

多机械手系统建模的一般方法

孙增圻 金亿创 何斌 丁梅

(清华大学计算机科学与技术系 北京 100084)

摘 要

以双机械手协调作业为例,介绍了多机械手系统建模的一般方法.对于不同数目的机械手以及不同的作业任务,通过定义广义变量,建立关于广义变量的运动学和动力学方程,进而获得多机械手系统的统一模型.它为多机械手系统的控制和仿真提供了基础.

关键词: 多机械手,建模,控制,仿真.

1 引言

对于单机械手系统,其动力学模型表示为

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T \mathbf{F}. \quad (1.1)$$

其中 $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ 表示关节位置、速度和加速度向量; $\boldsymbol{\tau}$ 是关节力矩向量; \mathbf{F} 是机械手对环境的作用力; $H(\mathbf{q})$ 是机械手的惯量阵; $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 包括了机械手的哥氏力和离心力项; $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ 是重力项; \mathbf{J} 是机械手从关节变量到末端变量的雅可比矩阵.

对于任何类型的单机械手系统,其动力学模型均可化为(1.1)式所示的一般形式.基于这样的动力学模型,可以很方便地对单机械手系统进行控制和仿真研究.但是对于双机械手或多机械手系统,目前尚无建立这样一般模型的方法.通常的做法是分别建立各机械手本身的模型,如(1.1)式所示,再建立操作对象的模型,然后根据这些动力学方程进行多机械手系统的控制和仿真研究.这种方法只能就具体的问题进行具体的研究,很难推广到一般的情况.对于机器人系统仿真,通常希望建造的仿真系统具有广泛的通用性,即它适用于不同数目的机器人和不同的作业任务.为此,本文提出了一种多机械手系统建模的一般方法,它在一定程度上可以解决上述的通用性问题.

2 双手系统建模举例

现以双机械手系统为例,推出其动力学模型的一般表达形式.

设两手共同搬一个物体,如图1所示.其中 O_1 和 O_2 分别是机械手1和2的基座; T_1 和 T_2 是机械手的末端抓取点;这里假设机械手牢牢抓住物体,它们之间无滑动,物体与环境无接触; C 是物体质心; B 是整个双手系统的基坐标系原点.下面分别列出每个机械手及被操作物体的方程:

$$H_1 \ddot{q}_1 + \tau_{b1} = \tau_1 - J_{11}^T J_{10}^T F_1, \quad (2.1)$$

$$H_2 \ddot{q}_2 + \tau_{b2} = \tau_2 - J_{21}^T J_{20}^T F_2, \quad (2.2)$$

$$H_0 \ddot{s} + \tau_{b0} = J_{1C}^{-T} F_1 + J_{2C}^{-T} F_2. \quad (2.3)$$

其中 q_i 是机械手 i 的关节变量; τ_i 是手 i 的关节力矩向量; F_i 是表示在 B 坐标系中手 i 对物体的作用力和力矩向量; J_{i0} 是手末端 T_i 表示在 O_i 坐标系中的速度变换到表示在 B 坐标系中的雅可比矩阵; J_{i1} 是从关节变量速度 \dot{q}_i 变换到 T_i 在 O_i 坐标系中表示的速度的雅可比矩阵; J_{iC} 是将 T_i 在 B 坐标系中的速度变换到 C 点在 B 坐标系中的速度的雅可比矩阵; H_i 是机械手 i 的惯量阵; τ_{bi} 是机械手 i 的偏置力矩, 包括哥氏力、离心力及重力项 ($i = 1, 2$).

s 是固结在物体质心上的坐标系 C 表示在 B 坐标系中的位置和姿态 (以下简称位姿), 它也是该系统的广义变量. 在本例中, 它有 6 个分量, 确定了 s 即可确定系统中其它所有变量. 本例中有

$$A_{T_i}^{O_i} = A_{B_i}^{O_i} A_C^B A_{T_i}^C, (i = 1, 2). \quad (2.4)$$

其中 $A_{T_i}^{O_i}$ 表示手 i 末端工具坐标系 T_i 相对手 i 基座坐标系 O_i 的齐次变换阵; $A_{T_i}^C$ 是 T_i 坐标系相对 C 坐标系的齐次变换阵, 在整个搬运过程中 $A_{T_i}^C$ 是常阵; A_C^B 是 C 坐标系相对基坐标系的齐次变换阵, 它可直接由 s 计算得到; $A_{B_i}^{O_i}$ 是 B 坐标系相对 O_i 坐标系的齐次变换阵, 它也是常阵.

$$\dot{s}_{T_i}^{O_i} = J_{i0}^{-1} J_{iC}^{-1} \dot{s}, \quad (2.5)$$

其中 $\dot{s}_{T_i}^{O_i}$ 表示手 i 末端 T_i 在 O_i 坐标系中的速度.

根据 $A_{T_i}^{O_i}$, $\dot{s}_{T_i}^{O_i}$ 及各机械手的运动学关系, 即可计算出机械手关节变量 q_i 和 \dot{q}_i .

H_0 是被抓物体的惯量阵, 这里有

$$H_0 = \begin{bmatrix} m_0 & & & & & 0 \\ & m_0 & & & & \\ & & m_0 & & & \\ 0 & & & I_{3 \times 3} & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}_{6 \times 6}. \quad (2.6)$$

其中 m_0 是物体质量, I 是物体的转动惯量阵.

τ_{b0} 可表示为

$$\tau_{b0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_0 g \\ \omega \times I \omega \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

其中 ω 是物体的角速度向量. 这里假定 B 坐标系的 z 轴垂直向上.

方程(2.1)–(2.3)是双机械手共同搬一个物体这一特定情况下的动力学方程, 它们并不具备通用性. 对于其它的作业任务, 所列出的动力学方程则可能具有完全不同的形式. 显然对于更多数目的机械手协同作业任务, 其动力学方程也将更复杂, 这样便不利于一般

