

短文

特征结构下基于极点配置的多变量 预测控制

吕剑虹

(东南大学动力系 南京 210018)

摘 要

本文提出了特征结构下基于极点配置的多变量预测控制方法,该方法通过选择一组可调参数使各特征子系统的闭环极点达到预定的数值,进而计算出各特征子系统控制器参数。仿真试验证实了本文算法的有效性。

关键词: 特征子系统,多变量系统,闭环极点,预测控制。

1 引言

文[1]在设计多变量预测控制系统时,首先将多变量对象分解为一组独立的 SISO 特征子系统,进而用单变量预测控制方法对各个特征子系统进行分别控制,控制规律是通过使一个二次型性能指标最小获得的。而在工程上,评估一个控制系统的性能主要观察它的动态响应,而系统动态响应的特点则主要取决于系统的闭环极点。本文的设计方法是在文[1]的基础上,通过引入并选择一组可调参数,使各特征子系统的闭环极点设置到预定的数值。

2 多变量对象在特征结构下的预测

假定系统模型为

$$\mathbf{y}(t) = G(q^{-1})\mathbf{u}(t-1) + \frac{1}{\Delta} \boldsymbol{\xi}(t), \quad (1)$$

式中, $\mathbf{u}(t-1)$, $\mathbf{y}(t)$, $\boldsymbol{\xi}(t)$ 分别为 m 维输入、输出和零均值的白噪声向量; $G(q^{-1})$ 为被控对象的传递函数矩阵,其特征向量(对偶特征向量)和特征权多项式分别记为 $W(q^{-1})$ ($V(q^{-1})$) 和 $\Lambda(q^{-1})$ 。

式(1)两边同时左乘 $\Delta V(q^{-1})$ 得

$$\Delta \tilde{\mathbf{y}}(t) = \Lambda(q^{-1})\Delta \tilde{\mathbf{u}}(t-1) + V(q^{-1})\xi(t), \quad (2)$$

式中, $\tilde{\mathbf{y}}(t) = V(q^{-1})\mathbf{y}(t)$, $\tilde{\mathbf{u}}(t-1) = V(q^{-1})\mathbf{u}(t-1)$.

为求特征结构下的输出预测, 定义矩阵运算算子 $\Lambda^{[k]}(q^{-1})$ 、 $V^{[k]}(q^{-1})$ 如下:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda^{[k]}(q^{-1}) &= q^k \left[\Lambda(q^{-1}) - \sum_{j=0}^{k-1} \Lambda(j)q^{-j} \right], \\ V^{[k]}(q^{-1}) &= q^k \left[V(q^{-1}) - \sum_{j=0}^{k-1} V(j)q^{-j} \right], \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$(k = 1, 2, \dots).$$

由式(2),(3)可获得对象在特征结构下的第 k 步预测为¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}^*(t+k) &= \tilde{\mathbf{f}}(t+k) + \sum_{i=0}^{k-1} H(i)\Delta \tilde{\mathbf{u}}(t+k-1-i), \\ \tilde{\mathbf{f}}(t+k) &= \tilde{\mathbf{y}}(t) + U_{k-1}\Delta \tilde{\mathbf{u}}(t-1) + M_{k-1}\xi(t). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中, 矩阵多项式 U_{k-1} 、 M_{k-1} 及矩阵 $H(k-1)$ 为

$$\left. \begin{aligned} U_{k-1} &= U_{k-2} + \Lambda^{[k]}(q^{-1}), \\ M_{k-1} &= M_{k-2} + V^{[k]}(q^{-1}), \\ H(k-1) &= H(k-2) + \Lambda(k-1). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

3 基于极点配置的预测控制算法

考虑第 i 个特征子系统, 为推导简单起见, 不计噪声对预测的影响, 由式(4),(5)得第 i 个特征子系统在未来 k 时刻的预测为

$$\tilde{y}_i^*(t+k) = \tilde{y}_i(t) + U_{k-1}^{(i)}(q^{-1})\Delta \tilde{u}_i(t-1) + \sum_{j=0}^{k-1} h_i^{(j)}\Delta \tilde{u}_i(t+k-1-j), \quad (6)$$

