第20卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 20, No. 5
1994 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1994

分散控制系统的结构性质研究[1)]

熊运鸿 高为炳

(北京航空航天大学第七研究室 100083)

摘 要

在结构系统的框架下讨论分散输入固定模和通道可控性等分散控制问题，定义了结构输入固定模和结构通道可控等新概念，并用代数和图论两种方法对这些概念进行了刻划. 所得结果深化人们对分散控制系统内部结构的认识.

关键词: 分散控制，结构系统，分散输入固定模，通道可控性，图论方法.

1 引言

分散控制是现代控制理论的重要分支. 文[1]首先提出了分散固定模的概念，指出系统可通过分散动态反馈任置极点的充要条件是系统没有分散固定模. 文[2]则提出了单通道控制方案，即通过静态分散反馈使系统关于某单个通道是可控可观的，进而对该通道采用标准的集中控制技术达到控制整个系统的目的. 这使单通道可控性可观性成为分散控制的重要研究课题，分散输入固定模、分散输出固定模等更深入的概念也因此出现[3,4]. 这些成果，大大加深了人们对分散控制系统的认识.

文[5—7]研究了系统结构与分散固定模的关系，将固定模分为两类. 一类为结构固定模，是由系统结构造成的，其存在与系统参数无关. 另一类是在系统的特定参数下出现的，参数稍有变化，它们就消失了. 由于控制对象的数学模型往往不精确，从工程角度讲，结构固定模具有更重要的意义.

本文在结构系统的框架下研究系统结构与分散输入固定模及通道可控性的关系，提出结构输入固定模、结构通道可控等概念，并将用代数和图论两种方法对这些概念加以刻划.

2 预备知识

考虑如下有 p 个通道的线性时不变系统:

$$S: \quad \dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{p} B_i u_i, \; y_i = C_i x, \; i \in \underline{p} \triangleq \{1,2,\cdots,p\}, \tag{1}$$

1) 高校博士点基金资助的课题. 本文部分内容曾在第五届全国控制与决策系统学术会议上宣读，1993.
本文于 1993 年 1 月 15 日收到

其中 $x \in R^n$ 是系统的状态向量，$u_i \in R^{m_i}$ 和 $y_i \in R^{r_i}$ 分别是第 i 个通道的控制与观测向量，$\sum_{i=1}^{p} m_i = m$，$\sum_{i=1}^{p} r_i = r$，A、B_i、$C_i(i \in \underline{p})$ 是相应维数的实矩阵。不失一般性，假设 B_i, C_i 均非零 $(i \in \underline{p})$。对 S 采用分散输出反馈

$$u_i = K_i y_i + \bar{u}_i, \quad i \in \underline{p}, \tag{2}$$

式中 $K_i \in R^{m_i \times r_i}$，$i \in \underline{p}$，则闭环系统可写成

$$\dot{x} = (A + BKC)x + \sum_{i=1}^{p} B_i \bar{u}_i, \quad y_i = C_i x, i \in \underline{p},$$

其中 $B \triangleq [B_1 B_2 \cdots B_p]$，$C \triangleq [C_1^T C_2^T \cdots C_p^T]^T$，$K \triangleq \mathrm{blockdiag}(K_1, K_2, \cdots, K_p)$。记 K 的全体组成的集合为 $\boldsymbol{K}$，$A + BKC$ 为 A_K。

如果 $\varphi = \{i_1, i_2, \cdots i_h\}$ 为 $\underline{p}$ 的子集，记 $B_\varphi \triangleq [B_{i_1} B_{i_2} \cdots B_{i_h}]$，$C_\varphi \triangleq [C_{i_1}^T C_{i_2}^T \cdots C_{i_h}^T]^T$ ($\varphi = \phi$ 时，$B_\varphi \triangleq 0$，$C_\varphi \triangleq 0$)。对 $\underline{p}$ 的子集 α 及 $K \in \boldsymbol{K}$，记

$$\Omega_{\alpha c}(K) \triangleq \{s \in \boldsymbol{C} \mid \mathrm{rank}[A_K - sI \ B_\alpha] < n\},$$

式中 $\boldsymbol{C}$ 表示复平面。记 $\Lambda_{\alpha c} = \bigcap_{K \in \boldsymbol{K}} \Omega_{\alpha c}(K)$。

定义 1. 若 $s \in \Lambda_{\alpha c}$，称 s 为系统 S 关于通道组 α 的一个分散输入固定模。

引理 1[3,4]. $s \in \Lambda_{\alpha c}$ 当且仅当存在 $\underline{p}$ 的某个子集 $\varphi \supseteq \alpha$，使得

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A - sI & B_\varphi \\ C_{(\underline{p}-\varphi)} & 0 \end{bmatrix} < n,$$

式中 $\underline{p} - \varphi$ 表示 φ 在 $\underline{p}$ 中的补集。

定义 2. 如果对 $\underline{p}$ 的任意真子集 $\varphi \supseteq \alpha$，系统 S 满足

$$C_{(\underline{p}-\varphi)}(sI - A)^{-1} B_\varphi \not\equiv 0, \tag{3}$$

则称 S 关于通道组 α 是输入关联的。

引理 2[2,4]. 存在 $K \in \boldsymbol{K}$ 使得 (A_K, B_α) 为可控对的充分必要条件是系统 S 同时满足：i) S 关于通道组 α 是输入关联的，ii) $\Lambda_{\alpha c} = \phi$。

