第 20 卷 第 5 期
1994 年 9 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 20, No. 5
Sep., 1994

奇异最优控制的渐近分析[1)]

张维弢 冯德兴
(中国科学院系统科学研究所 北京 100080)

摘 要

该文研究分布参数系统的奇异最优控制的收敛性和渐近分析,给出了一种可行的渐近展开算法和误差估计,并提出一个 Stiff 类型的未解决问题。

关键词: 奇异最优控制,收敛性,渐近分析。

1 问题的提出

自 Lions 发表文[1]以来,人们研究了边界控制和边界观测的奇异最优控制的收敛性和渐近分析,但用文[1]的方法来研究分布控制和分布观测(即控制和观测都在区域 Ω 上),就会遇到很多本质困难。本文试图分析研究这种情形。

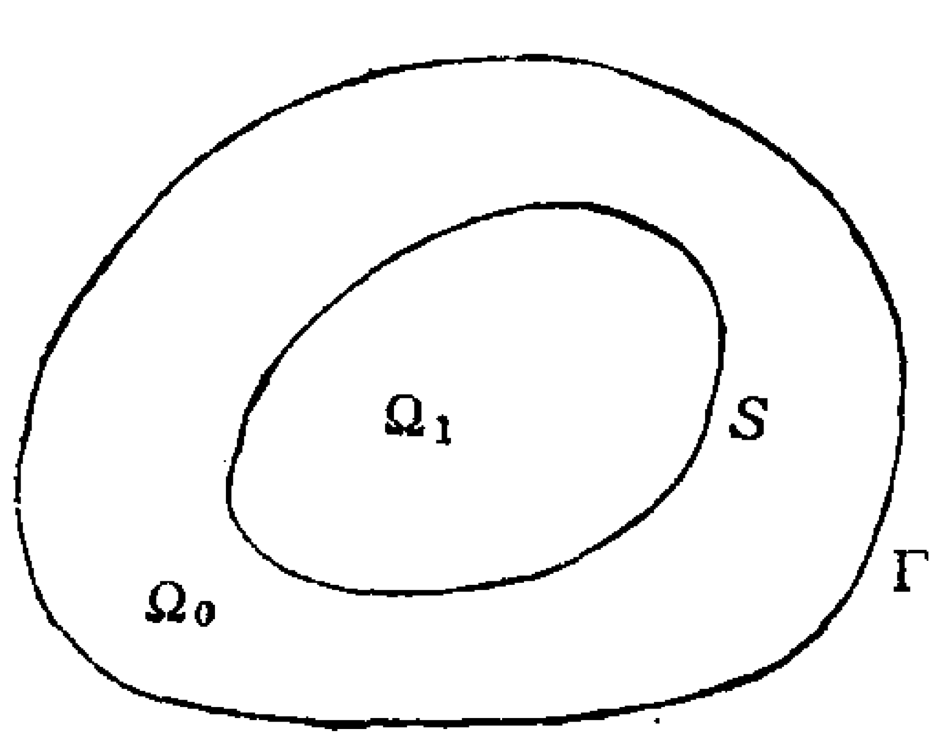

图 1

系统的状态为

$$\begin{cases} -\Delta y(v) = f + v, \text{在 } \Omega \text{ 上}, \\ y(v)|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $v \in \mathscr{U} = L^2(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset R^n$ 为有界开集。

系统的性能指标定义为

$$J_\varepsilon(v) = \int_\Omega |\nabla y(v) - \bar{Z}_d|^2 dx + \varepsilon \int_\Omega v^2 dx, \tag{1.2}$$

其中 $\bar{Z}_d \in (L^2(\Omega))^n$, $0 < \varepsilon \ll 1$。

最优控制问题是求 $u_\varepsilon \in \mathscr{U}$ 满足

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf_{v \in \mathscr{U}} J_\varepsilon(v). \tag{1.3}$$

