第20卷 第5期 自动化学报 Vol. 20, No. 5
1994年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1994

短 文

时滞不确定系统的鲁棒性分析

田连江
（石油大学自动化研究室 北京 100083）

高为炳 程勉
（北京航空航天大学第七研究室 100083）

摘 要

此文利用解的估计方法和比较定理，研究了线性时滞不确定系统的鲁棒性问题，得到了用状态反馈来镇定这类系统的充分条件，并给出了此类系统具有任意希望的鲁棒性条件.

关键词：鲁棒性，镇定，不确定系统.

1 引言

鲁棒控制是实际过程控制中经常遇到的问题，也越来越引起人们的广泛重视和浓厚兴趣. 时滞不确定系统是更接近于实际的系统. 近年来，对该类系统的研究已有一些较好的结果[1,2]. 一般的研究方法是基于解的估计方法，应用不等式技巧，求得一个充分条件. 本文在这方面求得了较少保守的条件.

2 系统的描述

研究系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[A+\Delta A(t)]\boldsymbol{x}(t)+[B+\Delta B(t)]\cdot\boldsymbol{x}(t-h)+C\boldsymbol{u}(t), \tag{Σ}$$

这里 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 是状态变量，$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 是控制变量，$h>0$ 是常数时滞. A、$B\in R^{n\times n}$，$C\in R^{n\times m}$ 为常阵. $\Delta A(t)$、$\Delta B(t)$ 是时变的不确定项. 且有

$\|\Delta A(t)\|\leqslant a$，$\|\Delta B(t)\|\leqslant b$，$a,b$ 皆为正常数. 本文要解决的问题如下：

1）a,b 应满足什么条件，可用状态反馈

$$\boldsymbol{u}(t)=E\boldsymbol{x}(t)+F\boldsymbol{x}(t-h) \tag{1}$$

来镇定系统（Σ），其中 E,F 是待定的适当维数的常阵.

本文于1992年10月9日收到

2) A、B、C 满足什么条件时，系统(Σ)是可镇定的，且有要求的鲁棒性质.

经状态反馈(1)后，闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[\bar{A}+\Delta A(t)]\boldsymbol{x}(t)+[\bar{B}+\Delta B(t)]\cdot\boldsymbol{x}(t-h), \tag{Σ'}$$

其中 $\bar{A}=A+CE$. $\bar{B}=B+CF$，以下同.

3 主要结果

定理 1. 对系统 (Σ)，若存在适当的 E,F 和常数 $\tau>0$，使得下式成立：

$$\mu(A+CE)+\|B+CF\|\cdot\exp(h\tau)+\tau+a+b\exp(h\tau)<0,$$

则系统 (Σ) 可以用状态反馈(1)来镇定，且系统具有指数衰减度 τ，即存在 $K>0$，使

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|<K\exp(-\tau t).$$

引理[3]**.** 系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{x}(t-h)$ 若满足

$$\mu(A)+\|B\|\exp(h\tau)+\tau<0,$$

则系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{x}(t-h)$ 是稳定的，且系统的解具有指数衰减度 τ.

定理 1 的证明. 根据以上引理，只须有

$$\mu(A+CE+\Delta A)+I+\|B+CF+\Delta B\|\exp(h\tau)<0,$$

只须

$$\begin{aligned}&\mu(A+CE+\Delta A)+\tau+\|B+CF+\Delta B\|\exp(h\tau)\\ &\leqslant\mu(A+CE)+\|\Delta A\|+[\|B+CF\|+\|\Delta B\|]\exp(h\tau)+\tau\\ &\leqslant\mu(A+CE)+\|B+CF\|\exp(\tau h)+a+b\exp(h\tau)+\tau\\ &<0,\text{对适当的 } E,F.\end{aligned}$$

证毕.

下面利用系统的可控性研究系统(Σ)的鲁棒镇定性.

