第20卷 第5期 自动化学报 Vol. 20, No. 5
1994年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1994

短 文

稳定非线性解耦控制的实现

胡维多
(北京控制工程研究所 100080)
陈宗基 文传源
(北京航空航天大学自动控制系 100083)

摘 要

此文提出了一个构造性非线性解耦状态反馈结构,并用它研究稳定非线性解耦控制问题.定义了可控子固定动态的概念,并证明两类可控子固定动态当其不稳定时,可用动态状态反馈消除.最后分析了一个例子.

关键词: 非线性系统,输入输出解耦,稳定性,动态状态反馈.

1 引言

考虑仿射非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x)+\sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i,\\ y=h(x).\end{cases} \tag{1.1}$$

这里 $x\in R^n, u_i\in R, y\in R^m, f(x)$ 和 $g_i(x)$ 是 C^∞ 向量场, $h(x)$ 是 C^∞ 映射. 当 y_i 只受 u_i 影响,而不受 $u_j, j\neq i$ 影响时,则称系统(1.1)是解耦的. 如果在某一点, $\dot{x}=f(x)$ 是渐近稳定的,则称系统(1.1)在该点是稳定的. 而稳定解耦控制问题,指的是用状态反馈,使闭环系统在解耦的同时,保证闭环系统是稳定的.

A. Isidori 在文献[1]中,定义了非线性系统的解耦时的固定动态 P^*,并证明在保证系统解耦的同时, P^*用静态状态反馈是不能去掉的. K. G. Wagner 在文献[2]中将这一结果推广到动态反馈解耦控制问题. 以上结论均是对于解耦矩阵非奇异的系统, 文献[3]研究了特征矩阵不可逆的情况, 也得到类似结论. 文献[4]得到了一个可实现稳定解耦的判定条件.

本文研究了一类具有非奇异解耦矩阵的非线性系统的解耦状态反馈特征, 提出了一个构造性的解耦状态反馈结构, 使得用以往方法得到的构造性的状态反馈[5,6], 只是此结构的一个子集. 并用它来消除不稳定可控子固定动态. 在非线性解耦控制方面, 用动态状态反馈来解决解耦矩阵奇异时的解耦控制问题, 研究者较多[2,7]. 本文试图用动态状态

本文于1992年8月18日收到

反馈研究具有稳定性的非线性解耦控制问题．最后，详细地分析了一个例子，来说明以上结果的正确性及实用性．

2 非线性解耦控制律

对于系统(1.1)，假定状态反馈取如下形式：

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{\alpha}(x)+\beta(x)\boldsymbol{\nu}(t), \tag{2.1}$$

$\boldsymbol{\nu}(t)\in R^m$、$k$ 是一适当整数，$\boldsymbol{\alpha}$、β 是 C^∞ 函数，这里给出一个构造性的非线性解耦动态状态反馈结构，其中的特征数 ρ_i，解耦矩阵 $A(x)$ 及算子 $L_f^{\rho_i}h_i(x)$ 的定义可参见文献[8]．

$$\boldsymbol{\alpha}(x)=[A(x)]^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\eta_1(x)\\ \cdots \\ \eta_m(x)\end{bmatrix}-\boldsymbol{b}(x)\right\}, \tag{2.2}$$

$$\beta(x)=[A(x)]^{-1}\mathrm{diag}\lambda_i(x). \tag{2.3}$$

其中

$$\begin{aligned}&\eta_i=\varphi_i(L_f^{\rho_i}h_i(x),\cdots,h_i(x),Z_i),\lambda_i=\psi_i(L_f^{\rho_i}h_i(x),\cdots,h_i(x),Z_i),\\ &\dot{Z}_i=\nu_i(L_f^{\rho_i}h_i(x),\cdots,h_i(x),Z_i)+\delta_i(L_f^{\rho_i}h_i(x),\cdots,h_i(x),Z_i)\nu_i(t),\\ &Z_i^0=Z_i(0),\ (Z_i\text{ 为向量}),\ \varphi_i,\psi_i\text{ 是 }C^\infty\text{函数}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

定理2.1. 当系统(1.1)的反馈控制律(2.1)取(2.2)—(2.4)形式的状态反馈时，闭环系统是解耦的．

证明． 将满足(2.7)—(2.9)条件的状态反馈代入系统(1.1)中，对 y_i 求 ρ_i+1 次导数，可得

$$\begin{aligned}&y_i^{\rho_i+1}=\varphi_i(y_i^{\rho_i},\cdots,y_i,Z_i)+\psi_i(y_i^{\rho_i},\cdots,y_i,Z_i)\nu_i(t),\\ &\dot{Z}_i(t)=y_i(y_i^{\rho_i},\cdots,y_i,Z_i)+\delta_i(y_i^{\rho_i},\cdots,y_i,Z_i)\nu_i(t),\\ &Z_i(0)=Z_i^0.\end{aligned} \tag{2.5}$$

