第20卷 第6期 自动化学报 Vol. 20, No. 6
1994年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1994

参数摄动系统的鲁棒 LQ 反馈控制[1)]

袁立嵩 蒋慰孙
(华东理工大学自动化研究所 上海 200237)

摘 要

本文研究了不确定系统的鲁棒 LQ 反馈控制器的综合问题. 对于具有线性有界实参数摄动的系统，首先把不确定系统的鲁棒 LQ 综合问题转化成N个确定系统的联立 LQ 综合问题. 并据此提出了相应的综合算法. 理论分析和实例计算结果表明所提出的方法具有较广的应用范围和较少的保守性.

关键词：不确定系统，鲁棒控制，LQ 反馈控制.

1 引言

80年代以来，不确定系统的鲁棒性分析与综合问题再次成为国内外广大学者关注的热点. 大多数实际控制系统存在不确定性，它不仅影响实际控制系统的性能，严重时还会影响系统的稳定性. 线性二次型 (LQ) 反馈控制是控制系统综合的一个重要方法. 由于运用该方法综合得到的控制系统具有许多优良特性，因而在实际中被广泛采用. 但是，当实际系统存在有界非微不确定时，根据名义系统综合得到的 LQ 控制器往往不能满足实际系统的性能要求，甚至不能保证系统的稳定性.

鲁棒 LQ 综合就是解决当系统具有有界非微摄动时，如何求得一控制器不仅能保证闭环系统渐近稳定，而且能使整个系统的 LQ 性能指标满足一定要求. 在这方面，Chang 和 Peng 于1972年首次定义了保证代价(guaranteed cost)和保证代价控制 (guaranteed cost control) 的概念[1]，并给出了当系统摄动为结构式实参数线性有界摄动时的综合算法. 文[2]将该结果作了修正和推广. 文[3,4]给出了摄动参数系数阵为秩1情况下的综合方法. 但是，文[1,2]的结果只适用于控制系数阵为单参数摄动的情况，而文[3,4]的结果对系统不确定性的结构形式的要求又过于苛刻.

对于随机系统的 LQG 设计，Berstein 等人将 Chang 和 Peng 的结果进行了平行推广，提出了辅助最小 (Auxiliary Minimal) 的概念，并给出相应的静态反馈和动态反馈设计方法[5,6].

本文首先对文[2,3]描述的不确定性给出一个新的表示方法，然后据此将不确定系统的鲁棒 LQ 综合问题转化成N个确定系统的多模态 LQ 综合问题，从而简化了问题的分析，并为降低由系统不确定性引起的综合结果的保守性提供了可能. 此外还给出了鲁棒

本文于1992年5月18日收到.
1) 国家自然科学基金重点资助课题.

LQ 反馈控制的综合算法。

2 系统不确定性的表示及问题阐述

考虑下列系统：

$$\dot{x} = [A_0 + \Delta A(r)]x + [B_0 + \Delta B(r)]u, \tag{2.1a}$$

$$x(0) = x_0,\ X_0 = x_0 x_0^T. \tag{2.1b}$$

式中 $x, x_0 \in R^n$; $u \in R^m$; $X_0, A_0, \Delta A \in R^{n\times n}$; $B_0, \Delta B \in R^{n\times m}$; $r = (r_1, r_2, \cdots r_l)^T \in \Omega \subset R^l$ 为系统的参数向量；Ω 为不确定参数空间，满足

$$\underline{r_i} \leqslant r_i \leqslant \bar{r}_i;\ i = 1,2,\cdots l. \tag{2.2}$$

定义性能指标

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt. \tag{2.3}$$

式中 $Q \geqslant 0$（正半定）；$R > 0$（正定）。

定义 2.1.[1] 对于式(2.1)—(2.3)描述的系统，假设存在控制器 u^* 和常数 $J^* > 0$，对 $\forall r \in \Omega$ 满足闭环系统稳定，且性能指标 $J \leqslant J^*$，则常数 J^* 为保证代价（g.c.），控制器 u^* 为保证代价控制（g.c.c.）。

对于系统(2.1)，设 $\Delta A(r)$ 和 $\Delta B(r)$ 分别具有下列形式：

$$\Delta A(r) = \sum_{i=1}^{l} r_i \bar{A}_i,\quad \Delta B(r) = \sum_{i=1}^{l} r_i \bar{B}_i. \tag{2.4}$$