经状态反馈(1)后，有

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=(\bar{A}+\Delta A(t)]\boldsymbol{x}(t)+[\bar{B}+\Delta B(t)]\boldsymbol{x}(t-h)\\ &=[A+\bar{B}N+CE]\boldsymbol{x}(t)-\bar{B}N[\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-h)]\\ &\quad+\bar{B}(I-N)\cdot\boldsymbol{x}(t-h)+\Delta A(t)\boldsymbol{x}(t)+\Delta B\boldsymbol{x}(t-h),\end{aligned} \tag{2}$$

其中N是适当维数的待定常阵.

设对系统(Σ)存在矩阵N和F使得 $[A+\bar{B}N,C]$ 是可控对. 这个假设当 $[A,C]$是可控对时，显然是满足的，但要 $[A+\bar{B}N,C]$ 是可控对，并不必要 $[A、C]$ 可控或 B 是 C 的列的线性组合.

在此假设下，存在反馈阵 E 使得

$$|sI-A-\bar{B}N-CE|=0$$

的根可任置. 因此，对于任意给定的 $\beta>0$，存在 E，使得

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\exp\{(A+CE+\bar{B}N)t\},$$

$\|\boldsymbol{\Phi}(t)\|\leqslant K\cdot\exp(-\beta t)$，对某些 $K\geqslant1$.

将(2)式两边积分有

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\Phi(t-\tau)\cdot[(\bar{B}-BN+\Delta B)\boldsymbol{x}(t-h)+\Delta A\boldsymbol{x}(\tau)]\mathrm{d}\tau$$

$$-\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\bar{B}N\int_{\tau-h}^{\tau}\{[A+CE+\Delta A]\boldsymbol{x}(s)+[\bar{B}+\Delta B]$$
$$\cdot \boldsymbol{x}(s-h)\}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau.$$

取范数有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) \leqslant\ & K\mathrm{e}^{-\beta t}\cdot\|\boldsymbol{x}(0)\|+K\cdot\int_0^t \mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)}\cdot\{\|\bar{B}N\|\cdot\int_{\tau-h}^{\tau}[\|\bar{A}+\Delta A\|+\|\bar{B}+\Delta B\|\\ &\cdot\|\boldsymbol{x}(s-h)\|]\mathrm{d}s+\|\bar{B}-\bar{B}N+\Delta B\|\cdot\|\boldsymbol{x}(t-h)\|\\ &+\|\Delta A\|\cdot\|\boldsymbol{x}(\tau)\|\}\mathrm{d}\tau\\ \leqslant\ & K\mathrm{e}^{-\beta t}\cdot\|\boldsymbol{x}(0)\|+K\int_0^t \mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)}\cdot\Big\{\|\bar{B}N\|\cdot\int_{\tau-h}^{\tau}[(\|\bar{A}\|+a)\cdot\|\boldsymbol{x}(s)\|\\ &+(\|\bar{B}\|+b)\cdot\|\boldsymbol{x}(s-h)\|]\mathrm{d}s+[\|\bar{B}-\bar{B}N+b]\cdot\|\boldsymbol{x}(\tau-h)\|\\ &+a\cdot\|\boldsymbol{x}(\tau)\|\Big\}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

对任意给定的 $\alpha>0$,定义非负不增函数

$$V(t)=\begin{cases}K\cdot\|\boldsymbol{x}_0\|\exp(-\alpha t), & t\geqslant 0\text{ 时},\\ K\|\boldsymbol{x}_0\|, & t<0\text{ 时}.\end{cases}$$