设 $F = f + \mathrm{div}\bar{Z}_d$, 当 $F \in H^1(\Omega) \backslash H_0^1(\Omega)$ 时,利用文[2]的边界层理论和内估计方法,文[3]研究了 u_ε 的边界奇性分析,分析了 $\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}\right\|_{L^2(\Gamma)}$ 的奇性与 F 的边界形态的关系。

对问题(1.1),(1.2),(1.3),本文研究最优控制 u_ε 的收敛性。

---

1) 国家自然科学基金资助项目。本文曾在中国自动化学会 1991 年控制理论与应用年会上宣读。
本文于 1992 年 2 月 4 日收到

设 $\Omega=\bar{\Omega}_1+\Omega_0$（如图 1），设由系统(1.1)确定的状态的性能指标定义为

$$J_\varepsilon(v)=\int_{\Omega_0}|\nabla y(v)-\bar{Z}_d|^2\mathrm{d}x+\varepsilon\int_\Omega v^2\mathrm{d}x-2\int_{\Omega_1}gy(v)\mathrm{d}x, \tag{1.4}$$

其中 $g\in L^2(\Omega_1)$.

最优控制问题 (1.1)，(1.3)，(1.4)的物理应用背景是具有夹层的炉膛温度梯度控制问题。

由文[4]的第二章可知，最优控制问题(1.1)，(1.2)，(1.3)和(1.1)，(1.3)，(1.4)存在唯一最优控制 $u_\varepsilon\in\mathscr{U}$. 本文研究问题(1.1)，(1.2)，(1.3)的最优控制的收敛性，讨论最优控制问题(1.1)，(1.3)，(1.4)的渐近分析。在对 g 附加条件的情形下，仅给出了渐近分析的前两项，而欲给出依次的各项，会遇到本质的困难，为此，提出了一个未解决问题。

2 最优控制 u_ε 的收敛性

定理 2.1. 设 $u=-F$. 则对最优控制问题(1.1)，(1.2)，(1.3)成立

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon-u\|_{H^{-1}(\Omega)}=0. \tag{2.1}$$

证. 计算可知，问题(1.1)，(1.2)，(1.3)的最优控制 u_ε 满足

$$J'(u_\varepsilon)\cdot(v-u_\varepsilon)\geqslant 0,\quad \forall v\in\mathscr{U}. \tag{2.2}$$

(2.2)式可表为

$$\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial y(u_\varepsilon)}{\partial x_i}-Z_id\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(y(v-u_\varepsilon)-y(0))\mathrm{d}x+\varepsilon\int_\Omega u_\varepsilon(v-u_\varepsilon)\mathrm{d}x$$
$$\geqslant 0. \tag{2.3}$$

(2.3)式可表为

$$\int_\Omega\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(y(u_\varepsilon)-y(0))\frac{\partial}{\partial x_i}(y(v)-y(u_\varepsilon))\mathrm{d}x+\int_\Omega\varepsilon u_\varepsilon(v-u_\varepsilon)\mathrm{d}x$$
$$\geqslant\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(Z_{id}-\frac{\partial y(0)}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(y(v)-y(u_\varepsilon))\mathrm{d}x,\ \forall v\in\mathscr{U}. \tag{2.4}$$

设 $V_1=H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, $V_0=H_0^1(\Omega)$, $N_\varepsilon=y(u_\varepsilon)-y(0)$, $M=y(v)-y(0)$, $b_0(M,N)=\int_\Omega\nabla M\cdot\nabla N\mathrm{d}x$, $b_1(M,N)=\int_\Omega\Delta M\Delta N\mathrm{d}x$, $(h,M)=\int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(Z_{id}-\frac{\partial y(0)}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}(y(v)-y(0))\mathrm{d}x$. 利用 $y(v)-y(u_\varepsilon)|_\Gamma=0$ 和 Green 公式，由(1.1)式，有 $(h,M)=-\int_\Omega FM\mathrm{d}x$.