3 结构输入固定模及结构通道可控性

有关术语。若一个 $k \times l$ 阶矩阵 $\widetilde{M}$ 中的元或者是固定的零元，或者是可彼此独立地取任意实数值的变元，则称 $\widetilde{M}$ 为 $k \times l$ 阶结构阵，记为 $\widetilde{M} \in \mathscr{S}^{k \times l}$。当 $\widetilde{M}$ 中所有变元均取确定的实数值后所得到的矩阵 $M \in R^{k \times l}$ 称为 $\widetilde{M}$ 的一个实现。$\widetilde{M}$ 的所有实现所能达到的最大秩称为 $\widetilde{M}$ 的通秩，记为 $\bar{\rho}(\widetilde{M})$。此外，设矩阵 $P \in R^{n \times n}$，若 P 经过有限次行列互换后可化为 n 阶单位阵，则称 P 为 n 阶置换阵。

考虑如下具有 p 个通道的结构系统：

$$\widetilde{S}: \quad \dot{x} = \widetilde{A}x + \sum_{j=1}^{p} \widetilde{B}_i u_i, \quad y_i = \widetilde{C}_i x, \quad i \in \underline{p}. \tag{4}$$

其中 $\widetilde{A} \in \mathscr{S}^{n \times n}$，$\widetilde{B}_i \in \mathscr{S}^{n \times m_i}$，$\widetilde{C}_i \in \mathscr{S}^{r_i \times n}$，$i \in \underline{p}$。不失一般性，假设 $\widetilde{B}_i$、$\widetilde{C}_i$ 均非零，$i \in \underline{p}$。记 $\widetilde{B} = [\widetilde{B}_1 \widetilde{B}_2 \cdots \widetilde{B}_p]$，$\widetilde{C}^T = [\widetilde{C}_1^T \ \widetilde{C}_2^T \cdots \widetilde{C}_p^T]$。对于 $\varphi \subseteq \underline{p}$，$\widetilde{B}_\varphi$、$\widetilde{C}_\varphi$ 可以与 B_φ、C_φ 类似地

定义. $\widetilde{A}$、$\widetilde{B}$、$\widetilde{C}$ 的每一个实现决定了一个如(1)式所示的线性系统 $\boldsymbol{S}$，称之为结构系统 $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ 的一个实现. 对 $\boldsymbol{S}$，施加如(2)式描述的分散反馈.

设 α 是 $\underline{p}$ 的一个预先给定的子集.

定义 3. 结构系统 $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ 关于通道组 α 有结构输入固定模是指: $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ 的每一个实现 $\boldsymbol{S}$ 关于通道组 α 均有分散输入固定模.

上述定义也可等价地叙述为

定义 3′. 如果 $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ 的某个实现 $\boldsymbol{S}$ 关于通道组 α 没有分散输入固定模，则称 $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ 关于通道组 α 没有结构输入固定模.

定义 4. 结构系统 $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ 关于通道组 α 结构通道可控是指: 存在 $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ 的一个如(1)式描述的实现 $\boldsymbol{S}$ 及一个分散反馈阵 $K\in\boldsymbol{K}$ 使得 (A_K, B_α) 为可控对.

定义 5. 结构系统 $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ 关于通道组 α 结构输入关联是指: $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ 有一个实现 $\boldsymbol{S}$ 关于通道组 α 是输入关联的.

利用引理 1，并类似文[5]中关于结构固定模的讨论，可以很容易地得到如下结果:

定理 1. 结构系统 $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ 关于通道组 α 有结构输入固定模当且仅当下面两条至少有一条成立:

i) 存在 $\underline{p}$ 的子集 $\varphi\supseteq\alpha$ 及置换阵 P，使得 $(P^{\mathrm{T}}\widetilde{A}P,\ P^{\mathrm{T}}\widetilde{B}_\varphi,\ \widetilde{C}_{(\underline{p}-\varphi)}P)$ 具有如下形式:

$$P^{\mathrm{T}}\widetilde{A}P=\begin{bmatrix}\widetilde{A}_{11} & 0 & 0\\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22} & 0\\ \widetilde{A}_{31} & \widetilde{A}_{32} & \widetilde{A}_{33}\end{bmatrix},\quad P^{\mathrm{T}}\widetilde{B}_\varphi=\begin{bmatrix}0\\0\\ \widetilde{B}_3^\varphi\end{bmatrix},$$
$$\widetilde{C}_{(\underline{p}-\varphi)}P=[\widetilde{C}_1^{(\underline{p}-\varphi)}\quad 0\quad 0]. \tag{5}$$

其中 $\widetilde{A}_{22}$ 的维数不为 0.

ii) 存在 $\underline{p}$ 的子集 $\varphi\supseteq\alpha$，使得

$$\tilde{\rho}\left(\begin{bmatrix}\widetilde{A} & \widetilde{B}_\varphi\\ \widetilde{C}_{(\underline{p}-\varphi)} & 0\end{bmatrix}\right)<n. \tag{6}$$

说明: 按照定理 1，结构输入固定模可分为两类. 由条件 i) 造成的结构输入固定模称为第一类结构输入固定模，由条件 ii) 造成的则称为第二类结构输入固定模.

命题 1. 结构系统 $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ 关于通道组 α 不是结构输入关联的，当且仅当存在 $\underline{p}$ 的真子集 $\varphi\supseteq\alpha$ 及置换阵 P，使 $(P^{\mathrm{T}}\widetilde{A}P, P^{\mathrm{T}}\widetilde{B}_\varphi, \widetilde{C}_{(\underline{p}-\varphi)}P)$ 具有如下形式:

$$P^{\mathrm{T}}\widetilde{A}P=\begin{bmatrix}\widetilde{A}_{11} & 0\\ \widetilde{A}_{21} & \widetilde{A}_{22}\end{bmatrix},\quad P^{\mathrm{T}}\widetilde{B}_\varphi=\begin{bmatrix}0\\ \widetilde{B}_2^\varphi\end{bmatrix},$$
$$\widetilde{C}_{(\underline{p}-\varphi)}P=[\widetilde{C}_1^{(\underline{p}-\varphi)}\quad 0]. \tag{7}$$

证明. 如果 $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ 关于通道组 α 不是结构输入关联的，则存在 $\underline{p}$ 的真子集 $\varphi\supseteq\alpha$，使得对 $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ 的任何如(1)式描述的实现 $\boldsymbol{S}$ 都有(3)式成立. 由于 $\widetilde{B}_i$、$\widetilde{C}_i$ 均非零，$i\in\underline{p}$，由文献[5]的引理 A.6，知命题成立. 证毕.