这里 $\boldsymbol{x}_0=\sup\limits_{-2h<s\leqslant 0}\|\boldsymbol{x}(s)\|$;则有

$$\begin{aligned}&\|\bar{B}N\|\cdot\int_{\tau-h}^{\tau}[(\|\bar{A}\|+a)V(s)+(\|\bar{B}\|+b)V_{(s-h)}]\mathrm{d}s\\ &\quad+[\|\bar{B}-\bar{B}N\|+b]\cdot V(\tau-h)+aV(\tau)\\ &\leqslant\|\bar{B}N\|\cdot\int_{\tau-h}^{\tau}[(\|\bar{A}\|+a)V(\tau-h)+(\|\bar{B}\|+b)V(\tau-2h)]\mathrm{d}s\\ &\quad+(\|\bar{B}-\bar{B}N\|+b)V(\tau-h)+aV(\tau-h)\\ &\leqslant\{h\cdot\|\bar{B}N\|\cdot(\|\bar{A}\|+a)+h\|\bar{B}N\|\cdot(\|\bar{B}\|+b)\exp(\alpha h)\\ &\quad+\|\bar{B}-\bar{B}N\|+a+b\}\cdot\exp(\alpha h)V(\tau).\end{aligned}$$

定义
$$\begin{aligned}T\triangleq\{&h\|\bar{B}N\|\cdot(\|\bar{A}\|+a)+h\|\bar{B}N\|\cdot(\|\bar{B}\|+b)\exp(\alpha h)\\ &+\|\bar{B}-\bar{B}N\|+a+b\}\cdot\exp(\alpha h).\end{aligned}$$

从 $V(t)$ 的定义和以上式子得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}+\beta V(t)-K\cdot\|\bar{B}N\|\cdot\int_{t-h}^{t}[(\|\bar{A}\|+a)V(\tau)+(\|\bar{B}\|+b)V(\tau-h)\}\mathrm{d}\tau\\ &\quad-K(\|\bar{B}-\bar{B}N\|+b)\cdot V(t-h)+KaV(t)\\ &\geqslant(\beta-\alpha-KT)\cdot V(\tau).\end{aligned}$$

假设 $\beta-\alpha-KT>0$,利用比较定理[4]将上式积分有

$$\begin{aligned}V(t)\geqslant\ & K\exp(-\beta t)\cdot\|\boldsymbol{x}_0\|+K\cdot\int_0^t\exp[-\beta(t-\tau)]\cdot\\ &\Big\{\|\bar{B}N\|\cdot\int_{\tau-h}^{\tau}[(\|\bar{A}\|+a)V(s)+(\|\bar{B}\|+b)\cdot V(s-h)]\mathrm{d}s\\ &+aV(\tau)+(\|\bar{B}-\bar{B}N\|+b)\cdot V(\tau-h)\Big\}\mathrm{d}\tau,\quad t\geqslant 0,\end{aligned}$$

这里 $\|\boldsymbol{x}_0\|>0$.

设 $y(t)\triangleq V(t)-\|\boldsymbol{x}(t)\|$,则 $y(t)\geqslant 0,\forall t\in[-2h,0]$.

由 $V(t)$ 的定义和 $t>0$ 有

$$y(t)>K\cdot\int_0^t \exp[-\beta(t-\tau)]\cdot\left\{\|\bar{B}N\|\cdot\int_{\tau-h}^{\tau}[(\|\bar{A}\|+a)y(s)\right.$$
$$\left.+(\|\bar{B}\|+b)y(s-h)]\mathrm{d}s+\|\bar{B}-\bar{B}N\|+a+b\right\}\mathrm{d}\tau.$$

易证 $y(t)\geqslant 0,\forall t>0$. 证明过程类似于文献[1],在此从略.
因此,有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant K\cdot\|\boldsymbol{x}_0\|\cdot\exp(-\alpha t),$$

综上所述,有

定理 2. 对系统($\sum$),若存在适当的矩阵 N、E、F 和常数 $\alpha,\beta>0$,使得以下条件成立

1）存在N使得 $(A+\bar{B}N,C)$ 是可控对.

2）$\beta-\alpha-KT>0$.

