第20卷 第5期 自动化学报 Vol. 20, No. 5
1994年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sep., 1994

短文

分散控制的完整性设计[1)]

黄苏南 邵惠鹤
(上海交通大学自控系 200030)

摘　　要

此文研究了分散控制的完整性问题，给出了当系统中执行器或传感器出现故障时分散控制系统仍具有完整性的设计方法，并用例子说明了该方法的有效性.

关键词: 分散控制，完整性，稳定性.

1 引言

任何实际控制系统，除了被控对象和控制器外，还有一系列的传感器和执行器. 这些传感器和执行器的失效可能会造成整个系统的瘫痪，从而导致严重的后果. 人们希望设计的控制系统，除了满足一定的指标，具有一定的最优性外，对其中某些故障因素也应有一定的“容忍”能力，即在发生故障情况下，控制系统仍能稳定地运行下去. 近年来，有关完整性的研究就是这方面的尝试[1~3]，所谓完整性，就是当执行器或传感器失效时控制系统仍保持稳定性. 不过目前大多数完整性研究都是针对一般系统而言的，本文则是考虑大系统情形下，分散控制的完整性.

2 问题的描述

考虑如图1所示的控制系统，这种系统结构在工程上是很一般的.

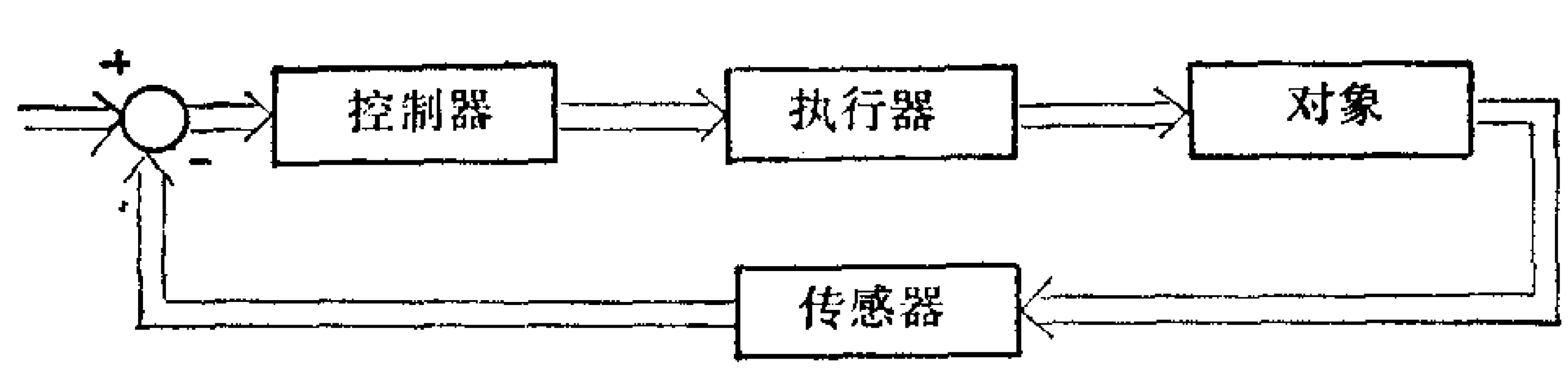

图1 控制系统结构

本文中研究的对象为线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t), \tag{2.1}$$

1) 本文研究得到兴利科技基金资助.
本文于1992年11月15日收到

这里 $\boldsymbol{x}\in R^n$，$\boldsymbol{u}\in R^m$，A,B 是相应维数的矩阵。

为表示执行器或传感器在控制系统通道中的"正常"或"断开"(即故障)，定义如下矩阵：

$$L=\mathrm{diag}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_r),$$

其中

$$\delta_i=\begin{cases}1，\text{当第 } i \text{ 个执行器或传感器通道正常时，}\\ 0，\text{当第 } i \text{ 个执行器或传感器通道断开时。}\end{cases}$$

