第20卷 第5期
1994年 9月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 20, No. 5
Sep., 1994

# 非线性左、右逆系统的规范形设计

曹立 郑毓蕃
(华东师范大学应用数学研究室 上海 200062)

**摘 要**

此文对非线性最小阶左逆和最小阶右逆系统给出一种设计方法，其特点是仅用线性程序(实数矩阵演算)和求反函数的程序即可获得由规范形描写的最小阶左、右逆系统的方程，从而使设计过程中由非线性带来的复杂性降到了最低限度.

**关键词:** 非线性系统，最小阶左、右逆系统，规范形.

## 1 引言

近年来，左、右逆系统的研究成果已被成功地应用于调节与跟踪[1]、模型匹配[2]、动态DDP[3] 等综合设计问题. 左、右逆系统的本质信息包含在其最小阶构造中[4-7]. 随着左、右逆所包含的原系统的结构信息被逐步揭示，这两个概念正在成为非线性控制理论中的基本概念，正如能控能观性在线性系统理论中所起的作用一样.

鉴于非线性运算给工程设计带来的复杂性，本文采用线性代数给最小阶左逆、右逆分别建立了规范形. 规范形的结构指数是线性代数描述的系统结构不变量，由数值矩阵演算确定，再利用反函数程序确定 $m+p$ 个函数，即可写出左、右逆系统的方程式. 本文提供的设计过程，不涉及微分几何与微分代数的知识，将非线性带来的复杂性压缩到最低限度. 采用线性代数的方法建立非线性控制理论，最早见于文[9].

设系统由下述方程描述:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),\quad \boldsymbol{y}=h(\boldsymbol{x}), \tag{1.1}$$

其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}$ 分别取值于 $\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^p$ 中的开子集， $f$ 和 $h$ 为局部解析的多元向量值映射.

**定义 1.1.** 对于系统(1.1)，构造动态装置

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{z}}&=F(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y},\dot{\boldsymbol{y}},\cdots,\boldsymbol{y}^{(r)}),\\ \boldsymbol{\omega}&=\alpha(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y},\dot{\boldsymbol{y}},\cdots,\boldsymbol{y}^{(r)}).\end{aligned} \tag{1.2}$$

用(1.1)式的 $\boldsymbol{y}(t)$ 及其各阶导函数作输入，并适当选择初态 $\boldsymbol{z}(0)$，如果恰好有 $\boldsymbol{\omega}(t)=\boldsymbol{u}(t)$，则称(1.2)式为(1.1)式的逆系统. 逆系统是不唯一的，其中动态阶数 $\dim\boldsymbol{z}$ 最小的逆系统称为最小阶逆系统. 逆系统又称为左逆系统.

---

本文于1992年9月4日收到

**定义 1.2.** 对于(1.1)式,构造动态补偿器

$$\dot{z}=\phi(z,x,v),\ u=\alpha(z,x,v), \tag{1.3}$$

将(1.1)式和(1.3)式联立,消去 $u$.如果存在自然数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_p\in\mathrm{N}$ 适合 $y_l^{(\lambda_l)}=v_l, l\in\underline{p}$,则称(1.3)式为(1.1)式的右逆系统. 在(1.1)式的所有右逆系统中,$\dim z$ 最小的称为最小阶右逆系统.

当(1.1)式给出后,如何构造形如(1.2)式的最小阶左逆和形如(1.3)式的最小阶右逆?下面给出一个简便的方法.

## 2 非线性控制理论的线性代数方法

对(1.1)式的每个输出分量 $y_l$ 逐阶求导,可得

$$\begin{aligned}
\dot{y}_l&=\frac{\partial h_l}{\partial x}\cdot f(x,u)\triangleq h_l^1(x,u),\\
y_l^{(2)}&=\frac{\partial h_l^1}{\partial x}\cdot f(x,u)+\frac{\partial h_l^1}{\partial u}\cdot\dot{u}\triangleq h_l^2(x,u,\dot{u}),\\
&\cdots\cdots\\
y_l^{(k+1)}&=\frac{\partial h_l^k}{\partial x}\cdot f(x,u)+\frac{\partial h_l^k}{\partial u}\cdot\dot{u}+\cdots+\frac{\partial h_l^k}{\partial u^{(k-1)}}\cdot u^{(k)}\\
&\triangleq h_l^{k+1}(x,u,\dot{u},\cdots,u^{(k)}),\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\tag{2.1}$$