由于参数空间 Ω 为 R^l 中的一个超立方体，该立方体具有 $N = 2^l$ 个顶点，设 A_i, $B_i (i = 1,\cdots N)$ 分别表示对应于各个顶点的 ΔA 和 ΔB 的值，则有以下定理。

定理 2.1. 对于式(2.4)描述的不确定性可以表示为如下形式：

$$\Delta A(r) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i,\ \Delta B(r) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_0 B_i. \tag{2.5}$$

式中 $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1,\cdots,N$; A_i, B_i 定义同前。

证明. 令 $r^i = (r_1^i, r_2^i, \cdots r_l^i)$ 表示参数空间 Ω 的第 i 个顶点参数值，则对 $\forall r \in \Omega$ 有

$$r = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i r^i,\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = 1,\cdots N.$$

$$\therefore r_j = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i r_j^i, j = 1,\cdots,l,$$

$$\Delta A(r) = \sum_{j=1}^{l} r_j \bar{A}_j = \sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i r_j^i\right)\bar{A}_j = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sum_{j=1}^{l} r_j^i \bar{A}_j = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i.$$

同理可证得 $\Delta B = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i B_i$.　　证毕。

定理 2.2. 对于形如 $\dot{x} = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i\right)x$ 的系统，其中 $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1, \alpha_i \geqslant 0, i = 1,$

$\cdots N$. 如果$\exists S \geqslant 0$及有界$P > 0$满足

1) $\left[S^{\frac{1}{2}}, \left(A_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i\right)\right]$可检测, (2.6a)

2) $(A_0 + A_i)^T P + P(A_0 + A_i) + S = 0$. (2.6b)

则该系统渐近稳定.

证明. 设 $A = A_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i$,则$P$满足式(2.6b),意味着$P$也满足$A^T P + PA + S = 0$.

$$\therefore P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} S e^{At} \mathrm{d}t.$$

则由文[7] B-I-15 的结果可知, $P > 0$有界及式(2.6)成立, 也即意味着原系统渐近稳定. 证毕.

设系统(2.1)具有式(2.4)的不确定性,控制采用静态状态反馈 $u = Kx$, 则闭环系统可表示为

$$\dot{x} = \left(A_{c0} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_{ci}\right) x. \tag{2.7}$$

式中
$$A_{c0} = A_0 + B_0 K, \ A_{ci} = A_i + B_i K. \tag{2.8}$$

又设
$$\widetilde{A}_c = A_{c0} + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_{ci}, \ \widetilde{A}_{ci} = A_{c0} + A_{ci}. \tag{2.9}$$

推论 2.1. 设系统(2.1)具有式(2.4)的不确定性,则反馈控制器 $u = Kx$ 鲁棒镇定系统的一个充分条件是对 $\forall i = 1, \cdots N$, $\exists P > 0$ 有界及$S \geqslant 0$满足

1) $[S^{\frac{1}{2}}, \widetilde{A}_c]$ 可检测, (2.10a)

2) $\widetilde{A}_{ci}^T P + P\widetilde{A}_{ci} + S = 0$. (2.10b)

定理 2.3. 对于具有式(2.4)的不确定性系统(2.1)控制器 $u = Kx$ 为 g.c.c 的一个充分条件是对任意 $i = 1, \cdots, N$,有$P > 0$有界且满足

1) $[Q^{\frac{1}{2}}, \widetilde{A}_c]$ 可检测, (2.11a)

2) $\widetilde{A}_{ci}^T P + P\widetilde{A}_{ci} + Q_c \leqslant 0$. (2.11b)

式中
$$Q_c = Q + K^T R K. \tag{2.11c}$$

若上述结论成立,则 $J = tr(PX_0)$ 为 g.c.

证明. $\because Q \geqslant 0, R > 0, \therefore Q_c = Q + K^T R K \geqslant 0$. 又 $\because [Q^{\frac{1}{2}}, \widetilde{A}_c]$ 可检测, $\therefore [Q_c^{\frac{1}{2}}, \widetilde{A}_c]$ 可检测.

则由推论 2.1 可知, $P > 0$有界且满足式(2.11a)和(2.11b), 所以,定理的结论成立.