这里的β由 $\|\exp[(A+\bar{B}N+CE)t]\|<K\cdot\exp(-\beta t)$ 决定,则系统 ($\sum$) 是可用状态反馈 $u(t)=Ex(t)+Fx(t-h)$ 镇定的,且瞬时具有指数衰减度 α,即

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant K\cdot\|\boldsymbol{x}_0\|\cdot\exp(-\alpha t),\ \forall t\geqslant 0,$$

也就是说系统是指数稳定的.

根据定理 2 的推导过程,可以归纳出以下的设计步骤:

a）首先选择 N,E、F 使得 $(A+\bar{B}N,C)$ 是可控对,尽可能使β大些,T小些.

b）选择要达到的 $\alpha>0$,使得 $\beta-\alpha-KT>0$ 即可. 对于定理 2,特别地当 (A,C)是可控对时,$N=0$,$T=[\|\bar{B}\|+a+b]\exp(\alpha h)$.

推论 1. 若 (A,C) 是可控的,并且存在适当的常阵 E、F 和常数 α、$\beta>0$,使得

$$\beta>\alpha+K[a+b+\|B+CF\|]\exp(\alpha h),$$

这里的β由 $\|\exp[(A+CE)t]\|<K\cdot\exp(-\beta t)$ 决定,
则系统($\sum$)是可以镇定的,且瞬态值满足

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant K\cdot\|\boldsymbol{x}_0\|\exp(-\alpha t),\ \forall t\geqslant 0.$$

4 例题

例. 研究系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\Delta A(t)\boldsymbol{x}(t)+\left[\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\Delta B(t)\right]\boldsymbol{x}(t-h)+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t),$$

这里摄动 $\|\Delta A(t)\|\leqslant 0.02$,$\|\Delta B(t)\|\leqslant 0.01$,时滞 $h=0.05$.

由于 $A=0$,显然 (A,C) 不可控. 选 $N=I,F=0$ 易验证 $(A+\bar{B}N,C)$ 是可控的,选E使 $(A+\bar{B}N+CE)$的特征根为-3和-4,因此 $B=3,(\lambda-3)(\lambda-4)=\lambda^2-7\lambda+12$.

通过计算可选 $E=[7,-12]$,$K=1,\alpha=1$,则

$$T=\{h\cdot\|B\|\cdot(\|CE\|+a)+h\|B\|\cdot(\|B\|+b)\mathrm{e}^{0.05}+a+b\}\cdot\mathrm{e}^{0.05}$$
$$=(0.631+0.0505\cdot\mathrm{e}^{0.05})\cdot\mathrm{e}^{0.05}<1.5,$$

有 $\beta-\alpha-KT>0$

由定理 2 知，该不确定系统是可以镇定的，且闭环系统是指数稳定的，具有衰减度 1.

参 考 文 献

[1] Thowsen A. Stabilization of a Class of Linear Time-delay Systems. *Int. J. Control.* 1981, **12**(12): 1485—1492.

[2] Barmish B R and Shi Z. Robust Stability of Purturbed Systems with Time Delays. *Automatica.* 1989, **25**(3): 371—381.

[3] Mori T et al. On an Estimate of the Decay Rate for Stable Linear Delay Systems. *Int. J. Control.* 1982, **36**(1): 95—97.

[4] Mori T et al. Simple Stability Criteria for Single and Compositive Linear Systems With Delays. *Int. J. Control.* 1981, **34**(6): 1175—1184.

ON THE ROBUST STABILIZATION OF UNCERTAIN TIME-DELAY SYSTEM

TIAN LIANJIANG

(*The Automation Research Division*, University of Petroleum *Beijing* 100083)

GAO WEIBING CHENG MIAN

(*The Seventh Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics* 100083)

ABSTRACT

In this paper, using the solution estimation method and the comparative theorem, the robust problem of the linear time-delay uncertain system is studied. And we get less conservative sufficient conditions to stabilize the systems by state feedback. We also give the condition of any desired robustness for the systems.

Key words: Robustness; stabilization; uncertain system.