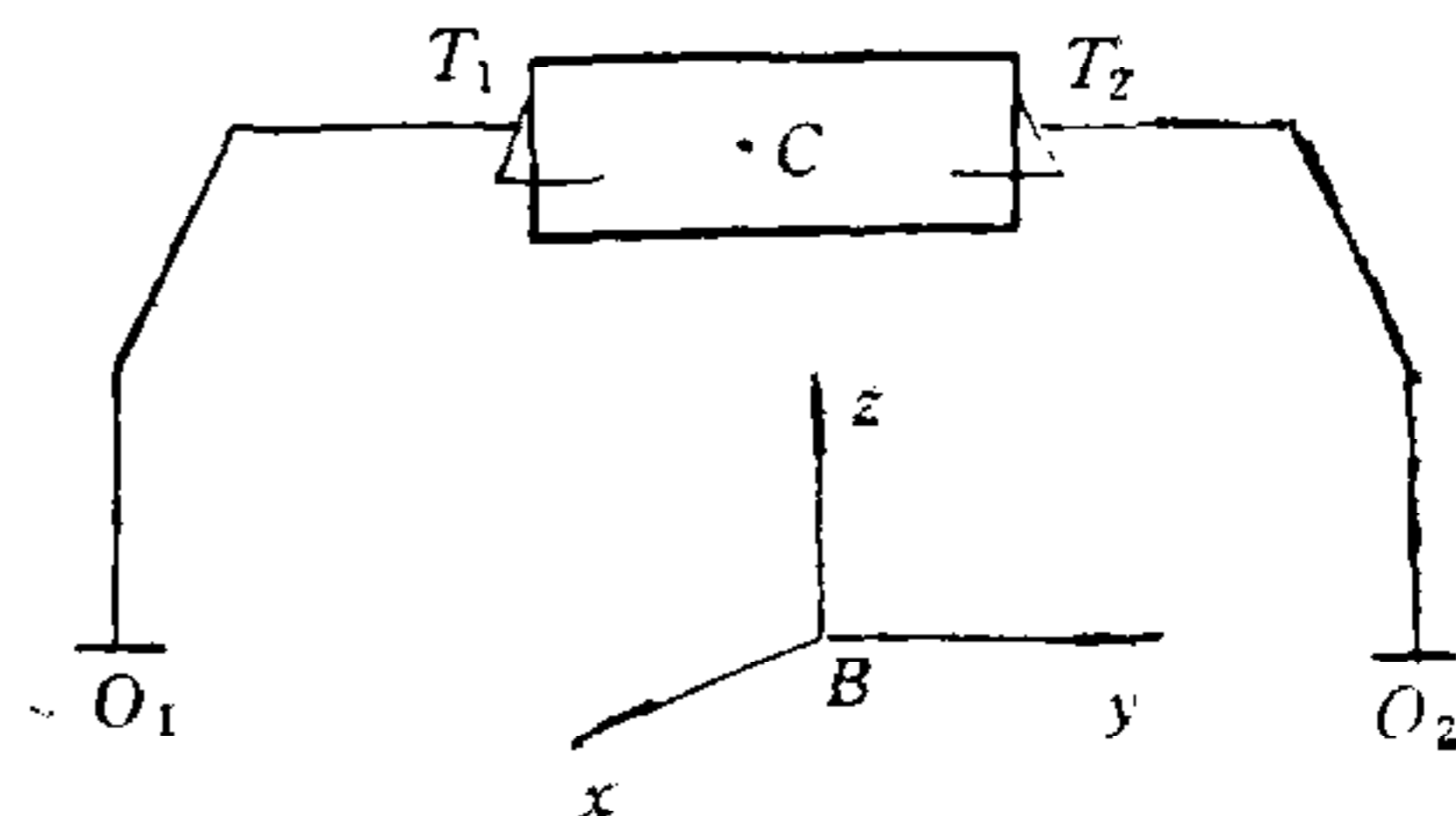


图1 双机械手搬重物

情况下的控制和仿真研究。为此,可将方程(2.1)~(2.3)化为只有广义变量 \mathbf{s} 的统一的动力学方程。

令 $J_i = J_{ic}J_{i0}J_{i1}$ ($i = 1, 2$), 则 J_i 表示从 $\dot{\mathbf{q}}_i$ 到 $\dot{\mathbf{s}}$ 的雅可比矩阵, 即

$$\dot{\mathbf{s}} = J_i \dot{\mathbf{q}}_i, \quad \dot{\mathbf{q}}_i = J_i^{-1} \dot{\mathbf{s}}, \quad (2.8)$$

$$\ddot{\mathbf{s}} = J_i \ddot{\mathbf{q}}_i + \dot{J}_i \dot{\mathbf{q}}_i, \quad \ddot{\mathbf{q}}_i = J_i^{-1} \ddot{\mathbf{s}} - J_i^{-1} \dot{J}_i \dot{\mathbf{q}}_i. \quad (2.9)$$

方程(2.1)和(2.2)两边同乘 J_i^{-T} 并相加, 同时考虑式(2.3), (2.8)和(2.9)的关系, 得

$$H \ddot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\tau}_b = F. \quad (2.10)$$

其中

$$H = \sum_{i=1}^2 H_i^* + H_0; \quad H_i^* = J_i^{-T} H_i J_i^{-1}; \quad F = \sum_{i=1}^2 J_i^{-T} \boldsymbol{\tau}_i;$$

$$\boldsymbol{\tau}_b = \sum_{i=1}^2 J_i^{-T} \boldsymbol{\tau}_{bi} + \boldsymbol{\tau}_{b0} - \sum_{i=1}^2 H_i^* \dot{J}_i \dot{\mathbf{q}}_i.$$

式(2.10)即为一般形式的动力学方程, 由双手共同搬一个物体的特例推导得出。

3 协调作业的描述及广义变量的选取

在建立动力学模型的过程中, 式(2.1), (2.2)为各机械手的动力学方程, 式(2.3)为操作对象的动力学方程。这里一个很重要的问题是如何描述协调作业及如何选取广义变量。

如果操作对象为同一物体, 如前面所举例子, 可以选取广义变量为位于质心上的物体固结坐标系 C 的位姿, 共 6 个分量, 其动力学方程如式(2.3)所示。

如果操作对象是 n 个物体, 各物体之间有某种几何约束关系, 这时可将这 n 个物体视为一个物体链, 物体与物体之间用某种形式的关节相连结。这时可选择广义变量为

$$\mathbf{s} = [(\mathbf{s}_{c_1}^b)^T p_1 p_2 \cdots]^T, \quad (3.1)$$

其中 $\mathbf{s}_{c_1}^b$ 为物体 1 质心上的固结坐标系 C_1 的位姿在基坐标系中的表示, 共 6 个分量; p_1, p_2, \cdots 是物体 1 与其它物体之间的关节变量。以下将通过几种典型情况加以具体说明。

1) 两物体之间是滑动关节(如带键槽的插孔), 如图 2 所示。此时可设广义变量为

$$\mathbf{s} = [(\mathbf{s}_{c_1}^b)^T d]^T, \quad (3.2)$$

其中 $\mathbf{s}_{c_1}^b$ 为 C_1 坐标系在基坐标系中的位姿; d 为 C_1 和 C_2 之间的距离。这时物体 1 和物体 2 可以看成是由一个滑移关节所连结的物体链。