比较定理 1 与命题 1，不难得到

推论 1. 如果结构系统 $\boldsymbol{S}$ 关于通道组 α 结构输入关联，则 $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ 关于通道组 α 没有第一类结构输入固定模.

定理 2. 结构系统 $\tilde{S}$ 关于通道组 α 结构通道可控当且仅当下面两条同时满足：i) $\tilde{S}$ 关于通道组 α 结构输入关联；ii) $\tilde{S}$ 关于通道组 α 没有第二类结构输入固定模.

证明.由引理 2、定理 1 及推论 1 即得.

4　有向图与分散控制系统的结构性质

本节用图论的方法研究上节定义的几个概念，这需要以下图论知识. 有向图 $D=(V,E)$ 由顶点集 V 和有向边集 $E\subseteq\{(v,w)\mid v,w\in V\}$ 组成,其中有向边 (v,w) 表示从顶点 v 到顶点 w 的有方向的连线. 在图 D 中,如果有向边序列 $H\triangleq\{(v_{i_1},v_{i_2}),(v_{i_2},v_{i_3}),\cdots,(v_{i_{k-1}},v_{i_k})\}$经过的顶点 $v_{i_1},v_{i_2},\cdots v_{i_k}$ 互不相同，称 H 是一条从 v_{i_1} 到 v_{i_k} 的路径，$v_{i_1}(v_{i_k})$ 称为此路径的起点(终点). 如果 v_{i_1} 和 v_{i_k} 相同,其它顶点互不相同，则称 H 为一个圈. 只有一条有向边的圈称为自圈. 如果自顶点 v_i (顶点集合 V^0) 出发有一条路径以顶点 v_j 为终点，称 v_j 是自 $v_i(V^0)$ 可达的. 图 D 的子图 $D_s=(V^s,E^s)$ 其中 $V^s\subseteq V$，$E^s=(V^s\times V^s)\cap E$. 如果 D_s 满足：$\forall v_i,\ v_j\in V^s$，v_i 与 v_j 互相可达,$\forall v_i\in V^s$ 及 $v_k\in V-V^s$,v_i 与 v_k 不是互相可达，则称它是 D 上的一个强支. 此外，如果有向边 e 的终点在一个圈 L 上而起点不在 L 上，称 $LU\{e\}$ 是一个芽，e 称为芽的特异边 (distinguished edge).

考虑由(4)式描述的结构系统 $\tilde{S}$. 令

$$\tilde{E}\triangleq\begin{bmatrix}\tilde{A} & \tilde{B} & 0\\ 0 & 0 & \tilde{K}\\ \tilde{C} & 0 & 0\end{bmatrix}=(\tilde{e}_{ij}),$$

其中 $\tilde{K}=\mathrm{blockdiag}(\tilde{K}_1,\tilde{K}_2\ ,\cdots\tilde{K}_p)$，$\tilde{K}_i\in\mathscr{S}^{m_i\times r_i}$ 且每个元均为变元，$i\in\underline{p}$. $\tilde{E}$ 可决定一个有向图 $G(\tilde{E})=(V,E)$,其中顶点集 $V\triangleq\{v_1,v_2,\cdots,v_{n+m+r}\}$，有向边集 $E\triangleq\{(v_i,v_j)\mid e_{ji}\neq 0\}$. $\tilde{E}$ 称为 $G(\tilde{E})$ 的邻接矩阵. V 的子集 $X\triangleq\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$、$U=\{v_{n+1},\cdots,v_{n+m}\}$、$Y=\{v_{n+m+1},\cdots,v_{n+m+r}\}$分别称为状态顶点、输入顶点、输出顶点的集合，并分别记为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$、$U=\{u_{11},u_{12},\cdots,u_{1m_1},u_{21},\cdots,u_{pm_p}\}$、$Y=\{y_{11},y_{12},\cdots,y_{1r_1},y_{21},\cdots,y_{pr_p}\}$. 注意 $G(\tilde{E})$ 是一个考虑了分散反馈影响的“闭环图”，图上与 $\tilde{K}$ 对应的边称为分散反馈边,其集合记为 E_K.

在有向图 $G(\tilde{E})$ 上，U_α 和 Y_α 分别表示与通道组 α 对应的输入和输出顶点集合，U_α 内出发的路径称为 U_α 路径. 考虑一条 U_α 路径 H_0 和一组芽 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_\rho$,如果对每个 $i,1\leqslant i\leqslant l,Q_i$ 的特异边 e_i 的起点不在 U_α 路径 H_0 的终点上,并且 e_i 的起点是 Q_i 上唯一属于 $H_0\cup Q_1\cup Q_2\cdots\cup Q_{i-1}$ 的顶点,则称 $H_0\cup Q_1\cup\cdots\cup Q_\rho$ 是一个 U_α 掌,H_0 的起点称为 U_α 掌的根. 一组互不相交的 U_α 掌称为一个 U_α 复掌，各 U_α 掌的根之集合称为 U_α 复掌的根集.

定理 3. 结构系统 $\tilde{S}$ 关于通道组 α 没有结构输入固定模当且仅当在 $G(\tilde{E})$ 上下面两条同时满足：

i) 每个状态顶点 x_i 都自 U_α 可达或位于一个包括分散反馈边的强支上；

ii) 存在一组互不相交的 U_α 路径 $H_k=(V_k^H,E_k^H);k=1,2,\cdots k_H$ 和圈 $L_k=(V_k^L$,

$E_k^L), k=1,2,\cdots k_L$, 使得

$$X \subseteq \left(\sum_{k=1}^{kH} V_k^H\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{kL} V_k^L\right).$$

为证明定理 3, 先给出两个引理.

