

# 动态平衡运量配流问题及其 稳态伴随解算法<sup>1)</sup>

黄海军

(北京航空航天大学管理学院 北京 100083)

## 摘 要

动态平衡运量配流问题的建模和求解是发展智能车辆导航系统的理论基础。本文对多起点单讫点交通网络建立了连续时间最优控制模型,该模型的最优解对应于动态用户平衡解。文中提出的稳态伴随解算法避免了解复杂的两点边界值问题,可以获得原问题的近似解。该算法利用了交通网络和计算机网络的特性,计算速度较高,可用于城市交通流的实时控制。

**关键词:** 动态平衡运量配流,稳态伴随解,最优控制问题。

## 1 引言

静态配流问题的建模、校正、求解算法和应用已发展得相当成熟了<sup>[1-3]</sup>。近年来,城市交通规划和控制的研究热点之一是动态平衡配流问题<sup>[4]</sup>。为了计算路段上的时变交通流量,相继出现了三种建模方法和对应的求解算法:(1)离散时间最优控制论模型<sup>[5-6]</sup>;(2)连续时间最优控制论模型<sup>[7-8]</sup>;(3)分段静态近似最优化模型<sup>[9]</sup>。其中,连续时间最优控制论模型对交通流的运动和控制特性解释得较好,但迄今为止还没有研究出有效的算法。众所周知的几种直接优化方法,如共轭梯度法和变尺度法,只能用在小型网络上<sup>[10]</sup>。对于含有几百甚至上千变量的城市交通网络系统,寻找高效快速的算法已成为当务之急。

当前,最优控制论已成功地应用在通信网络的动态建模和控制上<sup>[11]</sup>。城市交通网络与电话、邮件传递网络十分相似,本文参考并修改了通信网络的建模框架与运算技术,将之运用在城市交通网络。

## 2 数学模型

对于一个多起点单讫点的城市交通网络,定义如下符号(参见图1)。

$L$ 为所有路段(有向)的集合; $N$ 为所有节点的集合; $T$ 为研究的时间段, $t \in [0, T]$ ; $I(i)$ 为指向节点 $i$ 的路段的箭尾点的集合; $O(i)$ 为离开节点 $i$ 的路段的箭头点的集合;