矩阵 L 的设置应根据研究的是执行器或传感器放在如图 1 所示的位置上。因此，完整性问题就是研究对任意 $L\in\mathscr{L}$，这里 $\mathscr{L}$ 是 L 矩阵全部对角元素取 1，0 的可能性集合，系统的稳定性。然而当系统维数较高时，按照一般系统设计反馈律是困难的，下面两节考虑用分散控制的方法设计系统具有完整性。

3　对执行器故障的分散控制

在本节中始终假定传感器是正常的，矩阵 L 表示执行器情况，并将 L 放置在图 1 执行器位置上。

考虑一类关联子系统

$$s_i:\qquad \dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=A_i\boldsymbol{x}_i(t)+B_i\boldsymbol{u}_i(t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}A_{ij}\boldsymbol{x}_j(t), \tag{3.1}$$

这里 $\boldsymbol{x}_i\in R^{n_i},\boldsymbol{u}_i\in R^{m_i},A_i\in R^{n_i\times n_i},B_i\in R^{n_i\times m_i}$ 和 $A_{ij}\in R^{n_i\times m_j}$。

应用分散的反馈控制

$$\boldsymbol{u}_i=L_iK_i\boldsymbol{x}_i, \tag{3.2}$$

则系统(3.1)化为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=A_i\boldsymbol{x}_i(t)+B_iL_iK_i\boldsymbol{x}_i(t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}A_{ij}\boldsymbol{x}_j(t), \tag{3.3}$$

这里 $L_i\in\mathscr{L}_i$，$\mathscr{L}_i$ 是第 i 个子系统矩阵 L_i 对角线取遍 0，1 集合。

全局系统可表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+BLK\boldsymbol{x}(t). \tag{3.4}$$

这里

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{x}_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in R^N,\ N=\sum_{i=1}^{n}n_i,$$

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{u}_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in R^M,\ M=\sum_{i=1}^{n}m_i.$$

$$\begin{aligned}&A=[a_{ij}]_{N\times N},\\&a_{ij}=A_i,i=j;a_{ij}=A_{ij},i\neq j,\\&B=\mathrm{diag}(B_1,B_2,\cdots,B_n),\\&L=\mathrm{diag}(L_1,L_2,\cdots,L_n),\end{aligned}$$

$$K=\mathrm{diag}(K_1,K_2,\cdots,K_n).$$

为表示关联的影响，规定：如果 $A_{ij}\neq 0$，令 $\delta_{ij}=1$；如果 $A_{ij}=0$，令 $\delta_{ij}=0$，并定义

$$l_i=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ji},\qquad \Phi_{ji}=A_{ji}^{\mathrm{T}}A_{ji}.$$

定理 3.1. 假定矩阵 A 是渐近稳定的，(A_i,B_i) 是完全可控的. 如果对于给定的常数 $\alpha_i>0$ 和矩阵 $Q_i>0, i=1,2,\cdots,n$，方程

$$\alpha_iA_i^{\mathrm{T}}P_i+\alpha_iP_iA_i+2\alpha_iP_iB_iB_i^{\mathrm{T}}P_i+\alpha_il_iP_iP_i+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\alpha_j\Phi_{ji}+Q_i=0 \tag{3.5}$$

存在解 $P_i>0, i=1,2,\cdots,n$，那么采用 $K_i=-B_i^{\mathrm{T}}P_i$ 的系统(3.4)是渐近稳定的.

证明. 令

$$v(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i(\boldsymbol{x}_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}P_i\boldsymbol{x}_i,\ (\alpha_i>0)$$

是 Lyapunov 函数,沿时间函数求导数

$$\dot v(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\dot v_i(\boldsymbol{x}_i),$$

$$\begin{aligned}\dot v_i(\boldsymbol{x}_i)&=\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}(A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+K_i^{\mathrm{T}}L_iB_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iB_iL_iK_i)\boldsymbol{x}_i\\&\quad+\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}P_i\sum_{j}A_{ij}\boldsymbol{x}_j+\sum_{j}\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}A_{ij}^{\mathrm{T}}P_i\boldsymbol{x}_i\\&=\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}(A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i-2P_iB_iL_iB_i^{\mathrm{T}}P_i)\boldsymbol{x}_i\\&\quad+\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}P_i\sum_{j}A_{ij}\boldsymbol{x}_j+\sum_{j}\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}A_{ij}^{\mathrm{T}}P_i\boldsymbol{x}_i.\end{aligned}$$