式中, $\tilde{y}_i^*(t+k)$ 、 $\tilde{y}_i(t)$ 分别为第 i 个特征子系统在未来 k 时刻的预测和现时输出值; $\Delta \tilde{u}_i(\cdot)$ 为第 i 个特征子系统的控制增量; $U_{k-1}^{(i)}(q^{-1})$ 是对角多项式矩阵 $U_{k-1}(q^{-1})$ 的第 i 个对角多项式; $h_i^{(j)}$ 是系数对角阵 $H(j)$ 的第 i 个对角元. 令 $k = 1, 2, \dots, N_i$, 可获得第 i 个特征子系统的预测方程如下:

$$\tilde{\mathbf{y}}_i^* = \tilde{\mathbf{y}}_i(t) + UU_i\Delta \tilde{\mathbf{u}}_i(t-1) + HH_i'\Delta \tilde{\mathbf{u}}_i, \quad (7)$$

式中,

$$\tilde{\mathbf{y}}_i^* = [\tilde{y}_i^*(t+1), \tilde{y}_i^*(t+2), \dots, \tilde{y}_i^*(t+N_i)]^r,$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_i(t) = [\tilde{y}_i(t), \tilde{y}_i(t), \dots, \tilde{y}_i(t)]^r,$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}_i(t-1) = [\Delta \tilde{u}_i(t-1), \Delta \tilde{u}_i(t-2), \dots, \Delta \tilde{u}_i(t-n_A)]^r,$$

(n_A 是多项式 $\Lambda(q^{-1})$ 的最高阶次),

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}_i = [\Delta \tilde{u}_i(t), \Delta \tilde{u}_i(t+1), \dots, \Delta \tilde{u}_i(t+N_p)]^r,$$

(假定 $\Delta u_i(t+j) = 0$, $j > N_p$).

UU_i 为 $N_i \times n_A$ 维系数矩阵, 其中矩阵第 j 行 ($j = 1, 2, \dots, N_i$) 是由多项式

1) 吕剑虹. 预测控制在热工过程控制中的应用研究, 东南大学博士论文, 1990.

$U_i^{(i)}(q^{-1})$ 的各系数组成; HH_i 是由系数 $h_i^{(j)}$ 所组成的 $N_i \times (N_p + 1)$ 维系数矩阵。

下面的设计思想是首先引入一组可选参数, 通过选择该组参数来保证特征子系统的闭环极点达到所希望的位置, 再在该特定的参数下通过优化某一指标函数来确定 $\Delta \tilde{u}_i(t)$ 。假定第 i 个特征子系统的未来控制增量存在如下关系

$$\Delta \tilde{u}_i(t+k) = p_k^{(i)} \Delta \tilde{u}_i(t), \tag{8}$$

控制增量向量 $\Delta \tilde{u}_i$ 可表达为

$$\Delta \tilde{u}_i = [1, p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_{N_p}^{(i)}]^T \Delta \tilde{u}_i(t). \tag{9}$$

将(9)式代入(7)式得

$$\tilde{y}_i^* = \tilde{y}_i(t) + UU_i \Delta \tilde{u}_i(t-1) + (\mathbf{h}_i + HH_i \mathbf{p}_i) \Delta \tilde{u}_i(t), \tag{10}$$

式中, $\mathbf{h}_i = [h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, \dots, h_i^{(N_i-1)}]^T$,

$$HH_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_i^{(0)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_i^{(N_i-2)} & \dots & \dots & h_i^{(N_i-N_p-1)} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{p}_i = [p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_{N_p}^{(i)}]^T$, \mathbf{p}_i 为 N_p 维待求参数向量, 选择的原理是保证第 i 个特征子系统的闭环极点为所希望的数值; $\Delta \tilde{u}_i(t)$ 的选取原则是在向量 \mathbf{p}_i 确定的情况下, 使如下二次型滚动指标 J 最小

$$J = (\tilde{y}_i^* - \tilde{y}_{ri})^T (\tilde{y}_i^* - \tilde{y}_{ri}) + \rho \Delta \tilde{u}_i^T \Delta \tilde{u}_i, \tag{11}$$