本文于1992年6月1日收到。

1) 部分得到国家自然科学基金和香港理工学院研究基金资助。

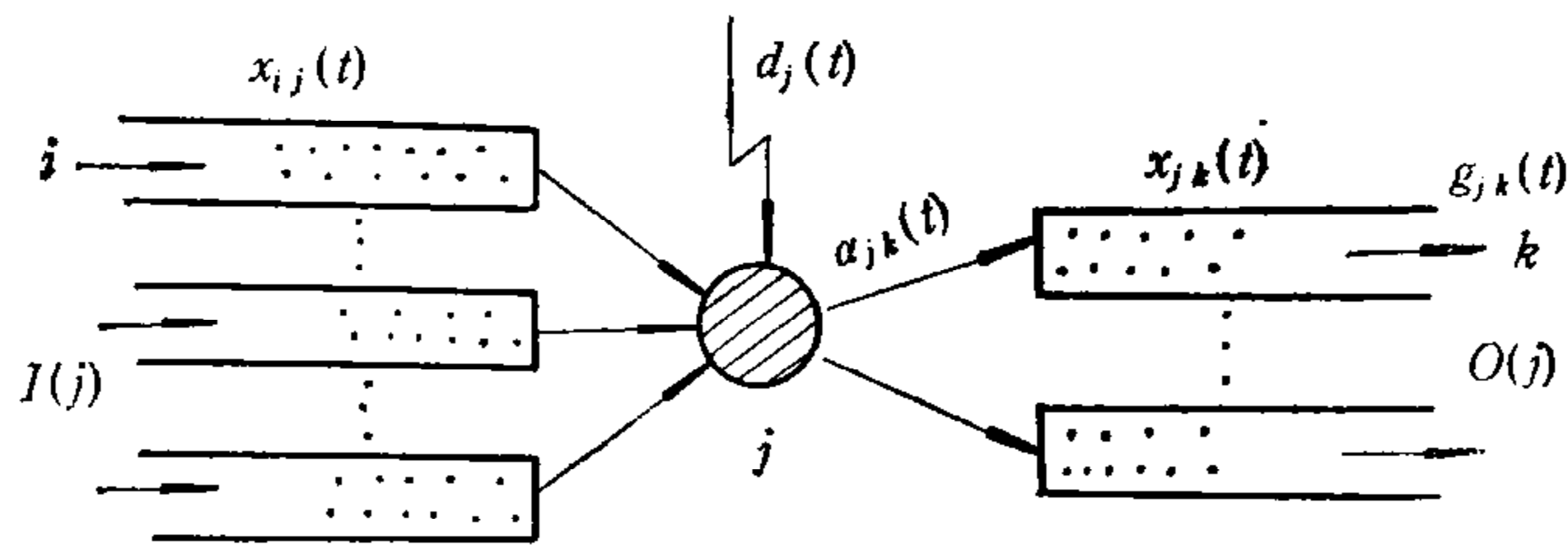


图 1 符号定义参考图

$x_{jk}(t)$  为在  $t$  时刻路段  $(j, k)$  上的车辆数, 它是状态变量;  $\alpha_{jk}(t)$  为在  $t$  时刻进入节点  $j$  的总运量中, 将有这么多比例的车辆驶进路段  $(j, k)$ , 它是控制变量;  $d_j(t)$  为  $t$  时刻从节点  $j$  进入网络的单位时间交通量;  $g_{jk}(x_{jk})$  为路段  $(j, k)$  的车流输出率, 一般假定它是  $x_{jk}$  的二阶可微和单调增加的凹函数, 且令  $\lim_{x_{jk} \rightarrow \infty} g_{jk}(x_{jk}) = 1$ ;  $u_{jk}$  为路段  $(j, k)$  的设计服务水平, 即单位时间内可以通过的车辆数, 为常量。

路段上车辆数量的变化可用下面的一阶微分方程描述:

$$\dot{x}_{jk}(t) = -u_{jk}g_{jk}(x_{jk}) + \alpha_{jk}(t) \left[ d_j(t) + \sum_{i \in I(j)} u_{ij}g_{ij}(x_{ij}) \right], \quad (j, k) \in L, t \in [0, T]. \quad (1)$$

对状态变量有初始值

$$x_{jk}(0) = x_{jk}^{(0)}, \quad (j, k) \in L. \quad (2)$$

对控制变量, 有

$$0 \leq \alpha_{jk}(t) \leq 1, \quad (j, k) \in L, t \in [0, T], \quad (3)$$

$$\sum_{k \in O(j)} \alpha_{jk}(t) = 1, \quad j \in N, t \in [0, T]. \quad (4)$$

建立最优控制问题的数学模型, 是为了寻找最佳控制律。使

$$\begin{aligned} \min J = & \sum_{(j, k)} \int_0^T \int_0^{x_{jk}(t)} u_{jk} c_{jk}(w) g'_{jk}(w) dw dt \\ & + \sum_{(j, k)} \int_0^T x_{jk}(t) dt, \quad \text{s. t. (1)---(4)}. \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $c_{jk}(w)$  表示一辆车在路段  $(j, k)$  上行驶的费用, 并假定是  $x_{jk}$  的单调上升、可微凸函数;  $g'_{jk}(w)$  表示一阶导数。式(5)中, 第一项没有直观的经济含义, 对它的解释至今仍有争议, 但它的存在对推导平衡流解有重要的作用; 第二项代表车辆在所有节点前的总等待时间。

### 3 最优性条件和动态平衡原则

#### 3.1 最优性条件

先构造式(5)的哈密顿函数

$$H(x, p, \alpha, t) = \sum_{(j, k)} \left[ x_{jk}(t) + \int_0^{x_{jk}(t)} u_{jk} c_{jk}(w) g'_{jk}(w) dw \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{(j,k)} P_{jk}(t) \left\{ -u_{jk} g_{jk}(x_{jk}) + \alpha_{jk}(t) \left[ d_j(t) \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{i \in I(j)} u_{ij} g_{ij}(x_{ij}) \right] \right\}, \quad (6)
\end{aligned}$$

式中  $p_{jk}(t)$  是方程(1)的伴随变量。

根据庞特里亚金的极小值原理,式(5)的最优解满足

$$H(x^*, p^*, \alpha^*, t) = \min_{\alpha} H(x^*, p^*, \alpha, t), \text{ s.t. (3)—(4)式} \quad (7)$$

和状态方程(1)与伴随方程

$$\begin{aligned}
\dot{p}_{jk}(t) & = dp_{jk}(t)/dt = -\partial H/\partial x_{jk} \\
& = -1 - u_{jk} c_{jk}(x_{jk}) g'_{jk}(x_{jk}) + u_{jk} g'_{jk}(x_{jk}) \left[ p_{jk}(t) - \sum_{l \in O(k)} \alpha_{kl}(t) p_{kl}(t) \right], \\
& \quad (j, k) \in L, t \in [0, T] \quad (8)
\end{aligned}$$

