$

引理 3.1[6]. 对于代数 Riccati 方程

$$A^TX + XA - XBB^TX = 0,$$

其可稳解 X 的秩等于 A 的不稳定特征值的个数，且存在一个正交阵 U 使得

$$U^TAU = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix},\quad U^TXU = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix},$$

其中 A_1 为完全稳定，A_3 为完全不稳定，X_2 为满秩.

引理 3.2[2)]. 假设 $P\in R^{n\times n}>0$，$Q\in R^{n\times n}\geqslant 0$，若 $\gamma^2P-Q\geqslant 0$，则 $\gamma^2 \geqslant \lambda_{\max}(P^{-1}Q)$.

下面来讨论最优值 γ_0 的求解，因式(3.2)与 γ 无关，故 Y_∞ 可由系统的参数直接求出. 对式(3.1)下面分三种情况进行讨论：

由引理 3.1 可知，$\operatorname{rank}X_\infty = A$ 的不稳定特征值个数，故有

1) A 为完全稳定，则 $X_\infty=0$.

---

1),2) 杨富文，H^∞ 优化设计理论及应用研究，华中理工大学博士学位论文，1990.

2）A为完全不稳定，则 $X_\infty > 0$，故有

$$X_\infty^{-1}A^T + AX_\infty^{-1} + \gamma^{-2}B_1B_1^T - B_2B_2^T = 0, \tag{3.3}$$

令

$$AP + PA^T = B_2B_2^T, \tag{3.4}$$

$$AQ + QA^T = B_1B_1^T, \tag{3.5}$$

综合并比较式(3.3)、(3.4)和(3.5)，则有

$$X_\infty^{-1} = P - \gamma^{-2}Q,$$

即

$$X_\infty = \gamma^2(\gamma^2P - Q)^{-1}.$$

3）A为部分稳定，则存在一个正交阵 $U = [U_1U_2]$ 使得

$$U^TAU = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad U^TX_\infty U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

式中 A_{11} 完全稳定，A_{22} 完全不稳定，$X > 0$. 将式(3.1)左乘 U^T，右乘U得到

$$A_{22}X^{-1} + X^{-1}A_{22}^T + \gamma^{-2}U_2^TB_1B_1^TU_2 - U_2^TB_2B_2^TU_2 = 0. \tag{3.7}$$

令

$$A_{22}P + PA_{22}^T = U_2^TB_2B_2^TU_2, \tag{3.8}$$

$$A_{22}Q + QA_{22}^T = U_2^TB_1B_1^TU_2. \tag{3.9}$$

综合并比较式(3.7)、(3.8)和(3.9)，则得

$$X^{-1} = P - \gamma^{-2}Q,$$

即

$$X = \gamma^2(\gamma^2P - Q)^{-1}.$$

由式(3.6)可得

$$X_\infty = U\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}U^T = U_2\gamma^2(\gamma^2P - Q)^{-1}U_2^T.$$

上面给出了两个代数 Riccati 方程的解，除此以外，定理 2.1 要求 $\gamma^2 \geqslant \lambda_{\max}(Y_\infty X_\infty)$，根据这个条件，最优值定义为 $\gamma_0 = \lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}(Y_\infty X_\infty)$.

下面同样分三种情况讨论最优值 γ_0 的计算.

1° A完全稳定时，$X_\infty = 0$，则 $\gamma_0 = 0$.

2° A完全不稳定时，$X_\infty = \gamma^2(\gamma^2P - Q)^{-1}$，式中 P、Q满足式(3.4)和(3.5)，因此 $\gamma^2 \geqslant \lambda_{\max}[Y_\infty\gamma^2(\gamma^2P - Q)^{-1}]$，则有

$$\gamma^2I \geqslant Y^\infty\gamma^2(\gamma^2P - Q)^{-1},$$

即

$$\gamma^2P \geqslant Y_\infty + Q.$$

注意到(A, B_2)可稳，故P正定，根据引理 3.2 有

$$\gamma^2 \geqslant \lambda_{\max}[P^{-1}(Y_\infty + Q)],$$

故

$$\gamma_0 = \{\lambda_{\max}[P^{-1}(Y_\infty + Q)]\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.10}$$