式中 $h_l$ 为 $h(x)$ 的第 $l$ 行, $l$ 取遍 $\underline{p}$. 对(2.1)式中各等式取微分,得

$$\mathrm{d}y_l^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h_l^k}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i+\sum_{\beta=0}^{k-1}\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial h_l^k}{\partial u_\alpha^{(\beta)}}\mathrm{d}u_\alpha^{(\beta)}, l\in\underline{p}, k>0. \tag{2.2}$$

在线性系统中,下式的系数矩阵称为 Hankel 矩阵:

$$y_l^{(k)}=c_l^{\mathrm{T}}A^kx+c_l^{\mathrm{T}}A^{k-1}Bu+\cdots+c_l^{\mathrm{T}}Bu^{(k-1)}, \tag{2.3}$$

(2.1)式称为系统输出的 Hankel 展开式,而(2.2)式的函数 $(\partial h_l^k/\partial u_\alpha^{(\beta)})$ 按相应规则排成的矩阵称为非线性 Hankel 矩阵. 虽然(2.1)式是非线性等式,但若将(2.2)式中的函数看作是系数,那么(2.2)式关于 $\mathrm{d}y_l^{(k)}$, $\mathrm{d}x_i$ 和 $\mathrm{d}u_\alpha^{(\beta)}$ 是线性的. 向量空间的空义不仅可以建立在数域上,也可以建立在任何域上,它们的基本概念如线性相关、线性表出、span、dim 等与实数域上的线性空间完全类似. 令全体 $x,u,\dot{u},\cdots,u^{(N)}$ 的局部解析函数所形成的集合记为 $c_N^\omega$, 记包含 $c_N^\omega$ 的最小函数域为 $\Theta$, $N$ 为充分大的自然数. 令

$$\mathrm{E}=\mathrm{span}_\Theta\{\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n,\mathrm{d}u_1^{(k)},\cdots,\mathrm{d}u_m^{(k)}|\quad k=0,1,\cdots,N\}, \tag{2.4}$$

那么从(2.2)式可知 $\mathrm{d}y_l^{(k)}(l\in\underline{p},0\leqslant k\leqslant N)$ 是 E 中的矢量.

作为 E 中的矢量,考察 $\{\mathrm{d}x_i\}$ 和 $\{\mathrm{d}y_l^{(k)}\}$ 的线性相关性. 将它们排成一列:

$$\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_n,\mathrm{d}y_1,\cdots,\mathrm{d}y_p,\mathrm{d}\dot{y}_1,\cdots,\mathrm{d}\dot{y}_p,\mathrm{d}y_1^{(N)},\cdots,\mathrm{d}y_p^{(N)}. \tag{2.5}$$

依次检验(2.5)中的每个矢量是否可以由其左方的矢量线性表出,若是,则称该矢量是左相关的,否则称为左独立的. 由于

$$\mathrm{d}y_l = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_l}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i, \quad (l \in \underline{p}),$$

所以 $\mathrm{d}y_l(l \in \underline{p})$ 必定是左相关的. 为此,
定义

$$\rho_l \triangleq \max\{k \geqslant 0 \mid \mathrm{d}y_l^{(k)} \text{ 在(2.5)式左相关}\} + 1, \tag{2.6}$$

当 $\rho_l > N$ 时,定义 $\rho_l \triangleq \infty$. 然后,记

$$\sigma \triangleq \mathrm{card}\{l \in \underline{p} \mid \rho_l \neq \infty\}. \tag{2.7}$$

容易验证, $\sigma$ 就是 Fliess 用微分代数定义的微分输出秩,而数集 $\{\rho_l\}$ 及其对偶集就是 Moog 用结构算法定义的无穷零结构指数.

利用反函数定理,对全体 $l \in \underline{p}$ 且 $\rho_l \neq \infty$, 有 $\sigma$ 个局部解析函数 $\varphi_l$, 使

$$y_l^{(\rho_l - 1)} = \varphi_l(\boldsymbol{x}, y_\alpha^{(\beta)} \mid \rho_\alpha \neq \infty, \beta \geqslant \rho_\alpha). \tag{2.8}$$

对(2.8)式求导,则获得 $\sigma$ 个局部解析函数 $\psi_l$, 使

$$y_l^{(\rho_l)} = \psi_l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, y_\alpha^{(\beta)} \mid \rho_\alpha \neq \infty, \beta \geqslant \rho_\alpha), \tag{2.9}$$

其中由 $\partial\psi_l/\partial u_j$ 排成的矩阵 (记 $\partial\boldsymbol{\psi}/\partial\boldsymbol{u}$) 是几乎处处行满秩的函数矩阵.