以及边界条件(2)式和

$$p_{jk}(T) = 0, (j, k) \in L. \quad (9)$$

对于普通的最优控制问题,求解过程是:(a)从(7)式中获得  $\alpha^* = U[x(t), p(t)]$ ; (b)将  $\alpha^*$  代入方程(1)和(8)式中,与边界条件(2)和(9)一起构成一个两点边界值问题,求解这个问题得到  $x^*$  和  $p^*$ ; (c)最优控制就是  $\alpha^* = U[x^*(t), p^*(t)]$ . 可是由于从(7)式中很难获得最优控制的解析公式,正则方程组(1)和(8)式又十分复杂,使得这个两点边界值问题难以解出。

仔细审视哈密顿函数(6)式和极小值问题(7)式的结构,可以发现(7)式能够在节点的基础上重写或等价于

$$\min_{\alpha_{jk}} \sum_{k \in O(j)} p_{jk}(t) \left\{ -u_{jk} g_{jk}(x_{jk}) + \alpha_{jk}(t) \left[ d_j(t) + \sum_{i \in I(j)} u_{ij} g_{ij}(x_{ij}) \right] \right\}, j \in N.$$

上式又等价于

$$\min_{\alpha_{jk}} \left[ \sum_{k \in O(j)} \alpha_{jk}(t) p_{jk}(t) \right] \left[ d_j(t) + \sum_{i \in I(j)} u_{ij} g_{ij}(x_{ij}) \right], j \in N. \quad (10)$$

上式中的第二个括号项不影响  $\alpha_{jk}(t)$  的取值,故它又等价于

$$\begin{aligned}
& \min_{\alpha_{jk}} \sum_{k \in O(j)} \alpha_{jk}(t) p_{jk}(t), \\
& \text{s.t. (3)—(4), } j \in N, t \in [0, T]. \quad (11)
\end{aligned}$$

令  $\hat{p}_j = \min_{k \in O(j)} \{p_{jk}\}$ ,  $j \in N$ , 由(3)和(4)式有

$$\sum_{k \in O(j)} \alpha_{jk}(t) p_{jk}(t) = \hat{p}_j, j \in N, t \in [0, T]. \quad (12)$$

因此,式(11)的解是

$$\alpha_{jk}(t) = \begin{cases} 0, & \text{若 } p_{jk} > \hat{p}_j; \\ 1, & \text{若集合 } O(j) \text{ 中仅有一条路段使 } p_{jk} = \hat{p}_j; \\ \text{不定,} & \text{否则.} \end{cases} \quad (13)$$

换句话说,在某个时间区段  $[t_1, t_2]$  内,若  $O(j)$  中有多条路段使  $p_{jk} = \hat{p}_j$ , 则控制

变量无法定值, 这就是奇异现象,  $[t_1, t_2]$  是奇异区间.

### 3.2 动态平衡原则

**定义.** 如果任意时刻和在任意选择的节点→终点对之间, 从该节点到终点的所有正在被选用的路径上的当前瞬态行驶费用相等, 并等于最小费用, 则相应的时变交通流就是动态用户平衡流.

显然, 根据上述定义中的平衡原则来配流, 并不一定要求同一时刻从同一节点进入网络的车辆到达终点时消耗相等的费用, 它只要求在相同的节点→终点对之间正在被使用的所有路径上, 瞬时测得的费用相等.

记网络的单讫点为  $q$ , 从节点  $j$  至  $q$  的路径集合为  $R_j^q$ . 对于给定的状态  $x(t)$ , 定义从  $j$  到  $q$  的某条路径  $r \in R_j^q$  的费用或“长度”为

$$\phi(r, x) = \sum_{(m,n) \in r} \left[ c_{mn}(x_{mn}) + \frac{\dot{p}_{mn}(x_{mn})}{u_{mn}g'_{mn}} + (u_{mn}g'_{mn})^{-1} \right]. \quad (14)$$

**定理 1.** 如果路径  $r \in R_j^q$  上的任意路段  $(m, n) \in r$ , 均有  $\alpha_{mn} > 0$ , 此即意味着路径  $r$  当前正被选用, 则有结论:  $\phi(r, x) = \min \{ \phi(s, x), s \in R_j^q \}$ .

证明.  $\forall r \in R_j^q$ , 设以节点表达的  $r = \{j_1 = j, j_2, j_3, \dots, j_{k-1}, j_k = q\}$ , 由(14)式有

$$\phi(r, x) = \sum_{i=1}^{k-1} \left[ c_{j_i j_{i+1}} + \frac{\dot{p}_{j_i j_{i+1}}}{u_{j_i j_{i+1}} g'_{j_i j_{i+1}}} + (u_{j_i j_{i+1}} g'_{j_i j_{i+1}})^{-1} \right]. \quad (15)$$

将(8)式代入(15)中, 得

$$\phi(r, x) = \sum_{i=1}^{k-1} \left[ p_{j_i j_{i+1}} - \sum_{l \in O(j_{i+1})} \alpha_{j_{i+1} l} p_{j_{i+1} l} \right]. \quad (16)$$