2) 旋转关节(如双手拿剪刀), 如图 3 所示。这时可设广义变量为

$$\mathbf{s} = [(\mathbf{s}_{c_1}^b)^T \theta]^T. \quad (3.3)$$

其中 $\mathbf{s}_{c_1}^b$ 的意义同前; θ 是剪刀的夹角。物体 1 和物体 2 之间看作一旋转关节。

3) 螺旋型关节, 如图 4 所示的螺栓拧入螺母的动作。这时可设广义变量为

$$\mathbf{s} = [(\mathbf{s}_{c_1}^b)^T d]^T, \quad (3.4)$$

其中 d 是两物体质心间的距离。

4) 滑动加旋转关节, 如图 5 所示的插孔作业。设广义变量为

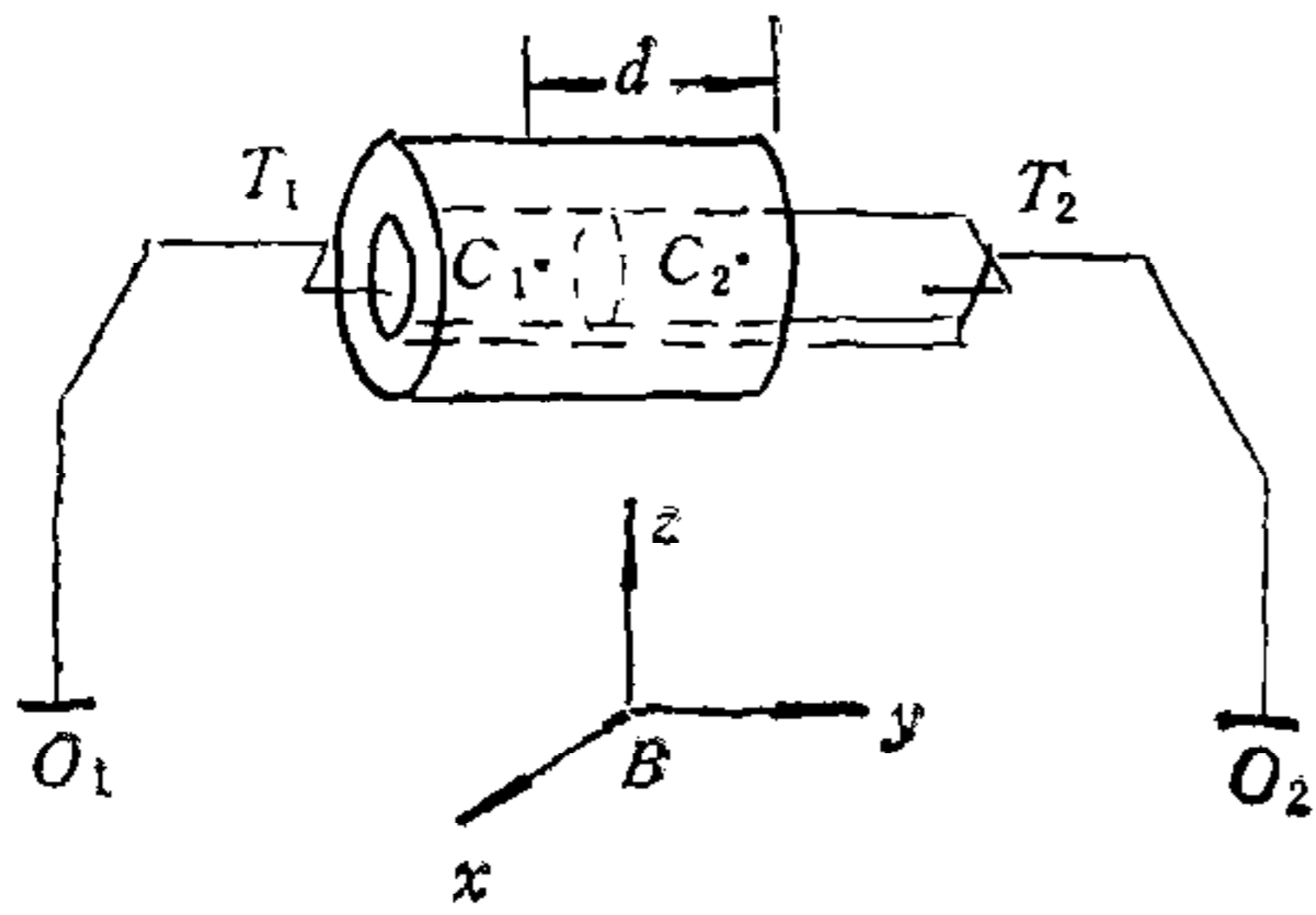


图 2 带键槽的双手插孔作业

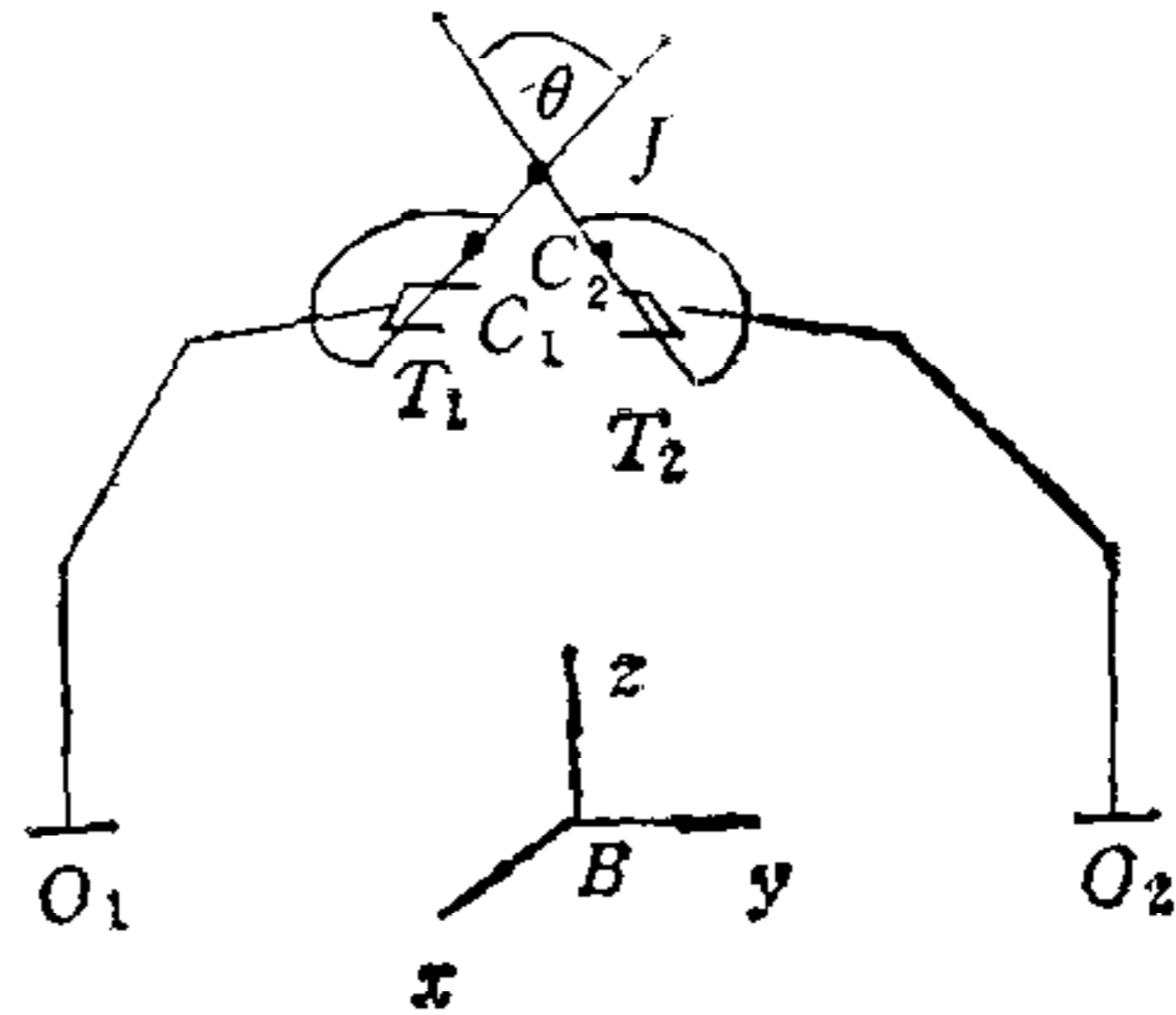


图 3 双手拿剪刀

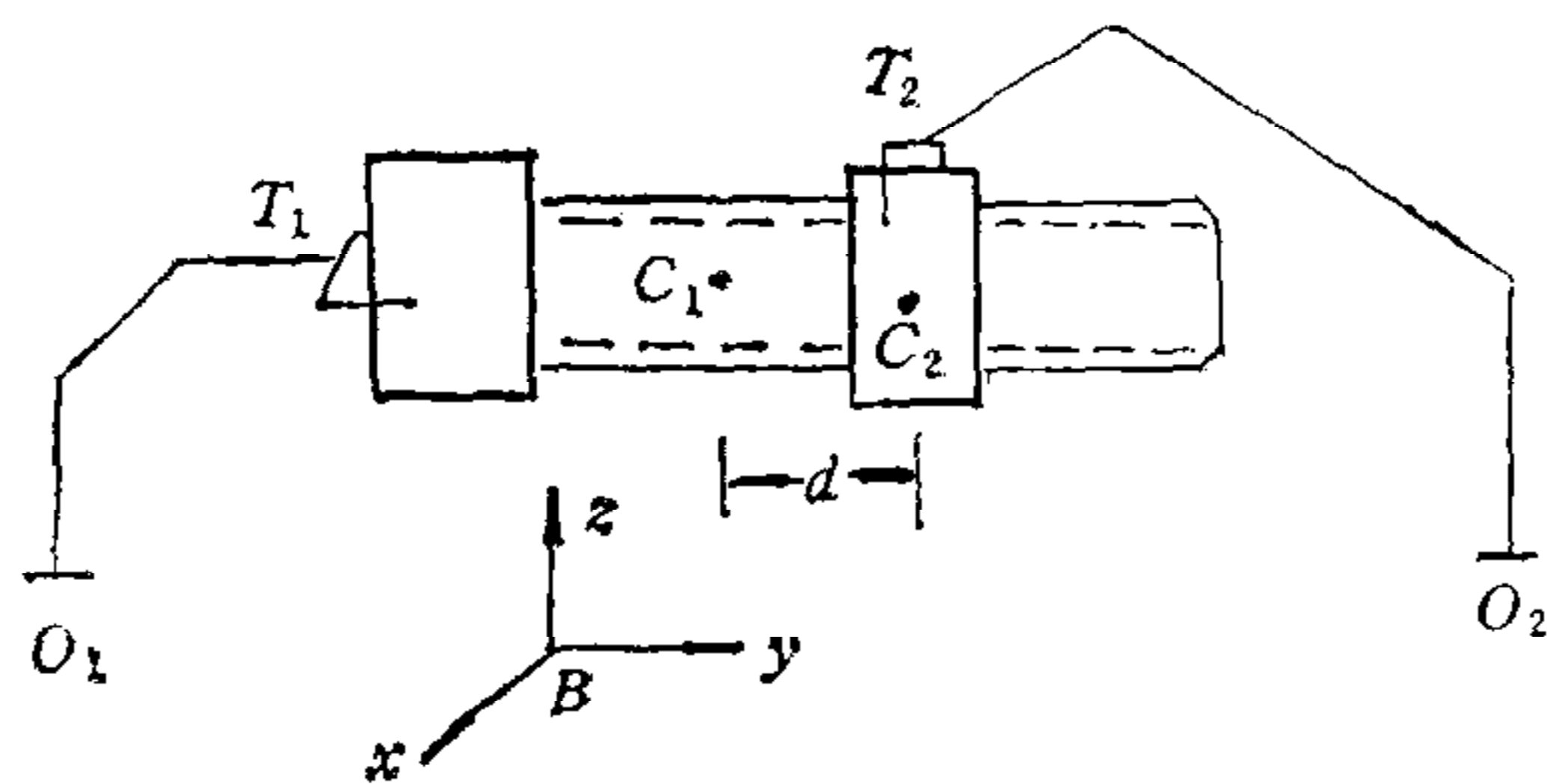


图 4 双手拧螺丝

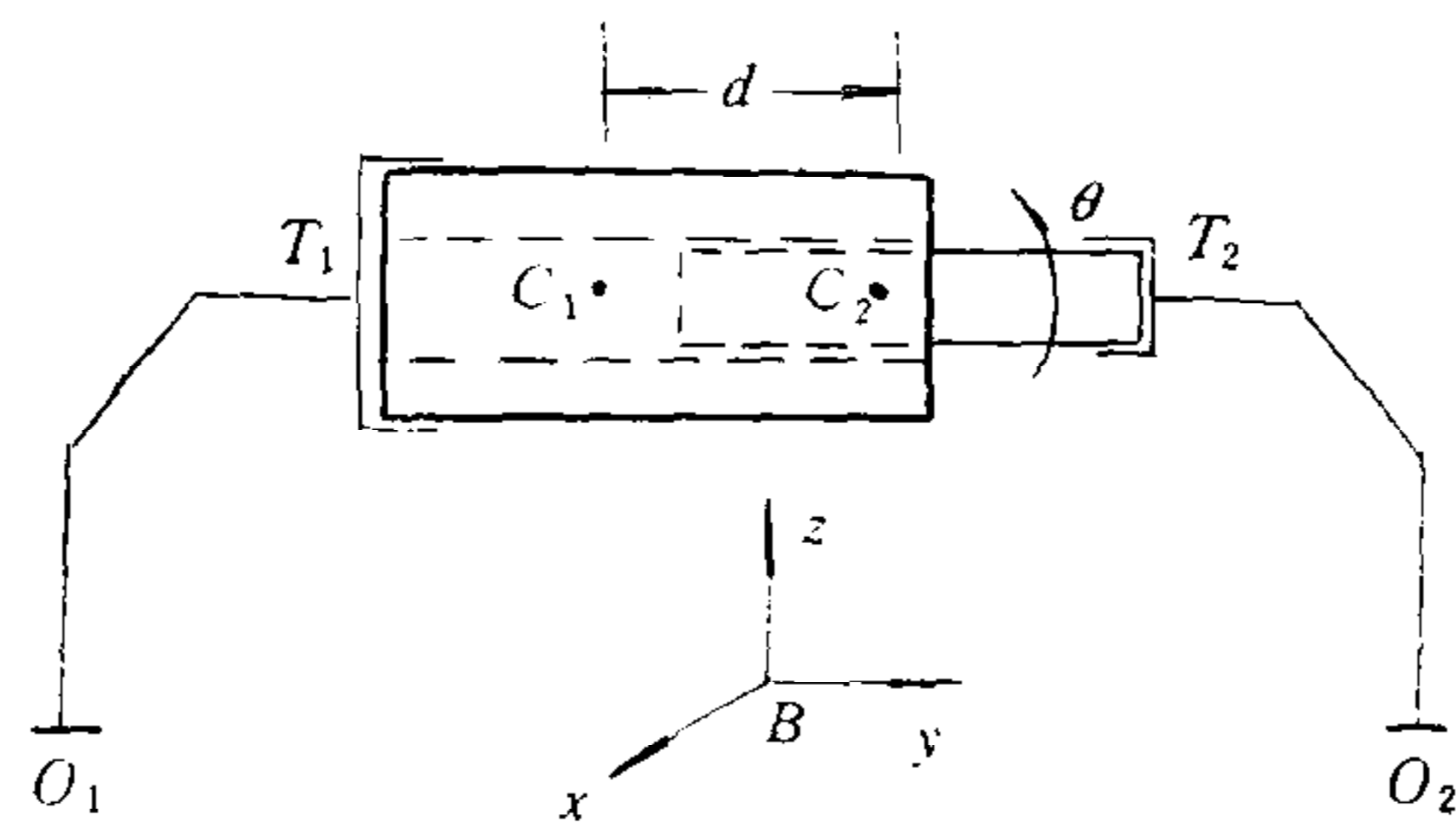


图 5 双手插孔

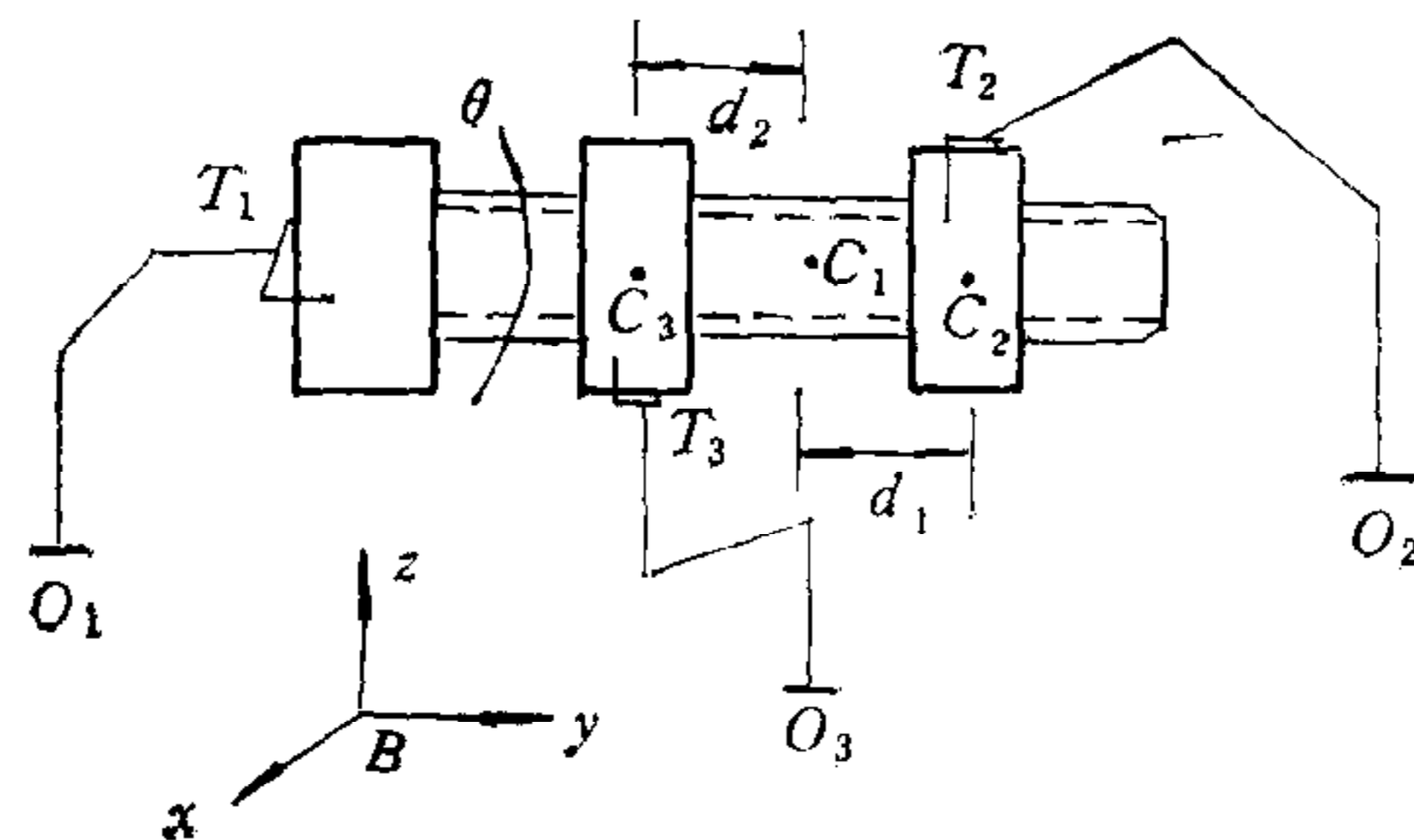


图 6 三手拧螺丝

$$\mathbf{s} = [(\mathbf{s}_{C_1}^B)^T \ d \ \theta]^T, \tag{3.5}$$

其中 θ 是物 2 相对物 1 的转角。

5) 多关节组合,如图 6 所示的三手拧螺丝的动作。其中物体 1 与物体 2 间是螺旋型关节,物体 1 与物体 3 间是滑动加旋转关节。这时广义变量可定义为