令 $P_0 > 0$ 且 P_0 有界,满足对 $\forall i = 1, \cdots, N$ 有

$$\widetilde{A}_{ci}^T P_0 + P_0 \widetilde{A}_{ci} + Q_c = 0, \tag{2.12}$$

$$\therefore \widetilde{A}_c^T P_0 + P_0 \widetilde{A}_c + Q_c = 0, \tag{2.13}$$

则闭环系统性能指标为

$$J = tr(P_0 X_0). \tag{2.14}$$

又由式(2.13)和(2.11b)可得 $\exists \Pi > 0$ 满足

$$\tilde{A}_{ci}^T(P-P_0)+(P-P_0)A_{ci}+\Pi=0,$$

$$P-P_0=\int_0^\infty(e^{\tilde{A}_{ci}^T t}\pi e^{\tilde{A}_{ci}t})\mathrm{d}t\geqslant 0,$$

$$\therefore J(P)=tr(PX_0)\geqslant J(P_0)=tr(P_0X_0),$$

$$J(P)\ \text{为 g.c. 且}\ u=Kx\ \text{为 g.c.c.},$$

定理成立.　　证毕.

注 2.1. 定义 2.1 表明不确定系统的鲁棒 LQ 综合问题可以转化成 g.c.c. 和 g.c. 的求取.

注 2.2. 对于形如式(2.4)的摄动的系统(2.1), 其 g.c. 和 g.c.c 的求取可以转化成 N 个顶点系统的多模态分析与综合. 这正是本文的基本思想, 它将为后面的工作带来方便.

3 鲁棒 LQ 控制器的综合

引理 3.1.[1] 设系统(2.1)具有形如式(2.4)的不确定性,如果 $u=Kx$ 满足 $[Q^{\frac{1}{2}},\tilde{A}_c]$ 可检测,且 $\exists P>0$ 有界并满足

$$A_{c0}^TP+PA_{c0}+G(P)+Q_c=0. \tag{3.1a}$$

式中 $G(P)$ 满足对 $\forall r\in\Omega$ 及 $P>0$ 有

$$[\Delta A(r)+\Delta B(r)K]^TP+P[\Delta A(r)+\Delta B(r)K]\leqslant G(P), \tag{3.1b}$$

则

1) 闭环系统 $\tilde{A}_c$ 渐近稳定,

2) $0\leqslant P_0\leqslant P, P_0$ 满足对 $\forall i=1,\cdots N$, 有

$$A_{ci}^TP_0+PA_{ci}+Q_c=0, \tag{3.1c}$$

3) $J=tr(PX_0)\geqslant J^*=tr(P_0X_0)$. (3.1d)

定理 3.1. 设系统(2.1)具有式(2.4)的摄动, 则存在矩阵算子 $M(P)$ 对 $\forall r\in\Omega$ 及 $P>0$ 有

$$\Delta A(r)^TP+P\Delta A(r)\leqslant M(P) \tag{3.2a}$$

的充要条件是

$$A_i^TP+PA_i\leqslant M(P),\ i=1,2,\cdots,N. \tag{3.2b}$$

证明. $A_i^TP+PA_i\leqslant M(P)$,

$$\Longleftrightarrow\sum_{i=1}^N\alpha_i(A_i^TP+PA_i)\leqslant\sum_{i=1}^N\alpha_iM(P)=M(P),$$

$$\Longleftrightarrow\Delta A(r)^TP+P\Delta A(r)\leqslant M(P).$$

证毕.

定理 3.2. 设系统(2.1)具有式(2.4)的摄动, 则矩阵算子 $L(P)$ 满足对 $\forall r\in\Omega$ 及 $P>0$ 有

$$L(P)\leqslant P(B_0R^{-1}B_0^T+B_0R^{-1}\Delta B(r)^T+\Delta B(r)R^{-1}B_0^T)P \tag{3.3a}$$

的充要条件是

$$L(P) \leqslant P(B_0R^{-1}B_0^T + B_0R^{-1}B_i^T + B_iR^{-1}B_0^T)P,\ i = 1,\cdots,N. \tag{3.3b}$$

证明.（同上,略).