对 $\underline{p}$ 的子集 $\alpha=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$, 记 $\widetilde{K}_\alpha=\text{blockdiag}(\widetilde{K}_{i_1},\widetilde{K}_{i_2},\cdots,\widetilde{K}_{i_k})$, 记 $\widetilde{F}_\alpha$ 是所有元素均为变元的 $\sum\limits_{i\in\alpha} m_i \times n$ 的结构阵, 记

$$\widetilde{E}_{F\alpha} \triangleq \begin{bmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{B}_\alpha & \widetilde{B}_{(\underline{p}-\alpha)} & 0 & 0 \\ \widetilde{F}_\alpha & \widetilde{I}_{\sum\limits_{i\in\alpha} m_i} & 0 & \widetilde{K}_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \widetilde{I}_{\sum\limits_{i\in(\underline{p}-\alpha)} m_i} & 0 & \widetilde{K}_{(\underline{p}-\alpha)} \\ \widetilde{C}_\alpha & 0 & 0 & \widetilde{I}_{\sum\limits_{i\in\alpha} r_i} & 0 \\ \widetilde{C}_{(\underline{p}-\alpha)} & 0 & 0 & 0 & \widetilde{I}_{\sum\limits_{i\in(\underline{p}-\alpha)} r_i} \end{bmatrix};$$

$\widetilde{E}_{F\alpha}$ 中的 $\widetilde{I}_{\sum\limits_{i\in\alpha} m_i}$ 等表示相应维数单位阵的对角元置为变元所得的结构阵,则有

引理 3. $\tilde{\rho}(\widetilde{E}_{F\alpha})=n+m+r$ 当且仅当对 $\underline{p}$ 的任意子集 $\varphi\supseteq\alpha$ 有

$$\tilde{\rho}\left(\begin{bmatrix} \widetilde{A} & \widetilde{B}_\varphi \\ \widetilde{C}_{(\underline{p}-\varphi)} & 0 \end{bmatrix}\right) \geqslant n. \tag{8}$$

证明. 将 $\widetilde{I}_{m+r}$ 的一个特殊的实现 I_{m+r}($m+r$ 阶单位阵)及 $\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C},\widetilde{K},\widetilde{F}_\alpha$ 的实现 A,B,C,K,F_α 代入 $\widetilde{E}_{F\alpha}$ 中, 得到 $\widetilde{E}_{F\alpha}$ 的一个实现, 记为 $E_{F\alpha}$. 易知, $\tilde{\rho}(\widetilde{E}_{F\alpha})=n+m+r$ 当且仅当存在这样的 $E_{F\alpha}$,使得 $\det E_{F\alpha}\neq 0$, 而这又当且仅当存在 $\widetilde{A}$、$\widetilde{B}$、$\widetilde{C}$ 的实现 A、B、C 及 $K\in\boldsymbol{K}, F_\alpha\in R^{\sum\limits_{i\in\alpha} m_i\times n}$,使得 $\det(A+BKC-B_\alpha F_\alpha)\neq 0$. 由引理 1, 命题成立.

引理 4. 对 $\underline{p}$ 的每个子集 $\varphi\supseteq\alpha$ 均有(8)式成立当且仅当在 $G(\widetilde{E})=(V, E)$ 上存在一组互不相交的 U_α 路径 $H_k=(V_k^H,E_k^H), k=1,2,\cdots,k_H$ 和圈 $L_k=(V_k^L, E_k^L)$, $k=1,2,\cdots,k_L$,使得

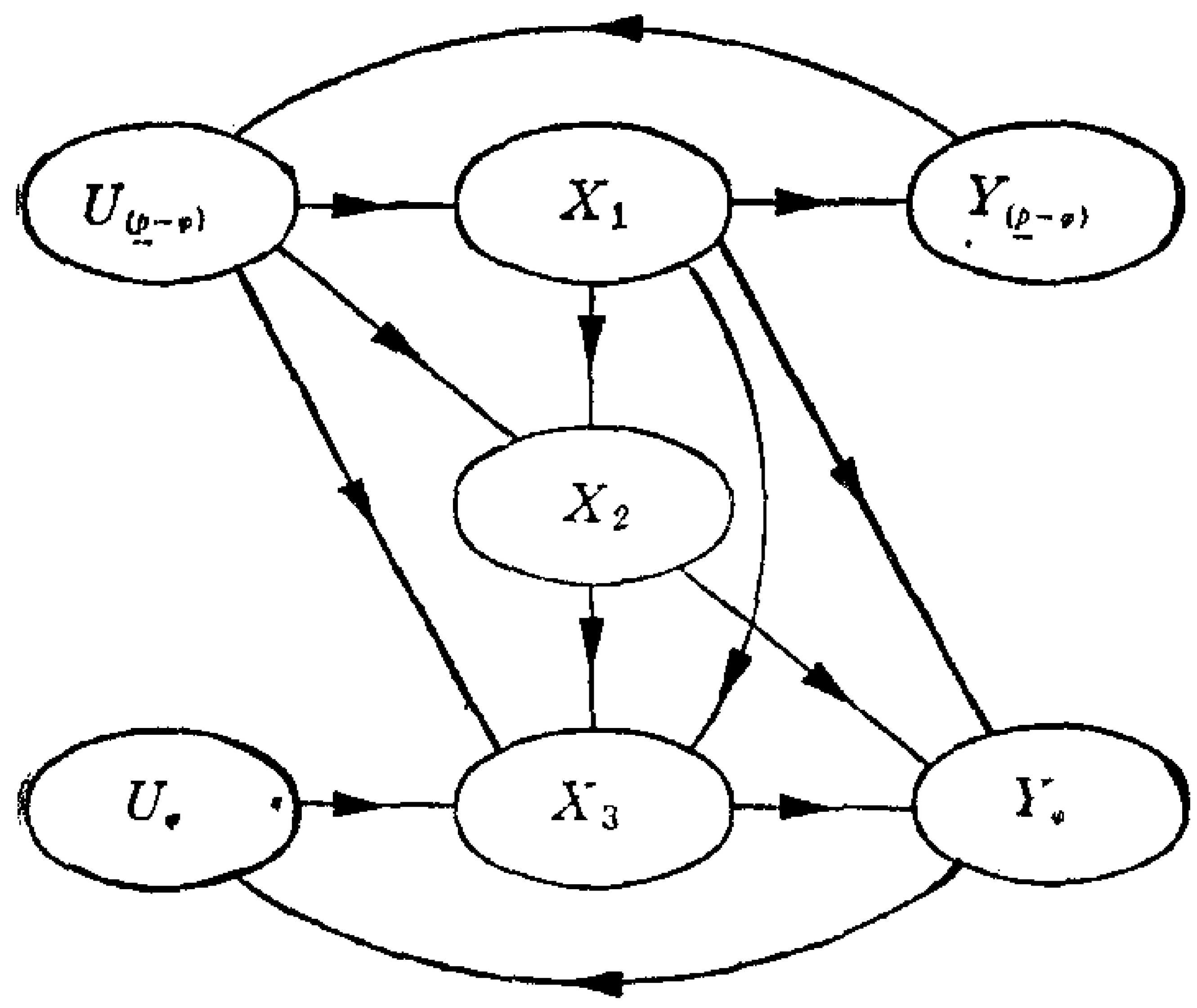
$$X \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^{k_H} V_k^H\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{k_L} V_k^L\right).$$