$$\mathbf{s} = [(\mathbf{s}_{C_1}^B)^T d_1 d_2 \theta]^T, \quad (3.6)$$

其中 d_1, d_2 和 θ 的意义如图 6 所示.

4 多机械手系统的运动学建模

在建立了广义变量后, 运动学的主要问题是建立各机械手的关节变量与广义变量之间的位移、速度和加速度关系.

4.1 位置运动学 $\mathbf{q}_i \leftrightarrow \mathbf{s}$

1) 正运动学 $\mathbf{q}_i \rightarrow \mathbf{s}$

首先, 按以下步骤计算出各物体固结在质心上的坐标系 C_i 相对基坐标系的齐次变换阵.

- $\mathbf{q}_i \rightarrow A_{T_i}^{O_i} = A_1^0 A_2^1 \cdots A_6^5 A_{T_i}^6;$
- $A_{T_i}^B = A_{O_i}^B A_{T_i}^{O_i};$
- $A_{C_i}^B = A_{T_i}^B A_{C_i}^{T_i}.$

其中 A_P^Q 表示坐标系 P 相对坐标系 Q 的齐次变换阵.

其次, 根据 $A_{C_i}^B$ 计算出广义变量 \mathbf{s} . 由 $A_{C_1}^B$ 算出 $\mathbf{s}_{C_1}^B$. 根据前面定义, $\mathbf{s}_{C_1}^B$ 即为 \mathbf{s} 的前 6 个分量. 