容易证明,当 $\rho_l \neq \infty$ 时必有 $\rho_l \leqslant n$.

## 3　最小阶(左)逆系统的规范形

Fliess 秩 $\sigma$ 是表征可逆性的完全不变量. 逆系统(1.2)可构造的充要条件是 $\sigma = m$, 此时(2.9)式的矩阵 $\partial\psi/\partial u$ 是几乎处处满秩的方阵. 对(2.9)式取微分,得

$$\mathrm{d}y_l^{(\rho_l)} = \sum \frac{\partial\psi_l}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i + \sum\sum \frac{\partial\psi_l}{\partial y_\alpha^{(\beta)}}\mathrm{d}y_\alpha^{(\beta)} + \sum \frac{\partial\psi_l}{\partial u_j}\mathrm{d}u_j, \tag{3.1}$$

既然 $\mathrm{d}u_j$ 前的系数矩阵几乎处处可逆,则不计奇异点, $\mathrm{d}u_j$ 可由 $\mathrm{d}x_i$ 和 $\mathrm{d}y_l^{(k)}$ 表出, 即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = (\partial\psi/\partial\boldsymbol{u})^{-1}\left(\mathrm{d}\boldsymbol{y}^{(\rho)} - \sum \frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i - \sum\sum \frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial y_\alpha^{(\beta)}}\mathrm{d}y_\alpha^{(\beta)}\right)$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{y}^{(\rho)}$ 表示 $\mathrm{d}y_l^{(\rho_l)}(\rho_l \neq \infty)$ 排列而成的矢量, $\partial\boldsymbol{\psi}$ 是相应的 $\partial\psi_l$ 排成的矢量. 从而,由反函数定理,存在 $m$ 个局部解析函数 $\zeta_j, j \in \underline{m}$, 使

$$u_j = \zeta_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \cdots, \boldsymbol{y}^{(n)}). \tag{3.2}$$

在忽略了细节和表述形式上的差异后,早期文献中关于逆系统的结果是以(3.2)式为最终形式的. 为了获得最小阶逆系统的构造,考察下述矢量的排列:

$$\mathrm{d}y_1, \cdots, \mathrm{d}y_p, \cdots\cdots, \mathrm{d}y_1^{(N)}, \cdots, \mathrm{d}y_p^{(N)}, \mathrm{d}u_1, \cdots, \mathrm{d}u_m, \cdots\cdots, \mathrm{d}u_1^{(n)}, \cdots, \mathrm{d}u_m^{(n)}. \tag{3.3}$$

令

$$\nu_j \triangleq \min\{k \mid \mathrm{d}u_j^{(k)} \text{ 在(3.3)中左相关}\}. \tag{3.4}$$

于是

$$\sum_{j=1}^{m} \nu_j = \dim \frac{\mathrm{span}\{\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{y}}, \cdots, \mathrm{d}\boldsymbol{y}^{(N)}, \mathrm{d}\boldsymbol{u}, \cdots, \mathrm{d}\boldsymbol{u}^{(n)}\}}{\mathrm{span}\{\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{y}}, \cdots, \mathrm{d}\boldsymbol{y}^{(N)}\}}. \tag{3.5}$$

下面的引理保证了 $\nu_j=\infty$ 的情形不出现.

**引理 3.1.** $\sum_{j=1}^{m}\nu_j\leqslant n$.

证明. 由(3.2)式,当$N$充分大后有

$$\mathrm{span}\{\mathrm{d}\boldsymbol{u},\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{u}},\cdots,\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{(n)}\}\subseteq\mathrm{span}\{\mathrm{d}\boldsymbol{x},\mathrm{d}\boldsymbol{y}\cdots,\mathrm{d}\boldsymbol{y}^{(N)}\},$$