对于两个实向量 $\boldsymbol{\zeta}=[\zeta_1\ \zeta_2\cdots\zeta_n]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\xi}_1=[\xi_1\ \xi_2\cdots\xi_n]^{\mathrm{T}}$ 有不等式 $\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}-2\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}\geqslant 0$，因而 $2\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}\leqslant\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}$，采用该式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}P_i\sum_{j}A_{ij}\boldsymbol{x}_j&\leqslant\frac{1}{2}\sum_{j}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}P_iP_i\boldsymbol{x}_i+\frac{1}{2}\sum_{j}\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}A_{ij}^{\mathrm{T}}A_{ij}\boldsymbol{x}_j\\&=\frac{1}{2}l_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}P_iP_i\boldsymbol{x}_i+\frac{1}{2}\sum_{j}\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}A_{ij}^{\mathrm{T}}A_{ij}\boldsymbol{x}_j,\end{aligned}$$

对于 $\sum\limits_{j}\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}A_{ij}^{\mathrm{T}}P_i\boldsymbol{x}_i$ 有同样结果. 注意到 $-L_i\leqslant I_i$ (单位阵),因此

$$\dot v_i(\boldsymbol{x}_i)\leqslant\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}(A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+2P_iB_iB_i^{\mathrm{T}}P_i+l_iP_iP_i)\boldsymbol{x}_i+\sum_{j}\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}A_{ij}^{\mathrm{T}}A_{ij}\boldsymbol{x}_j,$$

$$\begin{aligned}\dot v(x)&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\dot v_i(\boldsymbol{x}_i),\\&\leqslant\sum_{i}\alpha_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}(A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+2P_iB_iB_i^{\mathrm{T}}P_i+l_iP_iP_i)\boldsymbol{x}_i\\&\quad+\sum_{i}\alpha_i\sum_{j}\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}A_{ij}^{\mathrm{T}}A_{ij}\boldsymbol{x}_j\\&=\sum_{i}\alpha_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}(A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+2P_iB_iB_i^{\mathrm{T}}P_i+l_iP_iP_i)\boldsymbol{x}_i\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_i x_i^{\mathrm{T}}\left(\sum_j \alpha_j A_{ji}^{\mathrm{T}} A_{ji}\right)\boldsymbol{x}_i \\
&=\sum_i \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\left(\alpha_i A_i^{\mathrm{T}} P_i+\alpha_i P_i A_i+2\alpha_i P_i B_i B_i^{\mathrm{T}} P_i+\alpha_i l_i P_i P_i+\sum_j \alpha_j \Phi_{ji}\right)\boldsymbol{x}_i \\
&=-\sum_i \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}} Q_i \boldsymbol{x}_i \leqslant -\underline{\lambda}\|x\|^2.
\end{aligned}
$$

所以系统(3.4)是渐近稳定的,证毕。

由定理 3.1，容易给出分散控制的完整性设计步骤：

步骤 1. 选择合适的常数 $\alpha_i>0$，以及矩阵 $Q_i>0$；

步骤 2. 计算矩阵方程(3.5),求出矩阵 P_i；

步骤 3. 如果 $P_i>0$，则继续下一步;否则返回到步骤 1；

步骤 4. 按照 $K_i=-B_i^{\mathrm{T}}P_i$，求得局部反馈增阵。

4　对传感器故障的分散控制

假定系统中执行器均正常,矩阵 L 表示传感器情况,并放置在图 1 所示的位置。

对于关联子系统(3.1),分散控制采用

$$\boldsymbol{u}_i=K_iL_i\boldsymbol{x}_i,$$

则系统(3.1)变为

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=A_i\boldsymbol{x}_i(t)+B_iK_iL_i\boldsymbol{x}_i(t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}A_{ij}\boldsymbol{x}_j(t), \tag{4.1}$$

其对应的全局系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+BKL\boldsymbol{x}(t). \tag{4.2}$$