设 $\hat{f}_i (i = 2, \cdots, n)$ 为物体 1 与物体 i 之间的关节, 且设坐标系 $C_i (i = 2, \cdots, n)$ 的选择使得 \hat{f}_i 与 C_i 间满足 $D-H$ 规则. 由于坐标系 \hat{f}_i 固定在物体 1 上, 因此齐次变换阵 $A_{\hat{f}_i}^{C_1}$ 为常阵. 进行如下计算:

$$A_{C_i}^{\hat{f}_i} = A_{C_i}^{\hat{f}_i} A_{B_1}^{C_1} A_{C_1}^B = (A_{\hat{f}_i}^{C_1})^{-1} (A_{C_1}^B)^{-1} A_{C_i}^B \quad (i = 2, \cdots, n).$$

根据不同关节类型, 不难由 $A_{C_i}^{\hat{f}_i}$ 求出相应的关节变量, 这些关节变量是广义变量中的其余分量. 对于以下各种类型的关节, 有

$$\bullet \text{滑动关节, } d_i = A_{C_i}^{\hat{f}_i}(3, 4); \quad (4.1)$$

$$\bullet \text{旋转关节, } \theta_i = \text{tg}^{-1}[A_{C_i}^{\hat{f}_i}(2, 1)/A_{C_i}^{\hat{f}_i}(1, 1)]; \quad (4.2)$$

$$\bullet \text{螺旋型关节, } d_i = A_{C_i}^{\hat{f}_i}(3, 4); \quad (4.3)$$

注意, $A_{C_i}^{\hat{f}_i}$ 中的 θ_i 不是独立变量, 满足 $\theta_i = 2\pi d_i/h, h$ 为螺距.