定理 3.3. 设系统(2.1)具有形如式2.4的摄动，$L(P)$ 及 $M(P)$ 定义如前. 且令$\hat{R}$满足

$$PB_0\hat{R}^{-1}B_0^TP = L(P), \tag{3.4a}$$

其中 $P > 0$ 有界且满足

$$A_0^TP + PA_0 + Q - PB_0\hat{R}^{-1}B_0P + M(P) = 0. \tag{3.4b}$$

如果 $K = -R^{-1}B_0^TP$ 满足 $(Q^{\frac{1}{2}},\tilde{A}_c)$ 可检测,则 $u = Kx$ 为 g.c.c.

证明. 将式(3.2a)及(3.3a)代入式(3.4b),整理后根据定理 2.3 和引理 3.1可证得本定理.

注 3.1. 引理3.1给出了鲁棒 LQ 控制综合的一种方法,其关键是矩阵算子 $G(P)$的求取. 定理 3.1 和 3.2 指出对具有形如式(2.4)的摄动的系统(2.1),其 $G(P)$ 的求取只需考虑N个顶点系统,因而简化了分析方法,并为降低由于系统的不确定性而引起的综合结果的保守性提供了可能.

注 3.2. 定理 3.3 给出了一个鲁棒 LQ 反馈控制器的具体表达式，这为以后控制器的具体实现带来了很大方便.

4 鲁棒 LQ 控制器的实现

如前所述，鲁棒 LQ 综合的关键是 $M(P)$ 和 $L(P)$ 的求取，因此这里首先给出 $M(P)$ 和 $L(P)$ 的求取算法.

算法 1. $M(P)$ 和 $L(P)$ 的求取

第一步. 令 $M_1(P) = A_1^TP + PA_1,\ i = 1,$

$$L_1(P) = P(B_0R^{-1}B_0^T)P + P(B_0R^{-1}B_1^T)P + P(B_1R^{-1}B_0^T)P;$$

第二步. $i = i + 1,\ \Delta M = M_{i-1}(P) - (A_i^TP + PA_i),$

$$\Delta L(P) = L_{i-1}(P) - P(B_0R^{-1}B_0^T + B_0R^{-1}B_i^T + B_iR^{-1}B_0^T)P;$$

第三步. 令 $W_i^1A_iW_i^{1T} = \Delta M(P), W_i^2V_iW_i^{2T} = \Delta L(P)$，其中 $A_i = \mathrm{diag}(A_i^1\cdots A_i^n)$，$V_i = \mathrm{diag}(V_i^1,\cdots V_i^n)$ 均为特征值矩阵，W_i^1 和 W_i^2 为相应的正交特征向量矩阵;

第四步. 令 $A_i^+ = \mathrm{diag}(A_i^{+1},\cdots,A_i^{+n})$，$V_i^+ = \mathrm{diag}(V_i^{+1},\cdots,V_i^{+n})$，

且
$$A_i^{+j} = \begin{cases} A_i^j, & A_i^j \geqslant 0 \\ 0, & A_i^j < 0 \end{cases},$$

$$V_i^{+j} = \left\{\begin{matrix} V_i^j, & V_i^j \leqslant 0 \\ 0, & V_i^j > 0 \end{matrix}\right\},\ j = 1,\cdots,n;$$

第五步. 令 $M_i(P) = W_i^1A_i^+W_i^{1T} + A_i^TP + PA_i,$

$$L_i(P) = W_i^2V_i^+W_i^{2T} + P(B_0R^{-1}B_0^T + B_0R^{-1}B_i^T + B_iR^{-1}B_0^T)P;$$

第六步. 如果 $i < N$转第二步,否则继续;

第七步. $M(P) = M_N(P),\ L(P) = L_N(P)$,结束.

定理 4.1. 由算法 1 构造的 $M(P)$ 和 $L(P)$ 对 $\forall P > 0$ 满足式(3.2b)和(3.3b).