从而

$$\dim\frac{\mathrm{span}\{\mathrm{d}\boldsymbol{y},\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{y}},\cdots,\mathrm{d}\boldsymbol{y}^{(N)},\mathrm{d}\boldsymbol{u},\cdots,\mathrm{d}\boldsymbol{u}^{(n)}\}}{\mathrm{span}\{\mathrm{d}\boldsymbol{y},\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{y}},\cdots,\mathrm{d}\boldsymbol{y}^{(N)}\}}$$
$$\leqslant\dim\frac{\mathrm{span}\{\mathrm{d}\boldsymbol{x},\ \mathrm{d}\boldsymbol{y},\cdots,\mathrm{d}\boldsymbol{y}^{(N)}\}}{\mathrm{span}\{\mathrm{d}\boldsymbol{y},\cdots,\mathrm{d}\boldsymbol{y}^{(N)}\}}\leqslant n.$$

由(3.5)式知引理成立.

文[8]证明了 $\Sigma\nu_j$ 正是最小阶左逆的动态阶数. 从而只要构造以 $\boldsymbol{y},\dot{\boldsymbol{y}},\cdots,\boldsymbol{y}^{(N)}$ 为输入, $\boldsymbol{u}$ 为输出,状态为 $\boldsymbol{z}$ 的动态装置使 $\dim\boldsymbol{z}=\sum_{j=1}^{m}\nu_j$ 即可. 利用反函数定理及(3.4)式,有

**引理 3.2.** 存在$m$个局部解析的函数 $\zeta_j,j\in\underline{m}$, 使

$$u_j^{(\nu_j)}=\zeta_j(y_l^{(k)},u_\alpha^{(\beta)}\mid l\in\underline{p},0\leqslant k\leqslant N,\alpha\in\underline{m},0\leqslant\beta<\nu_\alpha). \tag{3.6}$$

**定理 1.** 给定系统(1.1),其最小阶逆系统可按下述步骤确定:

STEP1. 计算导函数 $y_l^{(k)}$, 即(2.1)式,然后取微分,写成(2.2)式形式.

STEP2. 在(2.2)式中,将自变元 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\cdots,\boldsymbol{u}^{(N)}$ 取一些数值代入(数值按随机方式选取),使(2.2)式的函数系数变成数值系数,然后将 $\mathrm{d}y_l^{(k)}$ 的表出式代入(3.3)式, 利用数值矩阵的演算,试算由(3.4)式定义的不变量 $\nu_j$. 由于 $\nu_j$ 在正则点处的值相同, 故数值计算以概率 1 获得 $\nu_j$ 的准确值. 重复试算 3, 4 次(对 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},\cdots$等随机选不同的数值代入),即可保证 $\nu_j$ 的准确性.

STEP3. 利用标准的反函数程序或拟合的方法, 计算(3.6)式中的函数 $\zeta_j$, $j\in\underline{m}$. 在简单的情况下, $\zeta_j$ 可获得闭式解. 一般情况下,只能依据(3.3)式获得的线性表出式近似地确定.

STEP4. 对上述各步计算得到的 $\{\nu_j\}$ 和 $\{\zeta_j\}$, 记

$$\boldsymbol{\nu}^+\triangleq\{j\in\underline{m}\mid\nu_j>0\},\ \boldsymbol{\nu}^0\triangleq\{j\in\underline{m}\mid\nu_j=0\},$$

则逆系统为

$$\begin{cases}\dot{z}_{j1}=z_{j2},\\ \dot{z}_{j2}=z_{j3},\\ \cdots,\\ \dot{z}_{j\nu_j}=\zeta_j(y_l^{(k)},z_{\alpha\beta}\mid l\in\underline{p},k\geqslant 0,\alpha\in\underline{m},\beta\leqslant\nu_\alpha),\ j\ \text{取遍}\ \boldsymbol{\nu}^+,\end{cases}$$
$$u_j=\begin{cases}z_{j1}, & j\in\boldsymbol{\nu}^+,\\ \zeta_j(y_l^{(k)},z_{\alpha\beta}\mid l\in\underline{p},k\geqslant 0,\alpha\in\underline{m},\beta\leqslant\nu_\alpha), & j\in\boldsymbol{\nu}^0.\end{cases} \tag{3.7}$$

证明: STEP1——STEP3 叙述 $\nu_j$ 和 $\zeta_j$ 的构造,无需证明. (3.7)式是(3.6)式的直接推论,只是将 $u_\alpha^{(\beta)}$ 替换成 $z_{\alpha,\beta+1}$, $0\leqslant\beta<\nu_\alpha$. 又注意到(3.7)式的阶数是 $\Sigma\nu_j$, 所以

(3.7)式是最小阶的逆系统.