式中, \tilde{y}_{ri} 为第 i 个特征子系统的参考轨迹向量; ρ 为控制增量的权系数。

将方程(9),(10)代入(11)式, 并使 $\frac{\partial J}{\partial \Delta \tilde{u}_i(t)} = 0$, 可获得第 i 个特征子系统的控制增量 $\Delta \tilde{u}_i(t)$ 为

$$\Delta \tilde{u}_i(t) = Rr_i(\mathbf{p}_i) \tilde{y}_{ri}(t) - Ry_i(\mathbf{p}_i) \tilde{y}_i(t) - Ru_i(\mathbf{p}_i) \Delta \tilde{u}_i(t-1) \tag{12}$$

式中

$$\left. \begin{aligned} R_i(\mathbf{p}_i) &= (\mathbf{h}_i + HH_i \mathbf{p}_i)^T (\mathbf{h}_i + HH_i \mathbf{p}_i) + \rho(1 + \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i), \\ Rr_i(\mathbf{p}_i) &= (\mathbf{h}_i + HH_i \mathbf{p}_i)^T [q, q^2, \dots, q^{N_i}]^T / R_i(\mathbf{p}_i), \\ Ry_i(\mathbf{p}_i) &= (\mathbf{h}_i + HH_i \mathbf{p}_i)^T [1, 1, \dots, 1]^T / R_i(\mathbf{p}_i), \\ Ru_i(\mathbf{p}_i) &= (\mathbf{h}_i + HH_i \mathbf{p}_i)^T UU_i [1, q^{-1}, \dots, q^{-(N_i-1)}]^T / R_i(\mathbf{p}_i). \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

由式(12), 可得到第 i 个特征子系统的闭环反馈结构如图 1 所示。

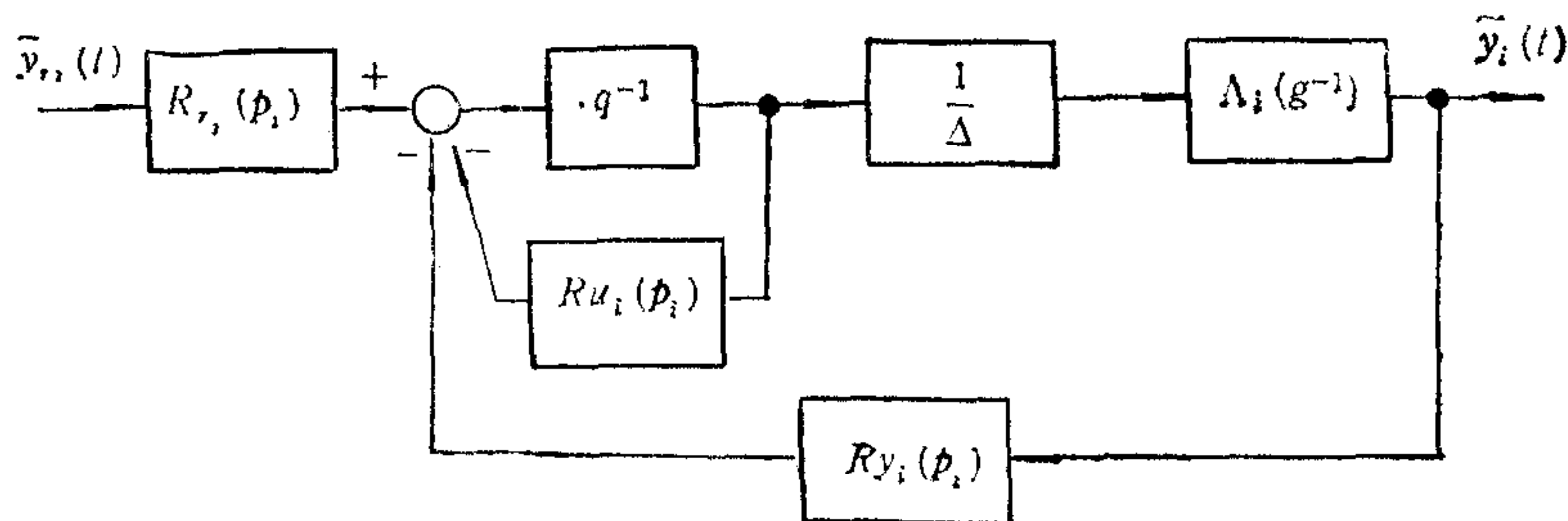


图 1 第 i 个特征子系统的闭环结构

图中, $\Delta = 1 - q^{-1}$; $\Lambda_i(q^{-1})$ 为对角阵 $\Lambda(q^{-1})$ 的第 i 个对角元, 记 $\Lambda_i(q^{-1}) = \lambda_0 + \lambda_1 q^{-1} + \dots + \lambda_{n_A} q^{-n_A}$. 由图 1, 第 i 个特征子系统的闭环特征方程为