显然 y_i 只受 ν_i 影响，所以闭环系统是解耦的．证毕．

可以看出，当 $Z_i^0=0,\dot{Z}_i=0$ 时，此解耦状态反馈结构变成文献[5]中形式，而文献[5]的线性形式，则是文献[6]中的形式．

3 稳定解耦的实现

A. Isidori 等在[1]中，定义了非线性系统解耦的固定动态 P^* (Fixed dynamics 或 Fixed modes)，并证明，P^* 稳定是实现稳定非线性静态解耦的一个必要条件，即使用动态状态反馈，当某些 P^* 不稳定时，也不能实现稳定解耦．

当系统用正则状态反馈可解耦，且强可达分布 R^* 及包含在核 $\mathrm{Ker}\{dh_i\}$ 中的最大可控性分布 P^*，在平衡点附近非奇异且有限维可计算[1]时，则存在坐标系 $X=(x_1,\cdots,x_{m+2})$，

$$P_i^*=sp\{\partial/\partial x_j:1\leqslant j\leqslant x+1,j\neq i\},$$

$$P^{*}:=\bigcap_{i=1}^{m}P_i^{*}=sp\{\partial/\partial x_{m+1}\},$$

在此坐标系中，闭环系统有如下形式：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=f_1(x_1,x_{m+2})+g_{11}(x_1,x_{m+2})\nu_1,\ \ y_1=h_1(x_1,x_{m+2}),\\ \dot{x}_2=f_2(x_2,x_{m+2})+g_{22}(x_2,x_{m+2})\nu_2,y_2=h_2(x_2,x_{m+2}),\\ \qquad\cdots\cdots\\ \dot{x}_m=f_m(x_m,x_{m+2})+g_{mm}(x_m,x_{m+2})\nu_m,y_m=h_m(x_m,x_{m+2}),\\ \dot{x}_{m+1}=f_{m+1}(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},\ x_{m+2})+\sum_{i=1}^{m}g_{i,m+1}(x_1,\cdots,x_m,x_{m+1},x_{m+2})\nu_i,\\ \dot{x}_{m+2}=f_{m+2}(x_{m+2}).\end{cases}\tag{3.1}$$

不妨设 $x=0$ 处是平衡点，在这一特殊坐标系下，

$$\dot{x}_{m+1}=f_{m+1}(0,0,\cdots,x_{m+1},0)\tag{3.2}$$

是非线性系统解耦时的固定动态。

定义 3.1. 在系统的固定动态中，当存在不稳定的，但可用动态状态反馈在保持系统解耦的同时，使之稳定的固定动态，称之为可控子固定动态。

定理 3.1. 两类可控子固定动态

a）在(3.1)式中，存在 x_{m+1}^{k} 动态 $(k=1,2,\cdots,m)$ 满足以下条件：

$$g_{i,m+1}=0,\ \frac{\partial f_{m+1}^{k}(x)}{\partial x_j}=0,\ \frac{\partial g_{k,m+1}^{k}(x)}{\partial x_j}=0,\tag{3.3}$$

$$j=1,2,\cdots,m\ \text{且}\ j\neq k.$$

b）存在 $x_{m+1}^{\hat{m}}$ 动态满足以下条件：

$$\frac{\partial^2 f_{m+1}^{\hat{m}}(x)}{\partial x_k\partial x_l}=0,\ \frac{\partial^2 g_{i,m+1}^{\hat{m}}(x)}{\partial x_k\partial x_l}=0,\ \frac{\partial^2 f_{m+1}^{\hat{m}}(x)}{\partial^2 x_{m+1}^{\hat{m}}}=0.\tag{3.4}$$

其中 $k,l\in 1,2,\cdots,m$ 且 $k\neq l$.

证明. a）对于第 1 类情况，显然

$$\dot{x}_{m+1}^{k}=f_{m+1}^{k}(x_k,x_{m+1}^{k},x_{m+2})+g_{k,m+1}^{k}(x_k,x_{m+1}^{k},x_{m+2})\nu_k,\tag{3.5}$$
$$k=1,2,\cdots,m.$$

分两种情况讨论：

a1）当 $g_{k,m+1}^{k}\neq 0$ 时，取

$$\nu_k=-\frac{1}{g_{k,m+1}^{k}}[f_{m+1}^{k}+P(x_{m+1}^{k})-\nu_k'],\tag{3.6}$$

其中 $P(x_{m+1}^{k})$ 为任取，得

$$\dot{x}_{m+1}^{k}=-P(x_{m+1}^{k})-\nu_k',\tag{3.7}$$

显然，此时系统(3.1)仍是解耦的；

a2）当 $g_{k,m+1}^{k}=0$ 时，即

$$\dot{x}_{m+1}^{k}=f_{m+1}^{k}(x_k,\ x_{m+1}^{k},\ x_{m+2}),\tag{3.8}$$

求导得

$$\ddot{x}_{m+1}^{k}=\frac{\partial f_{m+1}^{k}(x)}{\partial x_k}[f_k+g_{k,k}\nu_k]+\frac{\partial f_{m+1}^{k}(x)}{\partial x_{m+1}^{k}}f_{m+1}^{k}+\frac{\partial f_{m+1}^{k}(x)}{\partial x_{m+2}}f_{m+2},\tag{3.9}$$