## 4　最小阶右逆系统的规范形

右可逆性仍由 Fliess 秩 $\sigma$ 表征：右逆问题有解当且仅当 $\sigma=p$. 设 $\varepsilon_l$ 表示第 $l$ 个输出的基本阶，其定义如下：

$$\varepsilon_l \triangleq \max\{k \geqslant 0 \mid \mathrm{d}y_l^{(k)} \text{ 在(2.5)式相关}\}+1, \tag{4.1}$$

$\mathrm{d}y_l^{(k)}$ 在(2.5)式中相关指它可以由(除它自己之外的)其它矢量线性表出. 并记

$$\boldsymbol{E}_y=\mathrm{span}\{\mathrm{d}y_l^{(k)} \mid l \in \underline{p}, k<\varepsilon_l\}, \tag{4.2}$$

由文[6]有

**引理 4.1.** 最小阶右逆的动态阶数

$$\dim \boldsymbol{z}=\dim \frac{\boldsymbol{E}_y}{\boldsymbol{E}_y \cap \mathrm{span}\{\mathrm{d}\boldsymbol{x}\}}=\sum_{l=1}^{p}(\varepsilon_l-\rho_l), \tag{4.3}$$

并且复合系统具有无交互结构 $y_l^{(\varepsilon_l)}=v_l,\ l \in \underline{p}$.

记

$$\boldsymbol{\rho}^{+} \triangleq \{l \mid \varepsilon_l>\rho_l\}, \quad \boldsymbol{\rho}^{0} \triangleq \{l \mid \varepsilon_l=\rho_l\},$$

构造一个动态装置(线性串联积分器)如下：

$$\dot{z}_{l1}=z_{l2}, \dot{z}_{l2}=z_{l3}, \cdots, \dot{z}_{l,\varepsilon_l-\rho_l}=v_l, \qquad (l \text{ 取遍 } \rho^{+}), \tag{4.4}$$

则其动态阶数为 $\sum_{l=1}^{p}(\varepsilon_l-\rho_l)$.

设法将(4.4)式和某个形如 $\boldsymbol{u}=\alpha(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 的非线性反馈合并起来，使复合系统产生无交互结构.

**引理 4.2.** 存在多元向量值函数 $\alpha$ 适合：将

$$\boldsymbol{u}=\alpha(\boldsymbol{x}, y_\alpha^{(\beta)}, \boldsymbol{v} \mid \alpha \in \underline{p}, \rho_\alpha \leqslant \beta \leqslant \varepsilon_\alpha), \tag{4.5}$$

代入(2.9)式右端后产生恒等式.

证明. 注意 $\sigma=p$ 时，(2.9)式的 $\partial \boldsymbol{\phi} / \partial \boldsymbol{u}$ 是 $p \times m$ 行满秩矩阵，所以，对 $l \in \underline{m}$ 且 $l>p$，任取函数

$$v_l=R_l(\boldsymbol{x}, y_\alpha^{(\beta)}, \boldsymbol{u} \mid \alpha \in \underline{p}, \beta \leqslant \varepsilon_\alpha), \tag{4.6}$$

满足矩阵 $\begin{pmatrix}\partial \boldsymbol{\phi} / \partial \boldsymbol{u} \\ \partial \boldsymbol{R} / \partial \boldsymbol{u}\end{pmatrix}$ 在正则点上可逆，则联立(2.9)式与(4.6)式，存在 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{R}\end{pmatrix}$ 的反函数 $\alpha$ 使命题成立.

注. 当(1.1)式是仿射系统时，(2.9)式可以写成

$$\boldsymbol{Y}^{(\rho)}=\phi_0+\phi \cdot \boldsymbol{u}. \tag{4.7}$$

而(4.6)式可以写成 $\boldsymbol{v}_*=R \cdot \boldsymbol{u}$ 的形式，$\boldsymbol{v}_*=(v_{m-p+1}, \cdots, v_m)^{\tau}$. 从而(4.5)式可以由下式确定：

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}\phi \\ R\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}^{(\rho)}-\phi_0 \\ \boldsymbol{v}_*\end{pmatrix} \triangleq \alpha(\boldsymbol{x}, y_\alpha^{(\beta)}, \boldsymbol{v}), \tag{4.8}$$

其中 $\psi,\psi_0,R$ 是 $\boldsymbol{x}$ 和 $y_\alpha^{(\beta)}(\alpha\in \underline{p},\rho_\alpha\leqslant\beta\leqslant\varepsilon_\alpha)$ 的向量值函数.