利用 $M=y(v)-y(0)$ 和(1.1)式，有

$$\begin{cases}-\Delta M=v,\text{在 }\Omega\text{上},\\ M|_\Gamma=0.\end{cases} \tag{2.5}$$

由文[5]的第二章可知，在问题(2.5)中，$v\to M$ 是 $L^2(\Omega)\to H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ 上的同构。 (2.6)

利用(2.6)式可知，(2.4)式等价于

$$b_0(N_\varepsilon, M-N_\varepsilon)+\varepsilon b_1(N_\varepsilon, M-N_\varepsilon) \geqslant (h, M-N_\varepsilon), \forall M \in V_1. \tag{2.7}$$

定义(2.7)式的极限问题为求 $N_0 \in V_0$，满足

$$b_0(N_0, M-N_0) \geqslant (h, M-N_0), \forall M \in V_0. \tag{2.8}$$

因为 $V_0 = H_0^1(\Omega)$ 是闭子空间，由(2.8)式可知，

$$\begin{cases} -\Delta N_0 = -F, \text{ 在 } \Omega \text{ 上}, \\ N_0|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

利用文[1]的第二章第三节的一般收敛定理可证，对问题(2.7)，(2.9)，成立

$$N_\varepsilon \xrightarrow[H_0^1(\Omega)]{\text{强}} N_0. \tag{2.10}$$

由文[5]的第二章可知，在问题(2.5)中，$v \to M$ 是 $H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ 的同构.

(2.11)

由(2.9)，(2.10)，(2.11)可证(2.1)式成立，证毕.

3 渐近分析

考虑最优控制问题(1.1)，(1.3)，(1.4)，因为 $\mathscr{U} = L^2(\Omega)$ 为空间（非闭凸集），由 $\frac{1}{2} J'_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot v = 0$，有

$$\int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(y(u_\varepsilon)-y(0)) \frac{\partial}{\partial x_i}(y(v)-y(0))\mathrm{d}x + \varepsilon \int_\Omega u_\varepsilon v \mathrm{d}x$$
$$= \int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^{n} \left(Z_{id} - \frac{\partial y(0)}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}(y(v)-y(0))\mathrm{d}x + \int_{\Omega_1} g(y(v)-y(0))\mathrm{d}x,$$
$$\forall v \in \mathscr{U}. \tag{3.1}$$

利用 Green 公式，有

$$\int_{\Omega_0} \sum_{i=1}^{n} \left(Z_{id} - \frac{\partial y(0)}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}(y(v)-y(0))\mathrm{d}x = \int_{\Omega_0} -F(y(v)-y(0))\mathrm{d}x$$
$$+ \int_s \left(\frac{\partial y(0)}{\partial \nu} - Z_d \cdot \nu\right)(y(v)-y(0))\mathrm{d}s. \tag{3.2}$$

设

$$a_0(M,N) = \int_{\Omega_0} \nabla M \cdot \nabla N \mathrm{d}x, \quad a_1(M,N) = \int_\Omega \Delta M \Delta N \mathrm{d}x,$$

$$(I, y(v)-y(0)) = -\int_{\Omega_0} F(y(v)-y(0))\mathrm{d}x + \int_s \left(\frac{\partial y(0)}{\partial \nu} - Z_d \cdot \nu\right)$$
$$\times (y(v)-y(0))\mathrm{d}s + \int_{\Omega_1} g(y(v)-y(0))\mathrm{d}x,$$

则(3.1)式等价于

$$a_0(N_\varepsilon, M) + \varepsilon a_1(N_\varepsilon, M) = (I, M), \forall M \in V_1. \tag{3.3}$$

考虑问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u = g \text{ 在 } \Omega_1 \text{ 上},\\ u\Big|_s = \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_s = 0.\end{cases} \tag{3.4}$$

由文[5]的第二章可知，在(3.4)式中，$g \to u$ 是 $L^2(\Omega_1) \to H_0^2(\Omega_1) \cap H^4(\Omega_1)$ 同构映射. 记 $I_{30}(\Omega_1) = \{f \mid f = \Delta^2 v, \forall v \in H_0^3(\Omega_1) \cap H^4(\Omega_1)\}$，即 $I_{30}(\Omega_1)$ 是 $H_0^3(\Omega_1) \cap H^4(\Omega_1)$ 在 Δ^2 映射下的像集合. 设 f 定义在 Ω 上，f_i 表示 f 在 Ω_i 上的限制，$i = 0, 1$.