$$CH_i(q^{-1}) = [1 + q^{-1}Ru_i(\mathbf{p}_i)]\Delta + q^{-1}\Lambda_i(q^{-1})Ry_i(\mathbf{p}_i), \quad (14)$$

式中特征方程 $CH_i(q^{-1})$ 的阶次为 $n_A + 1$. 向量 \mathbf{p}_i 是唯一不确定的参数, 它的变化直接影响着特征子系统的闭环极点位置, 显然, 适当选择 \mathbf{p}_i 向量可以获得预定的闭环极点. 假定 $T(q^{-1}) = 1 + t_1 q^{-1} + \dots + t_{n_A} q^{-n_A}$ ($n_i \leq n_A + 1$) 为期望的闭环特征方程, 则有

$$[1 + q^{-1}Ru_i(\mathbf{p}_i)]\Delta + q^{-1}\Lambda_i(q^{-1})Ry_i(\mathbf{p}_i) - T(q^{-1}) = 0. \quad (15)$$

将式(13)代入上式, 计算 q^{-i} 项系数得如下一组非线性代数方程:

$$q^{-i} \text{项系数} = \mathbf{p}_i^T C_i^{(1)} \mathbf{p}_i + C_i^{(2)} \mathbf{p}_i + C_i^{(3)} = 0, \quad (16)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n_A + 1),$$

式中系数 $C_i^{(1)}, C_i^{(2)}, C_i^{(3)}$ 可通过如下一组表达式确定

$$C_i^{(1)} = \bar{v}_i(HH_i^T HH_i + \rho I),$$

$$C_i^{(2)} = \{2\bar{v}_1 \mathbf{h}_i^T + [1, 0, \dots, 0]UU_i^T + \lambda_0[1, 1, \dots, 1]\}HH_i,$$

$$C_{n_A+1}^{(2)} = \{2\bar{v}_{n_A+1} \mathbf{h}_i^T + [0, 0, \dots, 0, -1]UU_i^T + \lambda_{n_A}[1, 1, \dots, 1]\}HH_i,$$

$$C_j^{(2)} = \{2\bar{v}_j \mathbf{h}_i^T + [0, 0, \dots, 0, -1, 1, 0, \dots, 0]UU_i^T$$

↓
第 j 列

$$+ \lambda_{j-1}[1, 1, \dots, 1]\}HH_i, \quad (1 < j < n_A + 1),$$

$$C_i^{(3)} = \bar{v}_i(\rho + \mathbf{h}_i^T \mathbf{h}_i) + \{[1, 0, \dots, 0]UU_i^T + \lambda_0[1, 1, \dots, 1]\}\mathbf{h}_i,$$

$$C_{n_A+1}^{(3)} = \bar{v}_{n_A+1}(\rho + \mathbf{h}_i^T \mathbf{h}_i) + \{[0, \dots, 0, -1]UU_i^T + \lambda_{n_A}[1, 1, \dots, 1]\}\mathbf{h}_i,$$

$$C_j^{(3)} = \bar{v}_j(\rho + \mathbf{h}_i^T \mathbf{h}_i) + \{[0, 0, \dots, 0, -1, 1, 0, \dots, 0]UU_i^T$$

↓
第 j 列

$$+ \lambda_{j-1}[1, 1, \dots, 1]\}\mathbf{h}_i. \quad (17)$$

式中 λ_j 为 $\Lambda_i(q^{-1})$ 中 q^{-j} 项的系数, \bar{v}_i 为多项式 $\Delta - T(q^{-1})$ 中的 q^{-i} 项的系数.

从上可知, 当 $T(q^{-1})$ 确定后, 方程组(16)中仅向量 \mathbf{p}_i 是待求参数 (有 N_p 个未知变量), 若在保证未知变量数等于方程组的方程个数, N_p 可选取为 $n_A + 1$. 方程(16)是一组非线性代数方程, 数学上求解的标准算法较多, 本文不再讨论其求解过程. 本文例中采用了牛顿下降法获得了理想的结果.