记  $\hat{p}_{j_i} = \min_{l \in O(j_i)} \{ p_{j_i l} \}$ ; 由(12)式有  $\sum_{l \in O(j_{i+1})} \alpha_{j_{i+1} l} p_{j_{i+1} l} = \hat{p}_{j_{i+1}}$ . 因此

$$\phi(r, x) \geq \sum_{i=1}^{k-1} (\hat{p}_{j_i} - \hat{p}_{j_{i+1}}) = \hat{p}_{j_1} - \hat{p}_{j_k} = \hat{p}_j - \hat{p}_q = \hat{p}_j. \quad (17)$$

上式中令  $\hat{p}_q = 0$ . 可见  $\hat{p}_j = \min_{s \in R_j^q} \{ \phi(s, x) \}$ . 当且仅当路径  $r$  上的  $\alpha_{j_i j_{i+1}} > 0 (i = 1,$

$2, \dots, k-1)$  时, 有  $\phi(r, x) = \hat{p}_j = \min_{s \in R_j^q} \{ \phi(s, x) \}$ . 证毕.

定理 1 说明, 在时刻  $t$ , 若路径上所有路段对应的控制变量为正值, 则路径的费用必定是该节点→终点对之间测得的瞬态最小费用. 故式(5)求得的最优解满足动态平衡原则.

## 4 稳态伴随解算法

当求解式(5)的过程中出现奇异现象时, 将得不到最优控制律的解析式. 下面考察伴随变量取稳态值时的情形. 令

$$\dot{p}_{jk}(t) = 0. \quad (18)$$

代入(8)式得

$$\begin{aligned}
 p_{jk}(t) &= c_{jk}(x_{jk}) + (u_{jk}g'_{jk})^{-1} + \sum_{l \in O(k)} \alpha_{kl} p_{kl} \\
 &= c_{jk}(x_{jk}) + (u_{jk}g'_{jk})^{-1} + \hat{p}_k.
 \end{aligned} \tag{19}$$

由(19)式知  $p_{jk}(T) > 0$ , 这与(9)式的横切边界条件矛盾, 所以在稳态伴随变量假设下设计的算法只能求得式(5)的近似解.

定义路径  $r = \{(j, k), (k, l), \dots\} \in R_j^q$ , 设  $\alpha_{kl}(t) > 0$ , 且  $p_{kl} = \hat{p}_k$ , 则有

$$\hat{p}_k = c_{kl}(x_{kl}) + (u_{kl}g'_{kl})^{-1} + \hat{p}_l. \tag{20}$$

将式(20)代入式(19), 且沿路径  $r$  的路段替代下去, 得

$$p_{jk}(t) = \sum_{(m,n) \in r} [c_{mn}(x_{mn}) + (u_{mn}g'_{mn})^{-1}]. \tag{21}$$

注意到(14)式中  $\phi(r, x)$  的定义, 以及  $\dot{p}_{jk}(t) = 0$ , 得

$$\phi(r, x) = p_{jk}(t) = \hat{p}_j(t). \tag{22}$$

所以,  $p_{jk}(t) = \hat{p}_j(t)$  就是时刻  $t$  从节点  $j$  至终点  $q$  的最短路径  $r$  的费用或“长度”.

**定理 2.** 在稳态伴随变量假设下, 即(18)式成立时, 对应的时变路段流仍然满足动态用户平衡原则.

证明. 与定理 1 的证明过程相同, 只须在(15)式中注意到  $\dot{p}_{j_i j_{i+1}}(t) = 0, j = 1, 2, \dots, k-1$ .

**定理 3.** 在稳态伴随变量假设下, 在确定的节点→终点对之间的路径内, 没有环.

证明. 采用反证法: 假设存在一个带环的路径  $R_j^j = \{j_1 = j, j_2, j_3, \dots, j_{m-1}, j_m = j\}$ , 且这个环正在被车辆行驶着, 即  $\alpha_{j_i j_{i+1}} > 0, i = 1, 2, \dots, m-1$ .

对第一个节点  $j_1$ , 有

$$\hat{p}_{j_1} = [c_{j_1 j_2} + (u_{j_1 j_2} g'_{j_1 j_2})^{-1}] + \hat{p}_{j_2}. \tag{23}$$

沿着环计算下去, 可得

$$\hat{p}_{j_1} = \sum_{i=1}^{m-1} [c_{j_i j_{i+1}} + (u_{j_i j_{i+1}} g'_{j_i j_{i+1}})^{-1}] + \hat{p}_{j_1}, \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} [c_{j_i j_{i+1}} + (u_{j_i j_{i+1}} g'_{j_i j_{i+1}})^{-1}] = 0. \tag{25}$$

显然, 式(25)是不应该的.