定理 3.1. 设 $N_\varepsilon^0 = \varepsilon^{-1} N^{-1} + N^0$，若 $g \in I_{30}(\Omega_1)$，则问题(3.3)可由渐近分析求解，且

$N^{-1} = (N_0^{-1}, N_1^{-1}) = (0, N_1^{-1})$，$N_1^{-1}$ 满足

$$\begin{cases}\Delta^2 N_1^{-1} = g \text{ 在 } \Omega_1 \text{ 上},\\ N_1^{-1}\Big|_s = \dfrac{\partial N_1^{-1}}{\partial \nu}\Big|_s = 0.\end{cases} \tag{3.5}$$

$N^0 = (N_0^0, N_1^0)$，N_0^0 满足

$$\begin{cases}-\Delta N_0^0 = -F, \text{ 在 } \Omega_0 \text{ 上},\\ \dfrac{\partial N_0^0}{\partial \nu}\Big|_s = \left(Z_d \cdot \nu - \dfrac{\partial \Delta N_1^{-1}}{\partial \nu} - \dfrac{\partial y(0)}{\partial \nu}\right)\Big|_s,\\ N_0^0|_\Gamma = 0.\end{cases} \tag{3.6}$$

N_1^0 满足

$$\begin{cases}\Delta^2 N_1^0 = 0, \text{ 在 } \Omega_1 \text{ 上},\\ N_1^0|_s = N_0^0|_s, \ \dfrac{\partial N_1^0}{\partial \nu}\Big|_s = \dfrac{\partial N_0^0}{\partial \nu}\Big|_s.\end{cases} \tag{3.7}$$

证. 在(3.3)式中，取 $M = N_\varepsilon$，利用(2.6)式可证，

$$a_0(N_\varepsilon, N_\varepsilon) + \varepsilon a_1(N_\varepsilon, N_\varepsilon) \geqslant c\varepsilon \|N_\varepsilon\|^2_{H^2(\Omega)}. \tag{3.8}$$

利用(3.8)式和 Lax-Milgram 引理可知，问题(3.3)存在唯一解 $N_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. 设 $N_\varepsilon = \varepsilon^{-1} N^{-1} + N^0 + \varepsilon N^1 + \cdots$，代入(3.3)式，比较等式两边 ε 同次幂的系数，有

$$a_0(N^{-1}, M) = 0, \forall M \in V_1, \tag{3.9}$$

$$a_0(N^0, M) + a_1(N^{-1}, M) = (I, M), \forall M \in V_1, \tag{3.10}$$

$$a_0(N^i, M) + a_1(N^{i-1}, M) = 0, \quad \forall M \in V_1, \tag{3.11}$$

其中 $i = 1, 2, 3, \cdots$

要求 $N^i (i \geqslant -1) \in V_1$，定义

$$Y_0 = \{M \mid a_0(M, M) = 0, \ \forall M \in V_1\},$$

则可证明 $N \in Y_0$ 的充要条件是

$$a_0(N, M) = 0, \quad \forall M \in V_1. \tag{3.12}$$

利用(3.12)式，由(3.9)式可知，$N^{-1} \in Y_0$. 由 Y_0 的定义可知，$\nabla N^{-1}|_{\Omega_0} = 0$，由此有 $N_0^{-1} = c$，又由 $N^{-1} \in V_1$，$N^{-1}|_\Gamma = 0$，有 $N_0^{-1} = 0$. 在(3.10)式中，取 $M \in Y_0$，利用(3.12)式，有

$$a_1(N^{-1}, M) = (I, M), \forall M \in Y_0. \tag{3.13}$$

在(3.13)式中，取 $M = \varphi \in \mathscr{D}(\Omega_1)$，有

$$\Delta^2 N_1^{-1} = g, \text{ 在 } \Omega_1 \text{ 上.} \tag{3.14}$$

因为欲求 $N^{-1}\in V_1$，即 N^{-1} 在 s 上满足迹条件（s 两侧函数值及法微商值相等），故有

$$N_1^{-1}\Big|_s = \frac{\partial N_1^{-1}}{\partial \nu}\Big|_s = 0. \tag{3.15}$$

由(3.14),(3.15)式,得(3.5)式.