• 滑动加旋转关节,

$$\begin{cases} \theta_i = \text{tg}^{-1}[A_{C_i}^{\hat{f}_i}(2, 1)/A_{C_i}^{\hat{f}_i}(1, 1)], \\ d_i = A_{C_i}^{\hat{f}_i}(3, 4). \end{cases} \quad (4.4)$$

例如, 对于图 3 所示双手拿剪刀的情况, 有

$$\theta = \text{tg}^{-1}[A_{C_2}^{\hat{f}_2}(2, 1)/A_{C_2}^{\hat{f}_2}(1, 1)]. \quad (4.5)$$

这时 \hat{f}_2 坐标系选在剪刀的铰链点处. 对于图 6 所示三手拧螺丝的情况, 有

$$d_1 = A_{C_2}^{\hat{f}_2}(3, 4), \quad d_2 = A_{C_3}^{\hat{f}_3}(3, 4), \quad (4.6), (4.7)$$

$$\theta = \text{tg}^{-1}[A_{C_3}^{\hat{f}_3}(2, 1)/A_{C_3}^{\hat{f}_3}(1, 1)]. \quad (4.8)$$

此处可选 \hat{f}_2, \hat{f}_3 坐标系与 C_1 坐标系重合.

2) 逆运动学 $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{q}_i$

- $\mathbf{s}_{C_1}^B$ 等于 \mathbf{s} 的前 6 个分量;

- $\mathbf{s}_{C_1}^B \rightarrow A_{C_1}^B$;
- $A_{T_1}^{O_1} = A_{B^1}^{O_1} A_{C_1}^B A_{T_1}^{C_1}, A_{T_1}^{O_1} \rightarrow \mathbf{q}_1$;
- \mathbf{s} 的其余分量 $\rightarrow A_{C_i}^{\hat{J}_i} (i = 2, \dots, n)$;
- $A_{C_i}^B = A_{C_1}^B A_{C_i}^{\hat{J}_i}, A_{T_i}^{O_i} = A_{B^i}^{O_i} A_{C_i}^B A_{T_i}^{C_i}$;
- $A_{T_i}^{O_i} \rightarrow \mathbf{q}_i (i = 2, \dots, n)$.

4.2 速度和加速度的运动学关系

1) $\dot{\mathbf{q}}_i \rightarrow \dot{\mathbf{s}}, \ddot{\mathbf{q}}_i \rightarrow \ddot{\mathbf{s}}$

首先计算各物体固结在质心上的坐标系 C_i 相对基坐标系 B 的速度

$$\dot{\mathbf{s}}_{C_i}^B = J_{iC} \dot{\mathbf{s}}_{T_i}^B = J_{iC} J_{i0} \dot{\mathbf{s}}_{T_i}^{O_i} = J_{iC} J_{i0} J_{i1} \dot{\mathbf{q}}_i = J_i \dot{\mathbf{q}}_i. \quad (4.9)$$

其中 $\dot{\mathbf{s}}_{C_i}^B$ 是 $\dot{\mathbf{s}}$ 的前 6 个分量.

然后, 根据物体间的关节类型, 由 $\dot{\mathbf{s}}_{C_i}^B$ 求出物体间的关节变量速度, 这些关节变量速度便是广义变量速度中的其余分量. 对于以下各种类型关节, 有

- 滑动关节(如图 2 所示),

$$\dot{\mathbf{s}}_{\hat{J}_i}^B = J_{C_1, \hat{J}_i} \dot{\mathbf{s}}_{C_1}^B, \quad J_{C_1, \hat{J}_i} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & -\mathbf{r}_{C_1, \hat{J}_i}^B \times \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad (4.10), (4.11)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_{C_i}^B = J_{\hat{J}_i, C_i} \dot{\mathbf{s}}_{\hat{J}_i}^B + J_{\hat{J}_i} \dot{d}_i, \quad (4.12)$$

$$J_{\hat{J}_i, C_i} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & -\mathbf{r}_{\hat{J}_i, C_i}^B \times \\ 0 & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad J_{\hat{J}_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\hat{J}_i}^B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

其中 $\mathbf{b}_{\hat{J}_i}^B$ 为 \hat{J}_i 坐标系 z 轴单位向量在 B 坐标系中的表示.

$$\dot{d}_i = J_{\hat{J}_i}^T (\dot{\mathbf{s}}_{C_i}^B - J_{\hat{J}_i, C_i} J_{C_1, \hat{J}_i} \dot{\mathbf{s}}_{C_1}^B) = J_{\hat{J}_i}^T \dot{\mathbf{s}}_i, \quad (4.14)$$

$$\text{其中 } \dot{\mathbf{s}}_i = \dot{\mathbf{s}}_{C_i}^B - J_{\hat{J}_i, C_i} J_{C_1, \hat{J}_i} \dot{\mathbf{s}}_{C_1}^B. \quad (4.15)$$

在图 2 中可选择 \hat{J}_2 坐标系与 C_1 坐标系重合, 从而 J_{C_1, \hat{J}_2} 为单位阵.

- 旋转关节(如图 3 所示),

$$\dot{\theta}_i = (J_{\hat{J}_i}^T J_{\hat{J}_i})^{-1} J_{\hat{J}_i}^T \dot{\mathbf{s}}_i = J_{\hat{J}_i}^+ \dot{\mathbf{s}}_i, \quad (4.16)$$

其中 $J_{\hat{J}_i}^+ = (J_{\hat{J}_i}^T J_{\hat{J}_i})^{-1} J_{\hat{J}_i}^T$ 为 $J_{\hat{J}_i}$ 的伪逆,

$$J_{\hat{J}_i} = \begin{bmatrix} -\mathbf{r}_{\hat{J}_i, C_i}^B \times \mathbf{b}_{\hat{J}_i}^B \\ \mathbf{b}_{\hat{J}_i}^B \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

- 螺旋型关节(如图 4 所示),

$$\dot{d}_i = (J_{\hat{J}_i}^T J_{\hat{J}_i})^{-1} J_{\hat{J}_i}^T \dot{\mathbf{s}}_i = J_{\hat{J}_i}^+ \dot{\mathbf{s}}_i, \quad (4.18)$$

$$J_{\hat{J}_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\hat{J}_i}^B \\ \frac{2\pi}{h} \mathbf{b}_{\hat{J}_i}^B \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

- 滑动加旋转关节(如图 5 所示),

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = J_{\hat{J}_i}^T \dot{\mathbf{s}}_i, \quad J_{\hat{J}_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\hat{J}_i}^B & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_{\hat{J}_i}^B \end{bmatrix}. \quad (4.20), (4.21)$$