证毕.

设从节点  $j$  出发, 有  $M (\geq 2)$  个路段的  $P_{jk_i} = \hat{p}_j, (j, k_i) \in O(j), i = 1, 2, \dots, M$ . 此时出现了奇异情形. 令  $r_i$  和  $r_{i+1}$  是从  $j$  到  $q$  的两条不同路径,  $r_i$  上的出发路段是  $(j, k_i)$ ,  $r_{i+1}$  上的出发路段是  $(j, k_{i+1})$ .

因为  $r_i$  与  $r_{i+1}$  的费用相等, 由(21)式, 有

$$\sum_{(k,l) \in r_i} [c_{kl} + (u_{kl}g'_{kl})^{-1}] = \sum_{(a,b) \in r_{i+1}} [c_{ab} + (u_{ab}g'_{ab})^{-1}]. \tag{26}$$

两边对  $t$  求导, 得

$$\sum_{(k,l) \in r_i} [h_{kl}(t)\dot{x}_{kl}(t)] = \sum_{(a,b) \in r_{i+1}} [h_{ab}(t)\dot{x}_{ab}(t)], \tag{27}$$

式中

$$h_{kl}(t) = \frac{dc_{kl}(x_{kl})}{dx_{kl}(t)} - \frac{u_{kl}(d^2g_{kl}/dx_{kl}^2)}{(dg_{kl}/dx_{kl})^2}, \quad (28)$$

$$h_{ab}(t) = \frac{dc_{ab}(x_{ab})}{dx_{ab}(t)} - \frac{u_{ab}(d^2g_{ab}/dx_{ab}^2)}{(dg_{ab}/dx_{ab})^2}. \quad (29)$$

将状态方程(1)中的  $\dot{x}_{kl}$  和  $\dot{x}_{ab}$  代入式(27)中,得

$$\begin{aligned} & \sum_{(k,l) \in r_i} h_{kl}(t) \left\{ -u_{kl}g_{kl}(x_{kl}) + \alpha_{kl}(t) \left[ d_k(t) + \sum_{i \in I(k)} u_{ik}g_{ik}(x_{ik}) \right] \right\} \\ & = \sum_{(a,b) \in r_{i+1}} h_{ab}(t) \left\{ -u_{ab}g_{ab}(x_{ab}) + \alpha_{ab}(t) \left[ d_a(t) + \sum_{i \in I(a)} u_{ia}g_{ia}(x_{ia}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, M-1; t \in [0, T]$ .

显然,方程组(30)中有  $M-1$  个互相独立的方程,第  $M$  个方程是守恒条件,即

$$\sum_{i=1}^M \alpha_{jk_i}(t) = 1, \quad t \in [0, T]. \quad (31)$$

因此,方程组(30)和(31)有唯一的确定解。但须注意的是,对式(30)和(31),只有当  $j$  节点的全部下游节点的控制变量解出来以后,  $j$  节点的控制变量才能求解出来。故网络的求解过程必须从终点  $q$  开始,向上逐点进行。

综上所述,为式(5)设计了如下近似解算法:

步骤 1) 在状态  $x(t)$ , 对所有的  $(j, k) \in L$ , 计算“长度”, 即  $[c_{jk}(x_{jk}) + (u_{jk}g'_{jk})^{-1}]$ ;

步骤 2) 对所有的节点  $j \in N$ , 计算从  $j$  到  $q$  的最短“距离”, 即  $\hat{p}_j$ , 且令  $\hat{p}_q = 0$ ;

步骤 3) 对节点  $j \in N$ , 计算  $p_{jk_i}$ , 即  $p_{jk_i} = (j, k_i)$  的“长度”+  $\hat{p}_{k_i}$ ,  $k_i \in O(j)$ ; 若  $p_{jk_i} = \hat{p}_j$ , 则路段  $(j, k_i)$  必被车辆当前选用;

步骤 4) 对步骤 3 中已被确认选用的路段, 计算  $h_{jk_i}$ ,  $k_i \in O(j)$  且  $p_{jk_i} = \hat{p}_j$ 。

步骤 5) 求解过程从  $q$  开始, 向上逐点进行; 对每个节点写出方程组(30)和(31), 求解得到  $\alpha_{jk_i}(t)$  的值;

步骤 6) 对状态方程(1)积分, 得到  $x_{jk}(t + \Delta t)$ 。

步骤 7) 令  $x_{jk}(t) = x_{jk}(t + \Delta t)$ , 转步骤 1 直至  $t = T$ 。

为了使求解过程稳定, 应设置  $\Delta t \leq \min_{(j,k) \in L} \{S_{jk}/V_{jk}\}$ ,  $S_{jk}$  是路段  $(j, k)$  的几何长度,  $V_{jk}$  是车辆在  $(j, k)$  上的自由行驶速度。