参数向量 \mathbf{p}_i 求解获得后, 再代入方程(13)就可获得第 i 个特征子系统的控制参数多项式 Ry_i . Ru_i 和 Rr_i .

采用上面的方法对各个特征子系统进行设计, 就完成了整个多变量系统的设计, 其计算过程如下:

- 1) 将多变量对象进行特征分解, 且利用公式(5)确定矩阵多项式 U_{k-1} 和系数矩阵 $H(k-1)$;
- 2) $i = 1$;
- 3) 形成系数矩阵 UU_i 、 HH_i 及向量 \mathbf{h}_i , 且选择第 i 个特征子系统所期望的闭环特

征方程 $T_i(q^{-1})$;

4) 利用式(17)确定非线性代数方程的系数 $C_i^{(1)}$ 、 $C_i^{(2)}$ 、 $C_i^{(3)}$, 且利用牛顿下降法求解方程(16)得参数向量 p_i ;

5) 利用式(13)确定第 i 个子系统的控制器参数 Rr_i 、 Ru_i 、 Ry_i ;

6) $i = i + 1$, 如果 $i > m$ 则7), 否则返回3);

7) 结束.

4 仿真

某 200MW 火电机组汽温系统的数学模型为^[2]

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3.65}{(1+60s)^5} & \frac{2.28}{(1+28s)^5} \\ \frac{-2.27}{(1+122s)^4} & \frac{-3.48}{(1+48s)^5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

式中 t_1 、 t_2 分别为过热器冷段出口汽温($^{\circ}\text{C}$)和再热器出口汽温($^{\circ}\text{C}$); u_1 、 u_2 分别为一级喷水量 (kg/sec) 和旁路阀开度(变化 10% 为一个单位).