证明. 修改 $G(\widetilde{E})$:在每个输入顶点和输出顶点处加一个自圈,从每个状态顶点到 U_α 内的每个顶点各引一条有向边, 这样便得到以 $\widetilde{E}_{F\alpha}$ 为邻接矩阵的有向图 $G(\widetilde{E}_{F\alpha})$. 由文献 [8] 中引理 1.55, $\tilde{\rho}(\widetilde{E}_{F\alpha})=n+m+r$ 当且仅当在 $G(\widetilde{E}_{F\alpha})$ 上存在一组互不相交的圈 $\bar{L}_k=(\bar{V}_k,\bar{E}_k)$, $k=1,2,\cdots,t$, 使得 $V=\bigcup\limits_{k=1}^{t}\bar{V}_k$. 由引理 3 及 $G(\widetilde{E})$ 与 $G(\widetilde{E}_{F\alpha})$ 的关系知引理 4 成立.

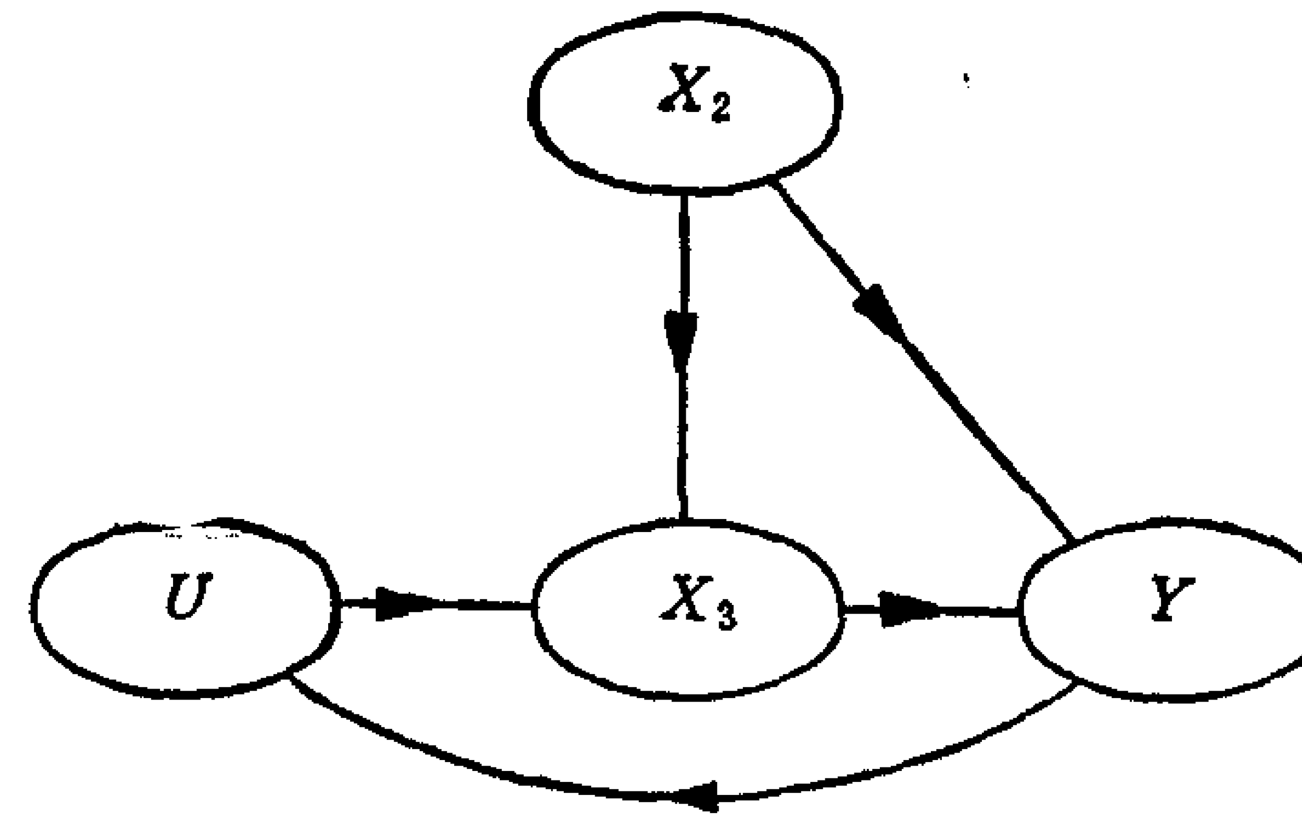
定理 3 的证明. 只要证明定理 1 的条件 i), ii) 成立分别当且仅当定理 3 的条件 i), ii) 不成立.