本算法的优点: (1) 避免了解复杂的两点边界值问题; (2) 将整个网络的大规模方程组分解成单个节点上的小型方程组, 因而计算速度得以大幅度提高; (3) 可以在节点上配置微型计算机并与主机连网, 微机负责节点的小型方程组的求解, 将结果传给主机, 主机对状态方程积分, 把状态变量的值再送给微机, 如此就实现了全系统的快速并行运算, 从而能够达到交通流的实时控制。

上述算法只能得到原问题的近似解, 这是因为在计算路径“长度”的式(14)中, 取第 2 项为零。在实际控制问题中, 可以增加一个伴随变量值的反馈器, 它监测伴随变量值的变化, 反馈给主机以修正路径的“长度”, 从而提高算法的精度。在式

$$\dot{p}_{jk}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{p_{jk}(t + \Delta t) - p_{jk}(t)}{\Delta t} \right]$$

中,仿真间隔越短,  $\dot{p}_{jk}(t)$  的值就越准确。

## 5 伴随变量的稳定性

可以很容易地证明,当网络上的交通载荷非常轻或非常重时,伴随变量的稳定解是可以得到和保持的,此时我们设计的算法是精确的。在其它情形中,伴随变量方程(8)是不稳定的,虽然驻点解可以得到,但不可以维持,此时算法是近似的。

解下面的线性方程组可得到(8)式的驻点解:

$$0 = -1 - u_{jk}c_{jk}(x_{jk})g'_{jk}(x_{jk}) + u_{jk}g'_{jk}(x_{jk}) \left[ p_{jk} - \sum_{l \in O(k)} \alpha_{kl} p_{kl} \right]. \quad (32)$$

对于最末的路段,式(32)变为

$$0 = -1 - u_{jk}c_{jk}(x_{jk})g'_{jk}(x_{jk}) + u_{jk}g'_{jk}(x_{jk})p_{jk}(t). \quad (33)$$

显然,式(33)有伴随变量的唯一解。如果我们从  $q$  开始向上游动解方程组(32),即只有当  $(j,k)$  的下游路段都已求解完毕时,才求解路段  $(j,k)$  的方程,则对给定的  $x$  和  $\alpha$ ,伴随变量方程组(8)有唯一的驻点  $p_{x,\alpha}^*$ 。

但是,  $p_{x,\alpha}^*$  存在并不意味着伴随方程是稳定的。记(32)式的右边为  $\Phi$ , 其 Jacobi 矩阵

$$\partial\Phi/\partial p = [\partial\Phi_{jk}/\partial p_{mn}]|_{p_{x,\alpha}^*} \quad (34)$$

不失一般性。矩阵  $\Phi$  中路段的排列按从上到下的顺序进行,这正好与求解(32)式的顺序相反。可以发现, Jacobi 阵中对角线下方的元素全部为零,而对角线上的元素是  $u_{jk}g'_{jk}(x_{jk}), (j,k) \in L$ , 特征方程是

$$\prod_{(j,k) \in L} [\lambda_{jk} - u_{jk}g'_{jk}(x_{jk})] = 0. \quad (35)$$

由于  $g_{jk}(x_{jk})$  是单调上升函数,可知(35)式中的特征值都是正值,因此伴随方程组是不稳定的。伴随变量虽然能获得驻点值,但不能持久地保持这个值,因而从节点到讫点的最佳路径不仅“长度”是变化的,位置也是变化的。

## 6 算例

图 2 所示为含有三个交通量起源节点和一个终止节点的网络,路段费用函数为

$$c_{jk}(x) = \hat{c}_{jk}[1 + 0.15(x/u_{jk})^4], (j,k) \in L. \quad (36)$$

式中  $\hat{c}_{jk}$  是路段的零流行驶时间。

交通需求量在 24 小时内以双峰值的函数形式进入网络,即

$$d_j(t) = a_{j1} \exp\{ -[(t - a_{j2})/a_{j3}]^2 \} + b_{j1} \exp\{ -[(t - b_{j2})/b_{j3}]^2 \}. \quad (37)$$

式中  $\{a_{j1}\} = \{350, 320, 280\}$ ,  $\{b_{j1}\} = \{300, 250, 280\}$ ,  $\{a_{j2}\} = \{11, 7, 15\}$ ,  $\{b_{j2}\} = \{15, 11, 19\}$ ,  $\{a_{j3}\} = \{2, 2, 2\}$ ,  $\{b_{j3}\} = \{1.5, 1.5, 1.5\}$ , 分别是交通量输入的两个峰值、峰值发生时刻和峰期的长度。