3° A部分稳定时，$X_\infty = U_2\gamma^2(\gamma^2P - Q)^{-1}U_2^T$，式中 P、Q满足式(3.8)和(3.9)，因此

$$\gamma^2 \geqslant \lambda_{\max}[Y_\infty U_2\gamma^2(\gamma^2P - Q)^{-1}U_2^T],$$
$$= \lambda_{\max}[U_2^TY_\infty U_2\gamma^2(\gamma^2P - Q)^{-1}],$$

则有

$$\gamma^2 I \geqslant U_2^TY_\infty U_2\gamma^2(\gamma^2P - Q)^{-1},$$

即

$$\gamma^2P \geqslant U_2^TY_\infty U_2 + Q.$$

注意到 (A,B_2) 可稳，故 P 正定，由引理 3.2 有

$$\gamma^2 \geqslant \lambda_{\max}[P^{-1}(U_2^TY_\infty U_2 + Q)],$$

故

$$\gamma_0 = \{\lambda_{\max}[P^{-1}(U_2^TY_\infty U_2 + Q)]\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.11}$$

上面给出了一类 H^∞ 控制最优值 γ_0 的求解方法，这个最优值 γ_0 可以直接由系统参数获得，不需要通过 γ 迭代，从而简化了计算。

4 算例

考虑下述系统

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},\quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix},\quad C_1 = 0,\quad C_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = 0,\quad D_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad D_{22} = 0.$$

可以验证上述系统满足假设 1—5，且 $C_1 = 0$，因此 Y_∞ 满足式(3.2)，可求得

$$Y_\infty = \begin{bmatrix} .4756491 & -4.766803E-02 & -.2948831 \\ -4.766908E-02 & .2299621 & .3357925 \\ -.2948845 & .3357912 & .7703714 \end{bmatrix}.$$

因 A 是完全不稳定，故由式(3.4)和(3.5)可求得

$$P = \begin{bmatrix} 20.48334 & -5.964583 & 3.679167 \\ -5.964583 & 3.18125 & -.5395833 \\ 3.679167 & -.5395833 & 1.85 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 6.145833E-02 & -9.505208E-03 & -7.03125E-03 \\ -9.505208E-03 & 2.213541E-03 & 1.432292E-03 \\ -7.03125E-03 & 1.432292E-03 & 1.041667E-03 \end{bmatrix}$$

又根据式(3.10),求得最优值 γ_0 为

$$\gamma_0 = 0.893493.$$

参 考 文 献

[1] Francis B A. A Course in H^∞ control theory. Lecture notes in control and information sciences. Vol. 88, Springer Verlag, 1987.

[2] Doyle J C, Glover K, Khargonegar P and Francis B A. State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problem *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1989, **34**: 831—847.

[3] Jonckheere E J and Juang J C. Fast computation of achievable feedback performance in mixed sensitivity H^∞ design. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1987, **32**: 896—907.

[4] Glover K and Mcfarlane D. Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions with H_∞-bounded uncertainty. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1989, **34**: 821—828.

[5] Kasenally E M and Limebeer D J N. Closed formulae for a parametric mixed sensitivity problem. *Systems Control Lett.* 1989, **12**: 1—7.

[6] Postlethwaite I Gu D W and O'Young S D., Some computational results on size reduction in H^∞ design. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1988, **33**: 177—185.

A NON-ITERATIVE ALGORITHM FOR SOLVING H^∞ CONTROL OPTIMAL VALUE

YANG FUWEN

(Department of Electric Engineering Fuzhou University Fuzhou 350002)

ABSTRACT

This paper discusses an H^∞ optimal control problem, and gives a non-iterative algorithm for solving H^∞ control optimal value. An example is given to illustrate the computing procedure of the non-iterative algorithm.

Key words: H^∞ optimal control, algebraic Riccati equation, optimal value, non-iterative algorithm.