在 Ω_1 上,利用 Green 公式,有

$$\int_s M\frac{\partial \Delta N_1^{-1}}{\partial \nu}\mathrm{d}s = \int_{\Omega_1}\nabla M\cdot\nabla\Delta N^{-1}\mathrm{d}x + \int_{\Omega_1} M\Delta^2 N^{-1}\mathrm{d}x, \tag{3.16}$$

$$\int_s \frac{\partial M}{\partial \nu}\Delta N^{-1}\mathrm{d}s = \int_{\Omega_1}\nabla M\cdot\nabla\Delta N^{-1}\mathrm{d}x + \int_{\Omega_1}\Delta M\Delta N^{-1}\mathrm{d}x. \tag{3.17}$$

记 $a_1(N,M)$ 在 Ω_i 上的限制为 $a_{1,i}(N,M)$，$i=0,1$. 由 (3.14), (3.16), (3.17) 式,有

$$a_{1,1}(N^{-1},M) = \int_{\Omega_1} gM\mathrm{d}x + \int_s \frac{\partial M}{\partial \nu}\Delta N^{-1}\mathrm{d}s - \int_s M\frac{\partial \Delta N^{-1}}{\partial \nu}\mathrm{d}s. \tag{3.18}$$

因 $N_0^{-1}=0$，所以 $a_{1,0}(N^{-1},M)=0$. (3.19)

由(3.18),(3.19)式,有

$$a_1(N^{-1},M) = \int_{\Omega_1} gM\mathrm{d}x + \int_s \frac{\partial M}{\partial \nu}\Delta N^{-1}\mathrm{d}s - \int_s M\frac{\partial \Delta N^{-1}}{\partial \nu}\mathrm{d}s. \tag{3.20}$$

在(3.10)式中,取 $M=\varphi\in\mathscr{D}(\Omega_0)$，有

$$-\Delta N_0^0 = -F, \text{ 在 } \Omega_0 \text{ 上.} \tag{3.21}$$

在 Ω_0 上,利用 Green 公式和(3.21)式,有

$$a_0(N^0,M) = -\int_s M\frac{\partial N^0}{\partial \nu}\mathrm{d}s - \int_{\Omega_0} FM\mathrm{d}x. \tag{3.22}$$

将(3.20),(3.22)式代入(3.10)式，由 $M|_s$ 和 $\dfrac{\partial M}{\partial \nu}\Big|_s$ 的任意性,有

$$\frac{\partial N_0^0}{\partial \nu}\Big|_s = \left(Z_d\cdot\nu - \frac{\partial\Delta N^{-1}}{\partial \nu} - \frac{\partial y(0)}{\partial \nu}\right)\Big|_s, \tag{3.23}$$

$$\Delta N_1^{-1}|_s = 0. \tag{3.24}$$

因 $N_0^0\in V_1$，由(3.21),(3.23)式,得(3.6)式.

因为假设 $g\in I_{30}(\Omega_1)$，由 $N_1^{-1}\in H_0^3(\Omega_1)$，有 $\dfrac{\partial^2 N_1^{-1}}{\partial \nu^2}\Big|_s = \Delta N_1^{-1}\Big|_s = 0$，因此(3.24)式自然满足.

在(3.11)式中,取 $i=1$，$M\in Y_0$，有

$$a_1(N^0,M) = 0, \quad \forall M\in Y_0. \tag{3.25}$$

在(3.25)式中,取 $M=\varphi\in\mathscr{D}(\Omega_1)$，有

$$\Delta^2 N_1^0 = 0, \text{ 在 } \Omega_1 \text{ 上.} \tag{3.26}$$

因 $N^0\in V_1$，由迹条件,有

$$\begin{cases} N_1^0|_s = N_0^0|_s, \\ \left.\dfrac{\partial N_1^0}{\partial \nu}\right|_s = \left.\dfrac{\partial N_0^0}{\partial \nu}\right|_s. \end{cases} \tag{3.27}$$

由(3.26),(3.27)式,有(3.7)式,证毕.