设车辆到达呈泊松分布,则可推出

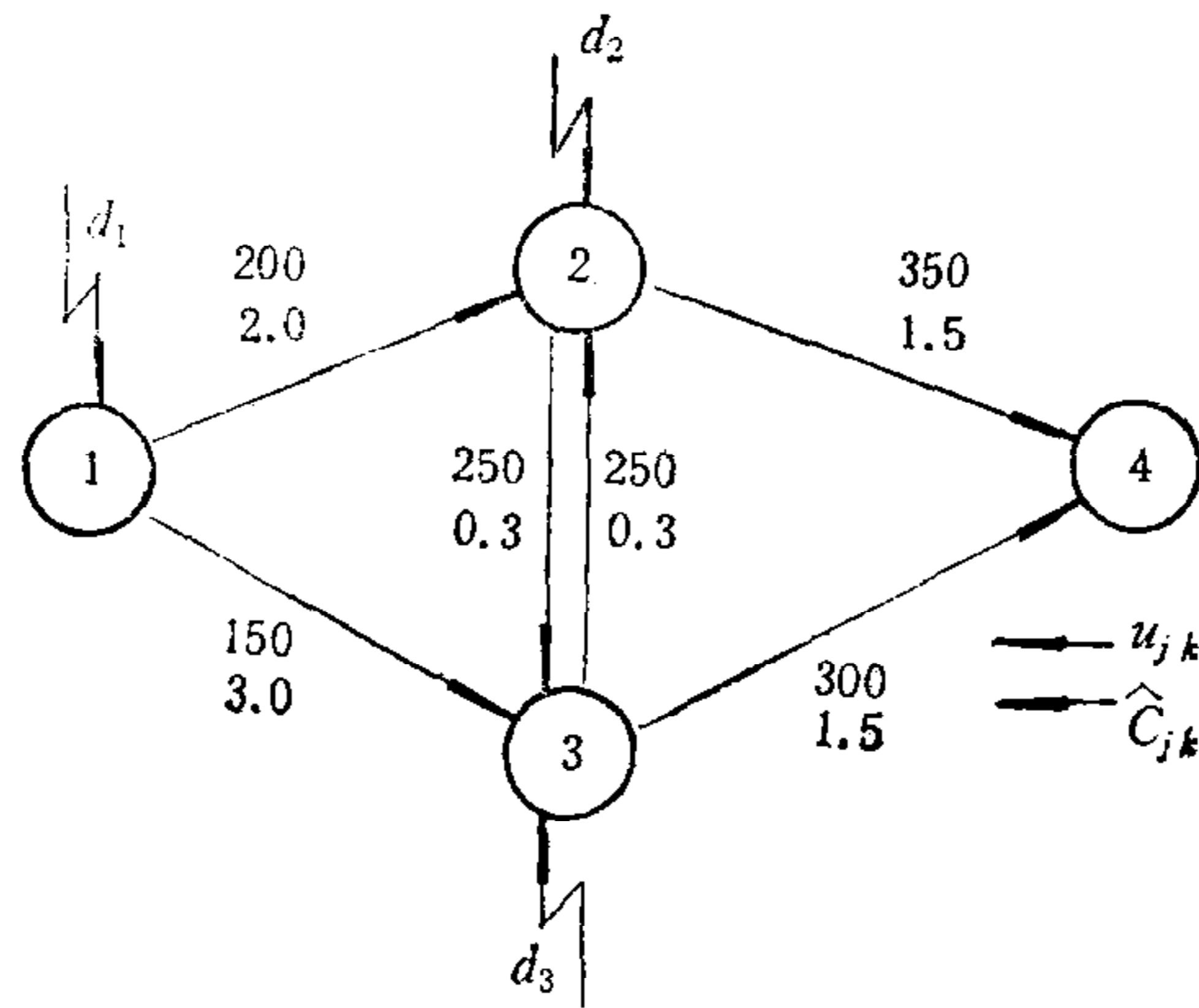


图 2 算例

表 1 路段(1,2)和(1,3)上的最优解与近似解

$t$		<8.0	9.0	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	13.0
$x_{12}$	OV	<36.9	127.5	163.9	197.3	210.2	198.1	175.2	157.9
	AV	<36.9	126.2	166.6	200.6	210.2	201.4	175.2	156.1
$x_{13}$	OV	=0.0	1.3	109.3	131.5	140.1	132.0	102.9	21.5
	AV	=0.0	2.6	106.5	128.2	140.1	128.7	102.9	23.3
$\alpha_{12}$	OV	=1.0	0.99	0.60	0.60	0.60	0.60	0.63	0.88
	AV	=1.0	0.98	0.61	0.61	0.60	0.61	0.63	0.87
$\alpha_{13}$	OV	=0.0	0.01	0.40	0.40	0.40	0.40	0.37	0.12
	AV	=0.0	0.02	0.39	0.39	0.40	0.39	0.37	0.13