**定理 2.** 给定系统(1.1),则最小阶右逆系统可按下述步骤确定:

STEP1. 同定理 1 之 STEP1.

STEP2. 用 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},\cdots$ 等的随机选取的数值代入(2.2)式,再将(2.2)式代入(2.5)式,检验 $\mathrm{d}y_l^{(k)}$ 的相关性和左相关性,由此,依概率 1 获得 $\{\varepsilon_l\}$ 和 $\{\rho_l\}$ 的数值.

STEP3. 按照反函数程序确定(2.9)式的 $\psi_l$, $l\in\underline{p}$.

STEP4. 按照引理 4.2 及其注的步骤确定(4.5)式的函数 $\alpha$.

STEP5. 将(4.4),(4.5)式联立(仿射系统时用(4.8)式代替(4.5)式),并将(4.5)式(或(4.8))式中的 $y_\alpha^{(\beta)}$ 用 $z_{\alpha,\beta-\rho_\alpha+1}$ 代替($\beta<\varepsilon_\alpha$ 时)或用 $v_\alpha$ 代替($\beta=\varepsilon_\alpha$ 时). 所得系统即为最小阶右逆系统.

证明. 将(4.5)式的 $y_\alpha^{(\beta)}$ 替换后,代入(2.9)式验证,引用引理 4.2 和引理 4.1 即可.

本文分别建立了最小阶左、右逆的规范形,相应的实用设计过程仅用到线性程序和求反函数的程序,这对工程实践颇多便利.

## 参 考 文 献


[1] Hirschorn R M and Davis J H. Global Output Tracking for Nonlinear Systems. *SIAM Contr. Opt*. 1988, **26**: 1321—1330.

[2] Moog C H et al. The Model Matching Problem Using a Diff-Algebraic Approach. 1st Int. Indus. Appl. Math Paris, 1987.

[3] Cao Li and Zheng Yufan, Disturbance Decoupling via Dynamic Feedback. Int. J.Sys Sci. 1992, **23**(5): 683—694.

[4] Xia X H and Gao W B. A Minimal Order Compensator for Decoupling a Nonlinear System. Chinese Sci(A). 1988, (10):1107—1112.

[5] Glumineau A and Moog C H. Essential Orders and The Nonlinear Decoupling Problem. *Int.J.* Contr., 1989, **50**: 1825—1834.

[6] Cao Li and Zheng Yufan. On Minimal Compensators for Decoupling Control. *Sys. Contr. Lett.* 1992,**18**:121—128.

[7] Isidori A and Moog C H. On The Nonlinear Equivalent of the Notion of Transmission Zeros. in: Modelling and Adaptive Control. Springer-Verlag, New York, 1986,445—471.

[8] Cao Li and Zheng Yufan. Nonlinear Inverse System with Minimal Order. in Control Theory, Stochastic Analtsis and Applications, Worid Scientific, Singapore-New Jersey-London-Hong Kong. 1991, 96—104.

[9] Di Benedetto M D et al. Rank Invariants of Nonlinear Systems. *SIAM J. Contr. Opt*. 1989, **27**: 658—672.

# DESIGN LEFT AND RIGHT-INVERSE OF NONLINEAR SYSTEMS USING CANONICAL FORMS

CAO LI　　ZHENG YUFAN
*(Applied Mathematics Research Laboratory, East China Normal University Shanghai* 200062)

ABSTRACT

New design methods for obtaining left and right inverse systems with minimal order are given. The methods mainly use linear algebraic (matrix) manipulations and interpolations based on canonical forms of left and right inverse systems, respectively. The advantage of this method is to minimize the complexity of computation in getting the inverse of a system.

**Key words:** Nonlinear system; left-and right-inverse system with minimal order; canonical form.

**曹　立**　1962 年生于辽宁. 1984 年和 1987 年在华东师范大学数学系分别获得学士、硕士学位. 毕业后留在该校应用数学研究室工作. 当前的研究方向为非线性控制系统、智能系统、人口与经济系统等领域.

**郑毓蕃**　照片、简介见本刊第 20 卷第 2 期.