定理 3.2. 设 $N_\varepsilon^0 = \varepsilon^{-1}N^{-1} + N^0$, $u_\varepsilon^0 = -\varepsilon^{-1}\Delta N^{-1} - \Delta N^0 = \varepsilon^{-1}u^{-1} + u^0$. 若 $g \in I_{30}(\Omega_1)$, 则最优控制问题(1.1),(1.3),(1.4)的误差估计为

$$\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|\Delta N^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.28}$$

$$\|N_\varepsilon - N_\varepsilon^0\|_{H^1(\Omega_0)} \leqslant c\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\Delta N^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.29}$$

其中 c 表示同 ε 和函数无关的常数.

证. 利用(3.9),(3.10),(3.11)式,可得

$$a_0(N_\varepsilon^0, M) + \varepsilon a_1(N_\varepsilon^0, M) = (I, M) + \varepsilon a_1(N^0, M), \ \forall M \in V_1. \tag{3.30}$$

由(3.3),(3.30)式,有

$$a_0(N_\varepsilon - N_\varepsilon^0, M) + \varepsilon a_1(N_\varepsilon - N_\varepsilon^0, M) = -\varepsilon a_1(N^0, M), \ \forall M \in V_1. \tag{3.31}$$

在(3.31)式中,取 $M = N_\varepsilon - N_\varepsilon^0$, 有

$$\|\Delta(N_\varepsilon - N_\varepsilon^0)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|\Delta N^0\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.32}$$

$$\|\nabla(N_\varepsilon - N_\varepsilon^0)\|_{L^2(\Omega_0)} \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\Delta N^0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.33}$$

利用 $u_\varepsilon = -\Delta N_\varepsilon$, 由(3.32)式,有(3.28)式.

因为 $N_\varepsilon|_\Gamma = N_\varepsilon^0|_\Gamma = 0$, 由一般的 Poincaré-Friedrichs 不等式[6],有

$$\|N_\varepsilon - N_\varepsilon^0\|_{H^1(\Omega_0)} \leqslant c\|\nabla(N_\varepsilon - N_\varepsilon^0)\|_{L^2(\Omega_0)}. \tag{3.34}$$

由(3.33),(3.34)式,有(3.29)式,证毕.

注. 在渐近展开中,要继续求 N^1, 会遇到本质困难.

在 $(3.11)_i$ 式中,取 $i = 1$, 有

$$a_0(N^{-1}, M) + a_1(N^0, M) = 0. \tag{3.35}$$

在(3.35)式中,取 $M = \varphi \in \mathscr{D}(\Omega_0)$, 有

$$-\Delta N_0^1 = 0, \text{ 在 } \Omega_0 \text{ 上}. \tag{3.36}$$

在 Ω_1 上,利用(3.26)式和 Green 公式,有

$$a_{1,1}(N^0, M) = \int_s \frac{\partial M}{\partial \nu}\Delta N_1^0 ds - \int_s M\frac{\partial \Delta N_1^0}{\partial \nu} ds. \tag{3.37}$$

在 Ω_0 上,利用 Green 公式,有

$$a_{1,0}(N^0, M) = \int_{\Omega_0} M\Delta^2 N_0^0 dx - \int_s \frac{\partial M}{\partial \nu}\Delta N_0^0 ds + \int_s M\frac{\partial \Delta N_0^0}{\partial \nu} ds + \int_\Gamma \frac{\partial M}{\partial \nu}\Delta N_0^0 ds. \tag{3.38}$$