现以图 6 所示三手拧螺丝为例,进一步说明上述关系. 这里可设 \hat{f}_2, \hat{f}_3 坐标系与 C_1 坐标系重合,且 C_1 坐标系的 z 轴即为螺母的中心轴. 根据以上讨论,有

$$\dot{\mathbf{s}}_{C_1}^B = J_1 \dot{\mathbf{q}}_1, \quad (4.22)$$

$$\dot{d}_1 = J_{\hat{f}_2}^+ \dot{\mathbf{s}}_i = J_{\hat{f}_2}^+ (\dot{\mathbf{s}}_{C_2}^B - \dot{\mathbf{s}}_{C_1}^B) = J_{\hat{f}_2}^+ J_2 \dot{\mathbf{q}}_2 - J_{\hat{f}_2}^+ J_1 \dot{\mathbf{q}}_1. \quad (4.23)$$

其中

$$J_{\hat{f}_2}^+ = (J_{\hat{f}_2}^T J_{\hat{f}_2})^{-1} J_{\hat{f}_2}^T, \quad J_{\hat{f}_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\hat{f}}^B \\ \frac{2\pi}{h} \mathbf{b}_{\hat{f}}^B \end{bmatrix}, \quad (4.24), (4.25)$$

$\mathbf{b}_{\hat{f}}^B$ 是 C_1 坐标系 z 轴单位向量在 B 坐标系中的表示.

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_2 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = J_{\hat{f}_3}^+ \dot{\mathbf{s}}_i = J_{\hat{f}_3}^+ (\dot{\mathbf{s}}_{C_3}^B - \dot{\mathbf{s}}_{C_1}^B) = J_{\hat{f}_3}^+ J_3 \dot{\mathbf{q}}_3 - J_{\hat{f}_3}^+ J_1 \dot{\mathbf{q}}_1, \quad (4.26)$$

其中

$$J_{\hat{f}_3} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{\hat{f}}^B & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_{\hat{f}}^B \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

合并式(4.22),(4.23)和(4.26)可得

$$\dot{\mathbf{s}} = J \dot{\mathbf{q}}. \quad (4.28)$$

其中

$$\dot{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{s}}_{C_1}^B \\ \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \\ \dot{\mathbf{q}}_3 \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ -J_{\hat{f}_2}^+ J_1 & J_{\hat{f}_2}^+ J_2 & 0 \\ -J_{\hat{f}_3}^+ J_1 & 0 & J_{\hat{f}_3}^+ J_3 \end{bmatrix}_{9 \times 18}. \quad (4.30)$$

由式(4.28)可进一步求得加速度

$$\ddot{\mathbf{s}} = J \ddot{\mathbf{q}} + \dot{J} \dot{\mathbf{q}}. \quad (4.31)$$

对于其它例子,也可仿照以上步骤求得如式(4.28)和(4.31)所示的关系.

2) $\dot{\mathbf{s}} \rightarrow \dot{\mathbf{q}}_i, \ddot{\mathbf{s}} \rightarrow \ddot{\mathbf{q}}_i$.

第一步. 求 $\dot{\mathbf{s}} \rightarrow \dot{\mathbf{s}}_{C_i}^B$. 由前面的定义, $\dot{\mathbf{s}}_{C_i}^B$ 是 $\dot{\mathbf{s}}$ 的前 6 个分量,即

$$\dot{\mathbf{s}}_{C_i}^B = J_{C_i} \dot{\mathbf{s}}, \quad J_{C_i} = [I_{6 \times 6} \ 0]. \quad (4.32), (4.33)$$

对于其它物体,由式(4.12)和(4.10)可以求得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}_{C_i}^B &= J_{\hat{f}_i, C_i} \dot{\mathbf{s}}_{\hat{f}_i}^B + J_{\hat{f}_i} \dot{p}_i = J_{\hat{f}_i, C_i} J_{C_i, \hat{f}_i} \dot{\mathbf{s}}_{C_i}^B + J_{\hat{f}_i} \dot{p}_i \\ &= [J_{\hat{f}_i, C_i} J_{C_i, \hat{f}_i} \ 0 \ J_{\hat{f}_i} \ 0] [(\dot{\mathbf{s}}_{C_i}^B)^T \ 0 \ p_i \ 0]^T = J_{C_i} \dot{\mathbf{s}}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

其中

$$J_{C_i} = [J_{\hat{f}_i, C_i} \ J_{C_i, \hat{f}_i} \ 0 \ J_{\hat{f}_i} \ 0]. \quad (4.35)$$

对于不同的关节类型, $J_{\hat{f}_i}$ 分别如式(4.13),(4.17),(4.19)和(4.21)所示.

第二步. 求 $\dot{\mathbf{s}}_{C_i}^B \rightarrow \dot{\mathbf{q}}_i$. 根据式(4.9)有

$$\dot{\mathbf{s}}_{C_i}^B = J_i \dot{\mathbf{q}}_i, \quad (4.36)$$

其中
$$J_i = J_{iC} J_{i0} J_{i1}. \quad (4.37)$$

根据式(4.36), (4.34)和(4.32)可得

$$\dot{q}_i = J_i^{-1} \dot{s}_{C_i}^B = J_i^{-1} J_{C_i} \dot{s}. \quad (4.38)$$

对上式求导得

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i &= J_i^{-1} J_{C_i} \ddot{s} + J_i^{-1} \dot{J}_{C_i} \dot{s} - J_i^{-1} \dot{J}_i J_i^{-1} J_{C_i} \dot{s} \\ &= J_i^{-1} J_{C_i} \ddot{s} + J_i^{-1} \dot{J}_{C_i} \dot{s} - J_i^{-1} \dot{J}_i \dot{q}_i. \end{aligned} \quad (4.39)$$

5 多机械手系统的动力学建模

以双手拿剪刀(图 3 所示)为例,再推广到一般情况讨论.

两个机械手的动力学方程:

$$H_1 \ddot{q}_1 + \tau_{b1} = \tau_1 - J_{11}^T J_{10}^T F_1, \quad (5.1)$$

$$H_2 \ddot{q}_2 + \tau_{b2} = \tau_2 - J_{21}^T J_{20}^T F_2, \quad (5.2)$$

其中各符号的意义同前.

物体 1 的动力学方程:

$$H_{01} \ddot{s}_{C_1}^B + \tau_{b01} = J_{1C}^{-T} F_1 - J_{C_1, \hat{j}}^T \hat{F}_{1,2}. \quad (5.3)$$

其中 $F_{1,2}$ 为在 B 坐标系中,作用在关节 \hat{j} 处物体 1 对物体 2 的作用力和力矩向量;

$$H_{01} = \begin{bmatrix} m_{01} & 0 \\ & m_{01} \\ & & m_{01} \\ 0 & & & I_{01} \end{bmatrix}, \tau_{b01} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_{01}g \\ \omega_{C_1}^B \times I_{01} \omega_{C_1}^B \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

此处 m_{01}, I_{01} 分别为物体 1 的质量和转动惯量阵,并设 B 坐标系的 z 轴垂直向上;式(5.3)中其它符号意义同前.