假设定理 1 的条件 i)成立. 如果 $\varphi\neq\underline{p}$,则 $G(\widetilde{E})$ 具有图 1(a)所示的结构, 图中

X_1、X_2、X_3 分别是和 $\tilde{A}_{11}$、$\tilde{A}_{22}$、$\tilde{A}_{33}$ 对应的状态顶点集合．如果 $\varphi = \underline{p}$,则图 1(a) 退化成图 1(b)．由于 $\tilde{A}_{22}$ 维数不为 0，因此 $G(\tilde{E})$ 上至少有一个强支的所有顶点包含于 X_2 之内，该强支不包括分散反馈边，也不是自 U_φ 可达的，又 $\varphi \supseteq \alpha$,知定理 3 条件 i) 不成立．



(a)



(b)

图 1

另一方面，假设定理 3 的条件 i) 不成立．令 V° 为 $G(\tilde{E})$ 上所有自 U_α 可达的顶点的集合,并记 $V^\circ = U^\circ \cup X^\circ \cup Y^\circ$,其中 $U^\circ = V^\circ \cap U$, $X^\circ = V^\circ \cap X$, $Y^\circ = V^\circ \cap Y$. 显然 $U^\circ \supseteq U_\alpha$. 令 $\hat{V} \triangleq V - V^\circ$, $\hat{E} \triangleq \{(v_i, v_j) \in E \mid v_i, v_j \in \hat{V}\}$, $\hat{D} \triangleq (\hat{V}, \hat{E})$. 设 $\hat{D}_i = (\hat{V}^i, \hat{E}^i)(i = 1,2,\cdots q)$为 $\hat{D}$ 内的强支,并且 $\hat{D}_i(i = 1,2,\cdots q)$ 的排序满足：如果 $i > j$,则 $\hat{V}^j$ 内的顶点不是自 $\hat{V}^i$ 可达的．记 $\hat{V}^i = U^i \cup X^i \cup Y^i$，其中 $U^i = \hat{V}^i \cap U$, $X^i = \hat{V}^i \cap X$, $Y^i = \hat{V}^i \cap Y$. 记 $\hat{E}^i = E^i_K \cup E^i$,$E^i_K$ 表示 $\hat{E}^i$ 中的分散反馈边，$E^i = \hat{E}^i - E^i_K$. 由假设,存在 $k \in \{1,2,\cdots,q\}$使得 $E^k_K = \phi$,因而 $U^k = \phi$, $Y^k = \phi$.

下面分两种情况讨论：

1) 如果 $E^1_K \neq \phi$，则 $k \neq 1$. 这时存在 $\underline{p}$ 的真子集 $\varphi \supseteq \alpha$,使得 $U_\varphi = \left(\bigcup_{i=k+1}^{q} U^i\right) \cup U^\circ$, $U_{(\underline{p}-\varphi)} = \bigcup_{j=1}^{k-1} U^i$. (否则,必有某同一通道的两不同输入顶点 u_{li_1} 和 u_{li_2} 满足 $u_{li_1} \in \left(\bigcup_{i=k+1}^{q} U^i\right) \cup U^\circ$ 而 $u_{li_2} \in \bigcup_{i=1}^{k-1} U^i$. 显然 $u_{li_1} \bar{\in} U_\alpha$，于是必有 $y_{li_3} \in \left(\bigcup_{i=k+1}^{q} Y^i\right) \cup Y^\circ$ 使得 $(y_{li_3}, u_{li_1}) \in E_k$,因而 $(y_{li_3}, u_{li_2}) \in E_K$. 这意味着 $\bigcup_{i=1}^{k-1} \hat{V}^i$ 内的顶点 u_{li_2} 自 $\left(\bigcup_{i=k+1}^{q} \hat{V}^i\right) \cup V^\circ$ 可达,但由上所述,这是不可能的)．由于 $U_{(\underline{p}-\varphi)}$ 内的任何顶点都不是自 $\left(\bigcup_{i=k+1}^{q} Y^i\right) \cup Y^\circ$ 可达的,因而知 $Y_\varphi \supseteq \left(\bigcup_{i=k+1}^{q} Y^i\right) \cup Y^\circ$, $Y_{(\underline{p}-\varphi)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k-1} Y^i$. 定义 $X_1 = \bigcup_{i=1}^{k-1} X^i$, $X_2 = X^k$, $X_3 = \left(\bigcup_{i=k+1}^{q} X^i\right) \cup X^\circ$,则图 $G(\tilde{E})$ 可有图 1(a) 的结构．

2）如果 $E_K^1 = \phi$，则 $\left(\bigcup_{i=2}^{q} U^i\right) \cup U^\circ = U$。令 $X_1 = \phi$，$X_2 = X^1$，$X_3 = \left(\bigcup_{i=2}^{q} X^i\right) \cup X^\circ$，$G(\tilde{E})$ 有图 1(b)的结构。令 $\varphi = \underline{p}$。

由于在以上两种情况下均存在置换阵 P，使得 $(P^T\tilde{A}P, P^T\tilde{B}_\varphi, \tilde{C}_{(\underline{p}-\varphi)}P)$ 具有(5)式的形式，因而定理 1 的条件 i)成立。

其余部分的证明已由引理 4 完成。证毕.