由(3.37),(3.38)式,有

$$a_1(N^0, M) = \int_{\Omega_0} M\Delta^2 N_0^0 dx + \int_s \frac{\partial M}{\partial \nu}(\Delta N_1^0 - \Delta N_0^0) ds - \int_s M\left(\frac{\partial \Delta N_1^0}{\partial \nu} - \frac{\partial \Delta N_0^0}{\partial \nu}\right) ds. \tag{3.39}$$

在 Ω_0 上，利用(3.36)式和 Green 公式，有

$$a_0(N^1, M) = -\int_s \frac{\partial N_0^1}{\partial \nu} M ds. \tag{3.40}$$

将(3.39)，(3.40)式代入(3.35)式，利用 $M\Big|_s$ 和 $\dfrac{\partial M}{\partial \nu}\Big|_s$ 的任意性，有

$$\begin{cases} -\Delta N_0^1 = 0, \text{ 在 } \Omega_0 \text{ 上}, \\ \dfrac{\partial N_0^1}{\partial \nu}\Big|_s = \left(\dfrac{\partial \Delta N_0^0}{\partial \nu} - \dfrac{\partial \Delta N_1^0}{\partial \nu}\right)\Big|_s, \\ N_0^1|_\Gamma = 0; \end{cases} \tag{3.41}$$

$$\begin{cases} \Delta^2 N_0^0 = 0 \quad \text{在 } \Omega_0 \text{ 上}, \\ \Delta N_0^0|_\Gamma = 0, \\ \Delta N_0^0|_s = \Delta N_1^0|_s. \end{cases} \tag{3.42}$$

为了确定 N_0^1，必须要求已确定了的 N_0^0 还要满足(3.42)式，而(3.42)式与已确定的、决定 u^0 的(3.6)，(3.7)式一般是不相容的。例如，假设 $\Delta F \neq 0$，则(3.42)式的第一个方程就与(3.6)式的第一个方程相矛盾，故 N_0^1 的确定遇到了本质困难。如何确定 N_0^1?当 $g\bar{\in} I_0^3(\Omega_1)$ 时又如何确定 N_0^{-1}? 这些是尚待解决的问题。

参 考 文 献

[1] Lions J L. Perturbations Singulières Dans Les Problèms Aux Limites et en Control Optimal. Springer-Verlag, 1973.

[2] Zhang Weitao. Analysis of Boundary Layer Singularity. J. Sys. Sci. & Math. Scis., 1984, **4**(2): 87—101.

[3] Zhang Weitao and Feng Dexing. Analysis of the Boundary Singularity of a Singular Optimal Control Problem. Lecture Notes in Control and Information Sciences, 159, Springer-Verlag, Berlin, 1991, **159**: 203—210.

[4] Lions J L. Sur le Contrôle optimal des Systèmes gouvernés par des Équations aux Dérivées Partielles. Paris, Dunod, 1968.

[5] Lions J L and Magenes E. Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications. Paris Dunod, 1968.

[6] Deny J and Lions J L. Les Espaces du Type de Beppo-Levi. Ann. Inst. Fourier 5, 1953—1954, 305—370.

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF A SINGULAR OPTIMAL CONTROL PROBLEM

ZHANG WEITAO　FENG DEXING
(*Insititutute of Systems Science ,Acedemia Sinica, Beijing* 100080)

ABSTRACT

In this paper, the convergence and the asymptotic analysis of a singular optimal control of distributed parameter systems are discussed. The asymptotic expansion and the error estimate are given. In addition an open problem about this kind of stiff problems is proposed.

Key words: Singular optimal control; convergence of the singular solution; asymptotic analysis.

张维弢　1941 年生于辽宁。1965 年毕业于中国科技大学数学系。现为中国科学院系统所研究员，《数学的实践与认识》的执行编委，美国《数学评论》的评论员。目前研究兴趣是偏微分方程和最优控制的奇摄动理论，本征值估计和微分几何等问题。

冯德兴　1940 年生于江苏。1964 年中国科技大学数学系毕业。1964—1967 年中科院数学所的研究生，现在是系统科学研究所的研究员。研究兴趣是泛函分析的算子理论和分布参数系统的控制理论，特别是最优控制，镇定性和大型柔性结构等问题。