现在给出对于子系统任意传感器失效时，怎样设计局部反馈增益阵 K_i，以保证全局系统(4.2)稳定。

定理 4.1. 考虑传感器情况，假定矩阵 A 是渐近稳定的，(A_i,B_i) 是完全可控的. 如果对于给定的 $\alpha_i>0$，矩阵 $Q_i>0, i=1,2,\cdots,n$，下列方程

$$\alpha_iA_iP_i+\alpha_iP_iA_i^{\mathrm{T}}+\alpha_iS_iP_i^2S_i+\alpha_il_iP_iP_i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\alpha_j\Phi_{ij}^{\mathrm{T}}+Q_i=0, \tag{4.3}$$

存在解 $P_i>0$($S_i=\beta_i^{1/2}I_i-\beta_i^{-1/2}B_iB_i^{\mathrm{T}}$，$\beta_i>0$，$I_i$ 是相应维数的单位阵)，那么采用 $K_i=-B_i^{\mathrm{T}}P_i$ 的系统(4.2)是渐近稳定的。

证明. 类似定理 3.1 的证明过程。

注 1. 定理 3.1 (定理 4.1) 的条件并非充分必要的，如不满足可通过凑试 Q_i，再解方程(3.5)或(4.3)。

5　举例

例. 一个考虑执行器故障的分散控制设计问题。

$$S_1:\quad A_1=\begin{bmatrix}-10 & -3\\ 3 & -12\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad A_{12}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & -4\end{bmatrix};$$

$$S_2:\quad A_2=\begin{bmatrix}-7 & -2\\ 3 & -10\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad A_{21}=\begin{bmatrix}4 & -4\\ 4.4 & 6\end{bmatrix}.$$

假定全部状态变量是可测的。选择 $\alpha_1=\alpha_2=1$，Q_1 和 Q_2 如下：

$$Q_1=\begin{bmatrix}6.64 & 0.6\\ 0.6 & 1\end{bmatrix},\qquad Q_2=\begin{bmatrix}6.75 & -2.5\\ -2.5 & 4\end{bmatrix}.$$

解矩阵方程(3.5)，得到

$$P_1=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix},\qquad P_2=\begin{bmatrix}2.5 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix},$$

则分散控制的反馈增益阵分别为

$$K_1=[-1\ \ -4],\qquad K_2=[-1\ \ -3],$$

因此由定理 3.1 知该控制系统对执行器失效具有完整性。也可用下面方法检验其正确性：

当 $L_1=(1),L_2=(1)$ 时，$\lambda(A+BLK)=\{-4.47,-15.16\pm5.29j,-11.19\}$；

当 $L_1=(0),L_2=(1)$ 时，$\lambda(A+BLK)=\{-4.82,-12.93\pm5.22j,-11.32\}$；

当 $L_1=(1),L_2=(0)$ 时，$\lambda(A+BLK)=\{-3.80,-13.98\pm5.26j,-11.24\}$；

可见设计的分散控制器对于执行器故障具有完整性。

参 考 文 献

[1] Shimemura E and Fujita M. A Dessign Method for Linear State Feedback Systems Possessing Integrity Based on a Solution of a Riccati-Type Equation, *Int. J. Contr.*, 1985, **42**(4): 887—899.

[2] 倪茂林. 具有完整性和良好动态特性的系统设计. 控制与决策，1990，5(4)：48—51.

[3] Huang Sunan and Shao Huihe. Design of Control Systems Possessing Integrity Against the Actuator Failures and the Sensor Failures. Proc. of IEEE Int. Symp. on Ind. Electron., Xi'an 1992, 93—97.

A DESIGN METHOD FOR DECENTRALIZED CONTROL SYSTEMS WITH INTEGRITY

HUANG SUNNAN　　SHAO HUIHE

(Department of Automatic Control, Shanghai Jiao Tong University 200030)

ABSTRACT

In this paper, we present a design method of the decentralized control systems with integrity. The control design for interconnected subsystems is in the decentralized form which could make a overall large-scale system stable against the actuator or sensor failures.

Key words: Decentralized control; integrity; stable.