显然，$g_{k,k}\neq 0$（因为如果 $g_{k,k}=0$,(3.1)的分解不正确）. 此时,同 a1) 中情况.

b) 在这种情况下,不妨仅讨论 $g^{\triangle}_{i,m+1}(x)=0, i=1,\cdots,m$ 的情况.

$$f^{\triangle}_{m+1}(x)=f^{\triangle 1}_{m+1}(x_1,x_{m+2})+f^{\triangle 2}_{m+1}(x_2,x_{m+2})+\cdots+f^{\triangle m+1}_{m+1}(x_{m+1},x_{m+2}), \tag{3.10}$$

由(3.4)式中最后一项条件,有 $f^{\triangle m+1}_{m+1}=C_m\cdot x^{\triangle}_{m+1}+f'^{\triangle m+1}_{m+1}(x_{m+2})$,$C_m$ 为常数,取

$$\dot{x}_{z1}=f^{\triangle 2}_{m+1}(x_2,x_{m+2})+\cdots+C_m x_{z1}+f'^{\triangle m+1}_{m+1}(x_{m+2}), \tag{3.11}$$

可得

$$\dot{x}^{\triangle}_{m+1}-\dot{x}_{z1}=f^{\triangle 1}_{m+1}(x_1,x_{m+2})+C_m(x^{\triangle}_{m+1}-x_{z1}), \tag{3.12}$$

对于 x_{z1} 动态同 $x^{\triangle}_{m+1}$ 动态项的处理方法. 证毕.

4 例子

例. 为了简化计算,取以下已解耦的系统:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ x_1+x_1x_2+x_2^2-x_3\\ \sin x_1+2x_2^3+x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}u_1+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\2\end{bmatrix}u_2, \tag{4.1}$$

$$h_1(x)=x_1,\ h_2(x)=x_2,$$

显然，x_4 不稳定，因此系统解耦但不稳定. 采用定理 3.1 的方法，令 $\dot{x}_{z1}=2x_2^3+x_{z1}+2u_2$，$Z=x_4-x_{z1}$,则

$$\begin{cases}\dot{x}_1=u_1,\ y_1=x_1,\\ \dot{Z}=\sin x_1+Z+u_1,\end{cases}\qquad\begin{cases}\dot{x}_2=u_2,\ y_2=x_2,\\ \dot{x}_{z1}=2x_2^3+x_{z1}+2u_2.\end{cases} \tag{4.2}$$

从而容易得到既解耦又稳定的系统，如用定理 2.1 的结构可取得 $u_1=-2Z-\sin x_1+v_1$. 限于篇幅仿真结果[1)]略.

参　考　文　献

[1] Isidori A and Grizzle J W. Fixed Mode and Nonlinear Noninteracting Control with Stability. *IEEE. Trans. Aut. Contr.*, 1988, **33**:907—914.

[2] Wagner K G. Nonlinear Noninteraction with Stability by Dynamic State Feedback. *SIAM J. Contr. & Opt.* 1991, **29**(3):609—622.

[3] Zhan W, Tarn T J. A Canonical Dynamic Extention for Noninteraction with Stability for Affine Nonlinear Systems. *Sys. Contr. Let.*, 1991, 17: 177—184.

[4] Battilotti S. A Sufficient Condition for Nonlinear Noninteractioning Control with Stability Via Dynamic State Feedback. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1991, **AC-36**. 1033—1045.

[5] Claude D. Decoupling of Nonlinear System. *Syst. Contr. lett.*, 1982, **1**(4): 242—248.

[6] Freund E. The Structure of Decoupled Nonlinear Systems. *Int. J. Contr.*, 1975, **24**: 443—450.

[7] Nijmeijer H, Respondk W, Decoupling Via Dynamic Compensation for Nonlinear Control system. *IEEE* **AC-33**, 1988, 1065—1070.

[8] Isidori A. Nonlinear Control System. 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

1) 胡维多. 飞机大机动飞行控制研究. 北京航空航天大学博士论文,1993.2.

THE REALIZATION OF NONLINEAR DECOUPLING CONTROL WITH STABILITY

Hu Weiduo
(Beijing Institute Control Engineering, 100080)
Chen Zongji　　Wen Chuanyuan
(Automatic Control Department, Beijing University of Aeronautics and Astronautics 100083)

Abstract

In this paper a structure of nonlinear decoupling feedback is presented and it is used to analyze the decoupling control with stability problem. A concept of controllable fixed dynamics is proposed, and it is proved that two kinds of the dynamics can be removed by dynamic feedback if they are unstable. At last, an examples are presented to illustrate the correctness and usefuless of the results.

Key words: Nonlinear systems; input-output decoupling; stability dynamic feedback.