证明．由算法 1 的第四步可知

$$\Lambda_i^+ - \Lambda_i \geqslant 0,\ 且\ \Lambda_i^+ \geqslant 0,$$

$$\therefore W_i^1 \Lambda_i^+ W_i^{1T} - W_i^1 \Lambda_i W_i^{1T} \geqslant 0,\ 且\ W_i^1 \Lambda_i^+ W_i^{1T} \geqslant 0.$$

由算法 1 的第二步和第五步可知

$$M_i(P) - M_{i-1}(P) = W_i^1 \Lambda_i^+ W_i^{1T} - W_i^1 \Lambda_i W_i^{1T} \geqslant 0,$$

$$\therefore M_i(P) \geqslant M_{i-1}(P).$$

又 $\because W_i^1 \Lambda_i^+ W_i^{1T} \geqslant 0$,

$$\therefore M_i(P) - (A_i^T P + P A_i) \geqslant 0,\ M_i(P) \geqslant A_i^T P + P A_i.$$

又 $\because M(P) = M_N(P)$,

$\therefore$ 由算法 1 构造得到的 $M(P)$ 满足式(3.2b)，同理可证得构造出的 $L(P)$ 满足式 (3.3b)．　　证毕．

算法 2. 鲁棒 LQ 控制器的求取

第一步．$i = 0$，选取初值 K_0, P_0；

第二步．$i = i + 1$，由算法 1 得 $L^i(P)$ 和 $M^i(P)$；

第三步．由 $P_{i-1} B_0 \hat{R}_i B_0^T P_{i-1} = L^i(P)$，求得 $\hat{R}_i^{-1}$；

第四步．求解方程

$$(A_0 + B_0 K_{i-1})^T P_i + P_i (A_0 + B_0 K_{i-1}) + Q + K_{i-1}^T \hat{R}_i^{-1} K_{i-1} + M^i(P) = 0;$$

第五步．令 $\nabla K_i = -R^{-1} B_0^T P_i - K_{i-1}$；

第六步．如果 $\|\nabla K_i\| = [tr(\nabla K_i^T \nabla K_i)]^{1/2} \leqslant \beta$，则转第九步，否则继续．其中 β 为预定的计算精度；

第七步．$K_i = K_i + \alpha K_{i-1}$，$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$，以保证每次迭代计算得到的性能指标 $J_i \leqslant J_{i-1}$；

第八步．转第二步；

第九步．$K_i = K_{i-1}$，结束．

算法 1 和 2 给出了鲁棒 LQ 反馈控制器综合的具体步骤，与文[1,2]比较，后者的结果仅适用于 B 阵中只存在单参数摄动，且 A 阵中参数摄动的绝对值必须相等，即 $|r_i| = |\bar{r}_i| = |\underline{r}_i|$．而当 $|\bar{r}_i| \neq |\underline{r}_i|$ 时，采用文 [1,2] 的算法进行求解必将带来保守性．因此，本文提出的算法比文[1,2]的算法适用范围更广．

在文[1,2]中，矩阵算子 $M(P)$ 的求取采用如下方法：

设 $F_i(P) = |\bar{r}|(\bar{A}_i^T P + P\bar{A}_i) = W_i \Lambda_i W_i^T$,

$$F_i'(P) = W_i |\Lambda_i| W_i^T,$$

$$则\ M(P) = \sum_{i=1}^{l} F_i'.$$

理论分析表明，采用此方法得到的 $M(P)$ 肯定不小于用本文算法 1 求得的 $M(P)$，因而其综合结果具有更大的保守性．

5 示例

例 5.1. 对于系统

$$\dot{x} = (A_0 + r_1 A_1)x + (B_0 + r_2 B_2)u,$$

其性能指标为 $J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$,

其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

$$-1 \leqslant r_1 \leqslant 1, \quad -1 \leqslant r_2 \leqslant 1,$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = 1, \text{初始状态} \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

针对上述系统，采用本文提出的算法综合得到的 g.c.c. 增益为

$$K = [-0.87 \quad -1.91 \quad -2.09],$$

相应的 g.c. 为

$$J^* = 16.7199.$$

对于同一问题，用文[1]方法求得的 g.c.c. 增益为 $K' = [-0.80 \quad -2.42 \quad -3.13]$，相应的 g.c. 为

$$J' = 34.56.$$

由此可见，采用本文所提方法得到的结果更不具保守性.