$t$		14.0	15.0	15.5	16.0	16.5	17.0	>18.0
$x_{12}$	OV	162.8	193.0	203.0	162.2	102.8	50.2	<5.5
	AV	165.1	189.9	200.3	160.2	101.7	49.7	<5.5
$x_{13}$	OV	66.5	113.4	67.7	30.9	7.7	0.5	=0.0
	AV	64.2	116.5	70.4	32.8	8.8	1.0	=0.0
$\alpha_{12}$	OV	0.71	0.63	0.75	0.84	0.93	0.99	=1.0
	AV	0.72	0.62	0.74	0.83	0.92	0.98	=1.0
$\alpha_{13}$	OV	0.29	0.37	0.25	0.16	0.07	0.01	=0.0
	AV	0.32	0.38	0.26	0.17	0.08	0.02	=0.0



$$g_{ik}(x_{ik}) = x_{ik}/(1 + x_{ik}), (j, k) \in L. \quad (38)$$

令网络的起始和结束状态均为空静状态,并设  $\Delta t = 0.5$  小时。在 PC-386 机上仿真 24 小时的交通流量共需 4.4 分钟。

图 2 中节点 1 不存在前向路段,故路段(1,2)和(1,3)的流量、控制变量的最优解易于精确地算出。为了讨论本文提出的近似算法的误差,表 1 列出了这些变量的最优值(OV)和近似值(AV),可以看出,近似算法的结果是令人满意的。

**致谢** 感谢顾昌耀、冯允成教授和 Lam WHK 博士的支持。

### 参 考 文 献

- [1] Evans S P. Derivation and analysis of some models for combining trip distribution and assignment. *Transpn. Res.*, 1976, 10: 37—57.
- [2] Huang Haijun, Lam W H K. Modified evans' algorithms for solving the combined trip distribution and assignment problem. *Transpn. Res.-B*, 1992, 26: 325—337.
- [3] Lam W H K, Huang Haijun. Calibration of the combined trip distribution and assignment model for multiple user classes. *Transpn. Res.-B*, 1992, 26: 289—305.
- [4] Gartner N H, Improta G. Editorial for special issue on urban traffic networks: dynamic control and flow equilibrium. *Transpn. Res.-B*, 1990, 24: 407—408.
- [5] Merchant D K, Nemhauser G L. A model and algorithm for the dynamic traffic assignment problems. *Transpn. Sci.*, 1978, 12: 183—199.
- [6] Ho J K. Solving the dynamic traffic assignment problem on a hypercube multicomputer. *Transpn. Res.-B*, 1990, 24: 443—451.
- [7] Friesz T L, Luque J, Tobin R L, Wie B W. Dynamic network traffic assignment considered as a continuous time optimal control problem. *Operations Res.*, 1989, 37: 893—901.
- [8] Wei B W, Friesz T L, Tobin R L. Dynamic user optimal traffic assignment on congested multideestination networks. *Transpn. Res.-B*, 1990, 24: 431—442.
- [9] Janson B N. Dynamic traffic assignment for urban road networks. *Transpn. Res.-B.*, 1991, 25: 143—161.
- [10] Papageorgiou M, Mayr R. Comparison of direct optimization algorithm for dynamic network flow control. *Optimal Control Application and Methods*, 1988, 9: 175—185.
- [11] Filipiak J. Modelling and control of dynamic flows in communication networks. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.

# DYNAMIC EQUILIBRIUM TRAFFIC ASSIGNMENT PROBLEM AND ITS STEADY STATE-CO- STATE SOLUTION ALGORITHM

HUANG HAIJUN

(School of Management, Beijing Univ. of Aero. and Astro., 100083 P. R. China)

## ABSTRACT

The modelling and solving of dynamic equilibrium traffic assignment problem is a theoretical basis to develop the Intelligent Vehicle Highway Systems (IVHS). In this paper, a continuous time optimal control model for the multi-starting point and single-destination network, is formulated and its optimality conditions are proved to be equivalent to the dynamic user equilibrium principle. To avoid solving the complicated two-point boundary-value problem, a steady state-costate solution algorithm is proposed that generates an approximate solution to the network optimal control problem. This algorithm could make the full use of the advantages of the traffic and computer network structure, and would be computationally efficient for large networks. The test results on an example network is reported to demonstrate the performance of this algorithm.

**Key words:** dynamic equilibrium traffic assignment, steady state-costate solution, optimal control problem.



**黄海军** 湖南省人, 1964 年出生。1988 和 1992 年分别获硕士和博士学位。1990—1992 年在香港理工学院土木系工作。目前的研究兴趣是交通运输与生产系统物流问题的建模和算法。已发表学术论文 20 篇。