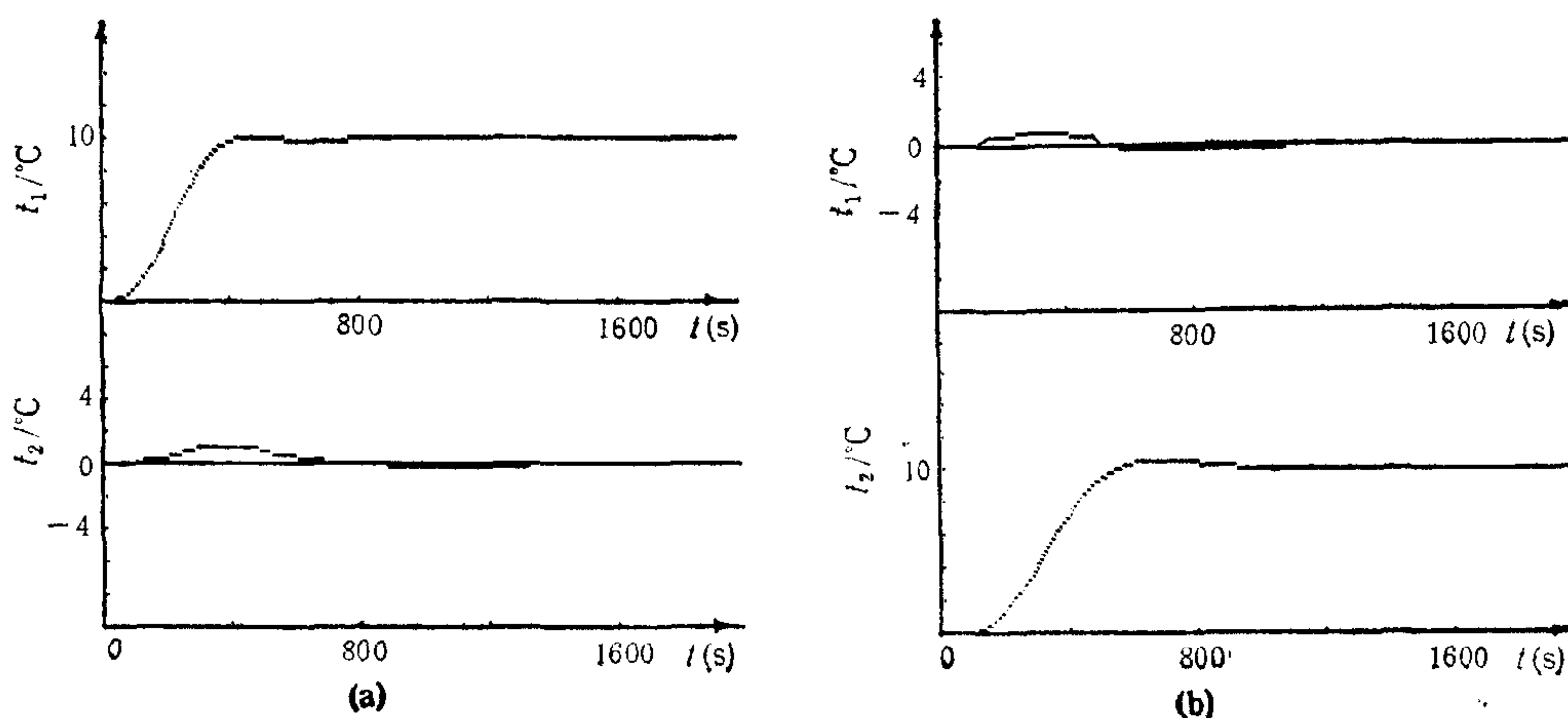
为削弱对象的高频关联性, 可通过高频补偿矩阵 $K_h(s)$ 对对象进行补偿

$$K_h(s) = \begin{bmatrix} 3.63 & -\frac{2.65 + 88.3s}{1 + 20s} \\ -0.27 & -\frac{1}{1 + 70s} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

采用上面提出的预测控制方法, 在适当选取系统参数后, 求得两特征子系统的控制器参数多项式如下:

$$Ry_1 = -0.123,$$

$$Ru_1 = 1.090 + 1.093q^{-1} + 1.014q^{-2} + 0.850q^{-3} + 0.701q^{-4}$$



(a) $\Delta t_{10} = 10^{\circ}\text{C}$

(b) $\Delta t_{20} = 10^{\circ}\text{C}$

图 2 多变量预测控制系统的输出响应

$$+ 0.500q^{-5} + 0.353q^{-6} + 0.251q^{-7} + 0.093q^{-8} + 0.049q^{-9},$$

$$Ry_2 = 0.244,$$

$$Ru_2 = 1.081 + 1.110q^{-1} + 1.047q^{-2} + 0.963q^{-3} + 0.817q^{-4} \\ + 0.597q^{-5} + 0.465q^{-6} + 0.326q^{-7} + 0.201q^{-8} + 0.104q^{-9}.$$

设汽温设定值 t_{10} 、 t_{20} 分别作阶跃变化, 系统的输出响应参见图 2。从图中可知, 利用本文的多变量预测控制方法使控制系统具有较好的跟踪性能且输出变量之间的互作用较小。

本文的多变量预测控制方法可通过配置特征子系统的闭环极点来获得控制器的参数, 所设计的控制系统具有理想的控制品质。

致谢。本文工作是在陈来九教授的指导下完成的, 在此深表感谢!

参 考 文 献

- [1] Cloud D J and Kouvaritakis B. Characteristic Decomposition and Multivariable Generalisation of Predictive Self-tuning Control. *Proc. IEE*. 1988, 3: 165—181.
 [2] 徐治皋, 陈来九, 带汽—汽换热器的 20 万千瓦汽温系统数学模型. *动力工程*. 1985, 28(4): 42—51.

THE MULTIVARIABLE PREDICTIVE CONTROL BASED ON POLE PLACEMENT UNDER EIGENVECTOR FRAME

LÜ JIANHONG

(Dept. of Power Engineering, Southeast University Nanjing 210018)

ABSTRACT

This paper proposes a framework for the multivariable Nyquist generalization of predictive control based on pole placement. The characteristic subsystem thus designed would have the desired closed-loop poles. This procedure can be accomplished by selecting a set of adjustable parameters. Furthermore, the control parameter polynomials of each subsystem can be easily determined. The simulation clearly demonstrates that the proposed algorithm is very effective.

Key words: Characteristic subsystem; multivariable system; closed-loop poles; predictive control.