例 5.2. 对于不确定系统

$$\dot{x} = (A_0 + r_1 A_1 + r_2 A_2)x + (B_0 + r_3 B_3)u,$$

其中

$$A_0 = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.01 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.2855 & -0.707 & 1.3229 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.2031 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0.4422 & 0.1711 \\ 3.0447 & -7.5922 \\ -5.52 & 4.99 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.0673 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$-1 \leqslant r_1 \leqslant 1, \quad -1 \leqslant r_2 \leqslant 1, \quad -1 \leqslant r_3 \leqslant 1.$$

采用性能指标为

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt.$$

其中

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

用本文算法得到的结果为

$$K=\begin{bmatrix}-2.017 & 0.799 & 2.575 & 3.027\\ 0.275 & 1.323 & -0.446 & -1.290\end{bmatrix},$$

$$J'=5.26,$$

名义系统的闭环特征值

$$\lambda_1=-18.25,\ \lambda_2=-6.52,\ \lambda_3,\lambda_4=-0.639\pm j0.385.$$

而用文[8]得到的结果为

$$K=\begin{bmatrix}-0.92 & 0.06 & 0.93 & 1.33\\ -0.06 & 0.82 & 0.27 & -0.83\end{bmatrix},$$

$$J^*=7.36.$$

名义系统的闭环特征值

$$\lambda_1=-23.42,\ \lambda_2=-8.08,\lambda_3,\lambda_4=-0.65\pm j0.27.$$

由此可见,本文所提方法的优越性.

6 结论

对于系统存在结构式实参数线性有界摄动，采用本文提出的方法综合得到的控制器不仅能保证系统的稳定性,而且可以保证系统的 LQ 性能. 同时，由于本文对不确定性采用了新的表示方法，这为扩大本文结果的适用范围和降低其保守性提供了可能. 理论分析及实例计算表明本文算法的优越性.

同文[1,2]一样,算法 2 也具有收敛性和局部最小的问题. 它对初值的选取有很高的要求，否则算法将不能收敛. 对于初值 K_0 和 P_0 的选取可采用文[9]提出的方法，这样就保证了 K_0 镇定整个不确定系统. 如果求得这样的 K_0，则算法将收敛,但还不能解决局部最优问题.

参 考 文 献

[1] Chang S S L, Peng T K C. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1972,**17**:474—483.

[2] Hu H X, Loh N K. Robust optimal parametric LQ control with A guaranteed cost bound and applications. *Int. J. Contr.*, 1989, **50**: 2489—2502.

[3] Noldus E. Design of robust state feedback laws. *Int. J. Contr.*, 1982, **35**:935—948.

[4] Petersen I R,Hollot CV. A riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. *Automatica*, 1986, **22**: 397—411.

[5] Berstein D S, Haddad W M. Robust stability and performence Analysis for space systems via quadramic lyapunov bounds. Proc. 27th C.D.C., 1988:2182—2187.

[6] Berstein D S. Robust static and dynamic output feedback stabilization: deterministic and stochastic perspectives. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1987,**32**:1076—1084.

[7] 须田信英(日)等,自动控制中的矩阵理论. 科学出版社;1979.

[8] Kosmidon OI. Robust stability and performence of systems with structured and bounded uncertainties: an exteension of guaranteed cost approach. *Int. J. Contr.*, 1990, **52**: 627—640.

[9] Badr R I, Bernuss, J B, Bila A Y. Stability and performance robustness for multivariable linear systems. *Automatica*, 1989, **25**:935—942.

ROBUST LQ FEEDBACK CONTROL FOR SYSTEMS WITH PARAMATER PERTURBATION

YUAN LISONG JIANG WEISUN
(*Resigned Institute of Automatic Control, East China University of Science and Technology, Shanghai* 200237)

ABSTRACT

The problem of designing controllers for uncertain systems is studied. First, the problem of robust LQ synthesis for systems with linear bounded parameter perturbation is converted into the problem of simultaneous LQ synthesis of N deterministic systems, and then the corresponding algorithms for robust LQ synthesis are presented. Theoretical analysis and examples show that the method presented is more flexible and less conservative than previous ones.

Key words: Uncertain systems, robust control, LQ feedback control.

袁立嵩 1967年生于江苏省海门县。1989年毕业于华东化工学院生产过程自动化专业，同年在该校自动化仪表及装置专业攻读硕士学位，1991年转入工业自动化专业攻读博士学位。主要研究兴趣：工业过程模型化及控制、鲁棒控制、自适应控制及智能控制。

蒋慰孙 简介及照片见本刊第18卷第1期。