命题 2. 设结构系统 $\tilde{S}$ 是输入可达的[8]，则 $\tilde{S}$ 关于通道组 α 结构输入关联当且仅当在 $G(\tilde{E})$ 上任何状态顶点均是自 U_α 可达的。

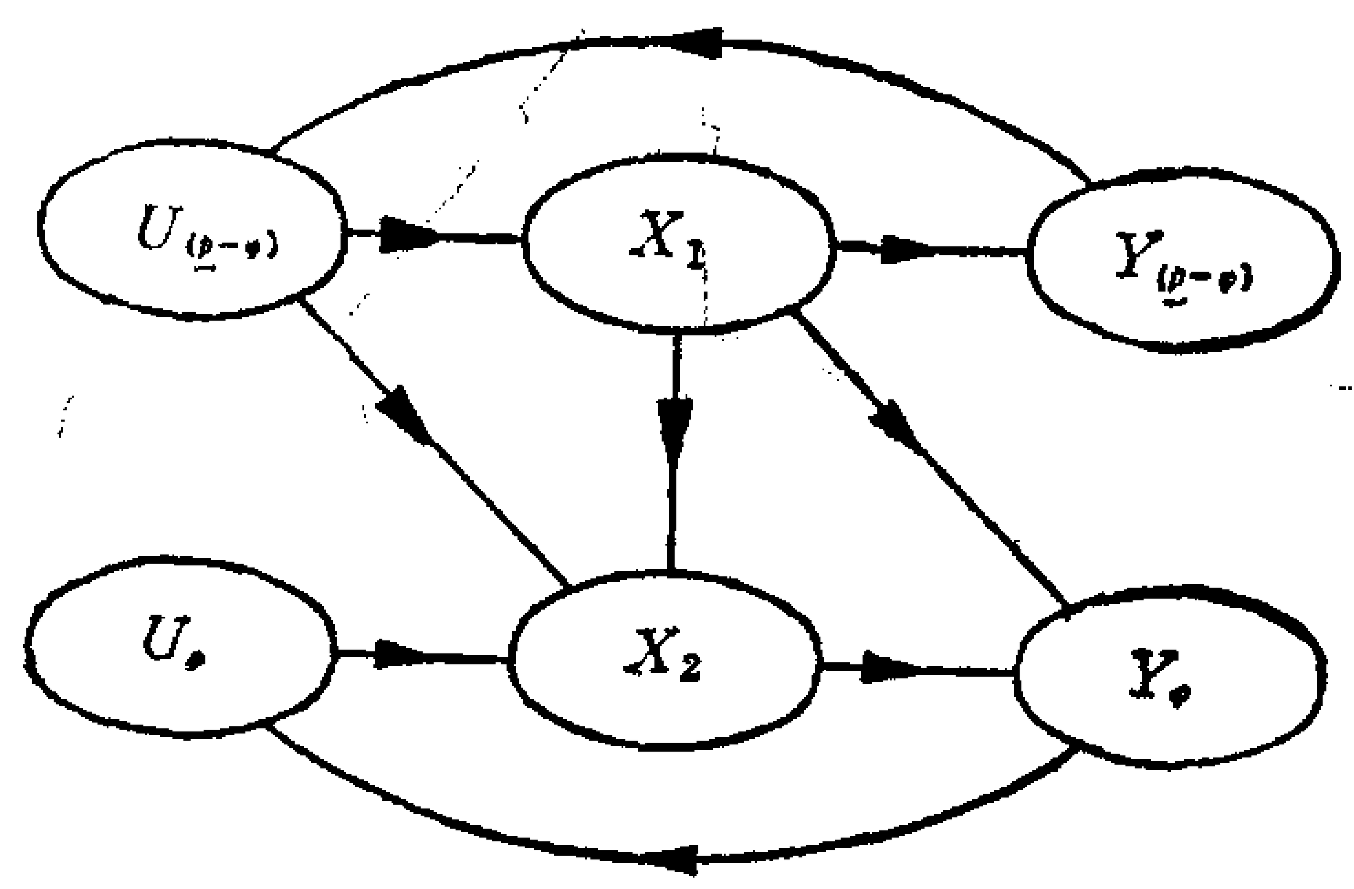


图 2

证明．如果 $\tilde{S}$ 关于通道组 α 不是结构输入关联的，由命题 1，$G(\tilde{E})$ 具有图 2 所示的结构，图中 X_1 和 X_2 分别为与(7)式中 $\tilde{A}_{11}$、$\tilde{A}_{22}$ 对应的状态顶点集合。显然 X_1 内的任一顶点都不是自 U_α 可达的。

另一方面，假设在 $G(\tilde{E})$ 上有状态顶点不是自 U_α 可达的。记所有自 U_α 可达之顶点集合为 V°，令 $U^\circ = V^\circ \cap U$，$X^\circ = V^\circ \cap X$，$Y^\circ = V^\circ \cap Y$。易知 $X - X^\circ$ 非空，同时，类似定理 3 的证明并考虑到 $\tilde{S}$ 输入可达，知存在 $\underline{p}$ 的真子集 $\varphi \supseteq \alpha$，使得 $U_\varphi = U^\circ$，$U_{(\underline{p}-\varphi)} = U - U^\circ$，并且 $Y_{(\underline{p}-\varphi)} \subseteq Y - Y^\circ$。令 $X_1 = X - X^\circ$，$X_2 = X^\circ$，则 $G(\tilde{E})$ 有图 2 所示的结构。由命题 1，$\tilde{S}$ 关于通道组 α 不是结构输入关联的。证毕。

定理 4. 结构系统 $\tilde{S}$ 关于通道组 α 结构通道可控的充分必要条件是 $G(\tilde{E})$ 同时满足

i) $G(\tilde{E})$ 上任一状态顶点均自 U_α 可达；

ii) 存在一组互不相交的 U_α 路径 $H_k = (V_k^H, E_k^H)$，$k = 1, 2, \cdots, k_H$ 和圈 $L_k = (V_k^L, E_k^L)$，$k = 1, 2, \cdots k_L$，使得

$$X \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^{k_H} V_k^H\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{k_E} V_k^L\right).$$

证明．由于 $\tilde{S}$ 关于通道组 α 结构通道可控的必要条件是 $\tilde{S}$ 输入可达，并且条件 i)成立意味着 $\tilde{S}$ 输入可达，由定理 2、定理 3 及命题 2 即得。

说明．状态顶点 x_i 自 U_α 可达说明在 α 这组通道上可以改变状态 x_i；x_i 位于一个包括分散反馈边的强支上则说明 r_i 能受到分散反馈的影响。$\tilde{S}$ 关于通道组 α 没有结构输入固定模并不意味着 $\tilde{S}$ 关于通道组 α 结构通道可控，就是因为有些状态 x_i 可能只受到分散反馈的影响而非自 U_α 可达的缘故。

利用 U_α 复掌的概念，定理 4 还可表述为

定理 5. 结构系统 $\tilde{S}$ 关于通道组 α 结构通道可控的充分必要条件是在 $G(\tilde{E})$ 上存在一个 U_α 复掌 $D_z = (V^z, E^z)$ 使得 $X \subseteq V^z$。

证明．由定理 4 及 U_α 复掌的定义，充分性显然，只证必要性．设 $\tilde{S}$ 关于通道组 α

结构通道可控，记 R_1 是定理 4 条件 ii)中那些 U_α 路径的根集，$L_1, L_2, \cdots L_{k_1}$ 是所有自 R_1 可达的圈. 按文[9]中定理 1 $b) \to c)$ 的证明方法，这些 U_α 路径和圈 $L_1, L_2, \cdots, L_{k_1}$ 可以生出一个根为 R_1 的 U_α 复掌 $D_1^z = (V_1^z, E_1^z)$，D_1^z 和 $L_{k_1+1}, \cdots L_{k_L}$ 互不相交，且

$$X \subseteq V_1^z \cup \left(\bigcup_{k=k_1+1}^{k_L} V_k^L \right).$$

由于 $L_{k_1+1}, \cdots, L_{k_L}$ 也是自 U_α 可达的，故在 $G(\tilde{E})$ 上存在一条向边 e，其起点 R_2 在 $U_\alpha - R_1$ 内，终点在 $L_{k_1+1}, \cdots, L_{k_L}$ 中的某个圈上. 设 $L_{k_1+1}, \cdots, L_{k_L}$ 中自 R_2 可达的圈为 $L_{k_1+1}, \cdots, L_{k_2}$，则同样，$e$ 和 $L_{k_1+1}, \cdots, L_{k_2}$ 可以生成一个根在 R_2 的 U_α 掌 $D_2^z = (V_2^z, E_2^z)$，D_1^z、D_2^z、$L_{k_2+1}, \cdots, L_{k_L}$ 互不相交，且

$$X \subseteq V_1^z \cup V_2^z \cup \left(\bigcup_{k=k_2+1}^{k_L} V_k^L \right).$$

照此方法，经有限次(设为 j 次，$1 \leqslant j \leqslant k_L$) 后，可以得到一组互不相交的 U_α (复) 掌 $D_k^z = (V_k^z, E_k^z)$，$k = 1, 2, \cdots, j$，使得 $X \subseteq \bigcup_{k=1}^{j} V_k^z$. 令 $D_z = \bigcup_{k=1}^{j} D_k^z$，即证得必要性. 证毕.

比较定理 5 与文[9]中的结构可控性定理可以看出，二者有很大的相似性.

参　考　文　献

[1] Wang S H and Davison E J. On the Stabilization of Decentralized Control Systems, IEEE **AC-18** (1973), (5): 473—478.

[2] Corfmat J P and Morse A S. Decentralized Control of Linear Multivariable Systems. *Automatica*, 1976, **12**(5): 479—495.

[3] 郑毓蕃，韩正之. 分散固定模的结构. 控制理论与应用，1986，**3**(4): 20—29.

[4] Yan W Y and Bitmead R R. Decentralized Control of Multi-channel Systems with Direct Control Feedthrough. *Int. J. Control*, 1989, **49**(6): 2057—2075.

[5] Sezer M E and Siljak D D. On Structurally fixed modes. Proceedings of the IEEE International Symp. on Circuit and Systems. Chicago, 1981, 558—565.

[6] Pichai V, Sezer M E and Siljak D D. A Graphical Test for Structurally Fixed Modes. Proc. ACC, 1982, 751—757.

[7] Linnemann A. Fixed Modes in Parametrized Systems. *Int. J. Control*. 1983, **38**(2): 319—335.

[8] Siljak D D. Decentralized Control of Complex Systems. Academic Press, Inc. San Diego, 1991.

[9] Mayeda H. On Structural Controllability Theorem. IEEE **AC-26** (1986), (3): 795—798.

ON STRUCTURAL CHARACTERIZATION OF DECENTRALIZED CONTROL SYSTEMS

XIONG YUNHONG GAO WEIBING
(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics* 100083)

ABSTRACT

This paper discusses some important concepts in decentralized control systems in the framework of structured systems. Some new concepts such as structurally input-fixed mode and structural channel controllability are introduced. Both algebraic and graphic characterizations of these new concepts are obtained, which lead to deep insight into the structure of decentralized control systems.

Key words: Decentralized control; structured systems; decentralized input-fixed mode; channel controllability; graphic method.

熊运鸿 照片、简介见本刊第 19 卷第 3 期.

高为炳 照片、简介见本刊第 17 卷第 6 期.