物体 2 的动力学方程:

$$H_{02} \ddot{s}_{C_2}^B + \tau_{b02} = J_{2C}^{-T} F_2 + J_{\hat{j}, C_2}^{-T} F_{1,2} \quad (5.5)$$

其中 H_{02} 和 τ_{b02} 具有与式(5.4)类似的形式. 利用式(4.34),式(5.5)可写成:

$$J_{C_2}^T H_{02} J_{C_2} \ddot{s} + J_{C_2}^T H_{02} \dot{J}_{C_2} \dot{s} + J_{C_2}^T \tau_{b02} = J_{C_2}^T J_{2C}^{-T} F_2 + J_{C_2}^T J_{\hat{j}, C_2}^{-T} F_{12}. \quad (5.6)$$

利用式(4.32),并考虑到 $\dot{J}_{C_1} = 0$, 式(5.3)为

$$J_{C_1}^T H_{01} J_{C_1} \ddot{s} + J_{C_1}^T \tau_{b01} = J_{C_1}^T J_{1C}^{-T} F_1 - J_{C_1}^T J_{C_1, \hat{j}}^T \hat{F}_{12}. \quad (5.7)$$

根据式(4.33), (4.35)及(4.17)不难推得

$$J_{C_2}^T J_{\hat{j}, C_2}^{-T} F_{12} = J_{C_1}^T J_{C_1, \hat{j}}^T \hat{F}_{12}. \quad (5.8)$$

将式(5.6)与式(5.7)相加,得

$$H_0 \ddot{s} + \tau_{b0} = J_{C_1}^T J_{1C}^{-T} F_1 + J_{C_2}^T J_{2C}^{-T} F_2. \quad (5.9)$$

其中

$$H_0 = J_{C_1}^T H_{01} J_{C_1} + J_{C_2}^T H_{02} J_{C_2}; \quad (5.10)$$

$$\tau_{b0} = J_{C_1}^T \tau_{b01} + J_{C_2}^T \tau_{b02} + J_{C_2}^T H_{02} \dot{J}_{C_2} \dot{s}. \quad (5.11)$$

利用式(4.39),式(5.1)和(5.2)可分别写成:

$$J_{C_1}^T J_{11}^{-T} H_1 J_{11}^{-1} J_{C_1} \ddot{s} - J_{C_1}^T J_{11}^{-T} H_1 J_{11}^{-1} \dot{J}_{11} \dot{q}_1 + J_{C_1}^T J_{11}^{-T} \tau_{b1} = J_{C_1}^T J_{11}^{-T} \tau_1 - J_{C_1}^T J_{1C}^{-T} F_1, \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} J_{C_2}^T J_2^{-T} H_2 J_2^{-1} J_{C_2} \ddot{\mathbf{s}} + J_{C_2}^T J_2^{-T} H_2 J_2^{-1} \dot{J}_{C_2} \dot{\mathbf{s}} - J_{C_2}^T J_2^{-T} H_2 J_2^{-1} \dot{J}_2 \dot{\mathbf{q}}_2 + J_{C_2}^T J_2^{-T} \boldsymbol{\tau}_{b2} \\ = J_{C_2}^T J_2^{-T} \boldsymbol{\tau}_2 - J_{C_2}^T J_{2C}^{-T} F_2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

合并、整理式(5.9),(5.12)和(5.13),可得整个系统的动力学方程为

$$H \ddot{\mathbf{s}} + \boldsymbol{\tau}_b = F. \quad (5.14)$$

其中

$$H = H_0 + J_{C_1}^T J_1^{-T} H_1 J_1^{-1} J_{C_1} + J_{C_2}^T J_2^{-T} H_2 J_2^{-1} J_{C_2}; \quad (5.15)$$

$$\boldsymbol{\tau}_b = \boldsymbol{\tau}_{b0} + \sum_{i=1}^2 J_{C_i}^T J_i^{-T} \boldsymbol{\tau}_{b_i} + J_{C_2}^T J_2^{-T} H_2 J_2^{-1} \dot{J}_{C_2} \dot{\mathbf{s}} - \sum_{i=1}^2 J_{C_i}^T J_i^{-T} H_i J_i^{-1} \dot{J}_i \dot{\mathbf{q}}_i; \quad (5.16)$$

$$F = \sum_{i=1}^2 J_{C_i}^T J_i^{-T} \boldsymbol{\tau}_i. \quad (5.17)$$

按照上面的推导,不难推广到多机械手系统的一般情况,其动力学方程仍如式(5.14)所示.

其中

$$H = \sum_{i=1}^n J_{C_i}^T (H_{0i} + H_i^*) J_{C_i}, \quad H_i^* = J_i^{-T} H_i J_i^{-1}, \quad (5.18)$$

$$\boldsymbol{\tau}_b = \sum_{i=1}^n J_{C_i}^T (\boldsymbol{\tau}_{b0i} + J_i^{-T} \boldsymbol{\tau}_{b_i}) + \sum_{i=1}^n J_{C_i}^T (H_{0i} + H_i^*) \dot{J}_{C_i} \dot{\mathbf{s}} - \sum_{i=1}^n J_{C_i}^T H_i^* \dot{J}_i \dot{\mathbf{q}}_i, \quad (5.19)$$

$$F = \sum_{i=1}^n J_{C_i}^T J_i^{-T} \boldsymbol{\tau}_i. \quad (5.20)$$

n 表示机械手的数目.

6 结束语

本文给出了多机械手系统建模的一般方法. 其动力学模型具有如式(5.14)所示的一般形式,其中的参数如式(5.18)–(5.20)所示. 这样的模型可以适用于任意数目的机械手及大多数典型作业情况. 利用这个模型可以帮助进行多机械手系统协调作业控制方法的研究,并使所研究的控制方法具有通用性. 同时,也较好地解决了多机械手系统的仿真问题. 对于不同数目的机械手及不同的作业任务,只要给出不同情况的任务描述,最后均可化为如式(5.14)所示的统一模型.

参 考 文 献

- [1] Shu Ping. Control of multi-manipulator systems-trajectory tracking, load distribution, internal force control, and decentralized architecture. IEEE International Conference on Robotics and Automation, USA, 1989.
- [2] Jin Yichuang, Sun Zengqi. Automatic programming of robot system simulation. IEEE International Conference on Robotics and Automation, USA, 1991.
- [3] 金亿创,孙增圻. 双手系统的仿真及可变式结构,机器人,1992,14(1).
- [4] He bin, Sun Zengqi. The simulation system for cooperating robot manipulators. International Conference on Information and Systems, China, 1991.
- [5] Ding Mei, Sun Zengqi. A general dual-arm robotic simulation system and cooperative control research of multi-manipulator. Second International Conference on Automation, Robotics and Computer Vision, Singapore, 1992.

A GENERAL METHOD FOR MODELING MULTI-MANIPULATORS

SUN ZENGQI JIN YICHUANG HE BIN DING MEI

(*Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University,
Beijing 100084 P. R. China*)

ABSTRACT

A general method for modeling multi-manipulators is presented. At the beginning, a cooperative task with dual arms is given as an example. Then, for the general method suitable for different numbers of manipulators and different tasks, generalized variables are introduced. And both kinematics and dynamics methods are also established by using the generalized variables. The general model provides a good tool for control and simulation of the multi-manipulator system.

Key words: Multi-manipulators, modeling, control, simulation.



孙增圻 1943年生,1966年毕业于清华大学自动控制系,1981年在瑞典获博士学位,现为清华大学计算机系教授,主要研究领域为神经网络控制、模糊控制、机器人智能控制和仿真等。

金亿创 1962年生,1984年毕业于清华大学计算机系,1987年获硕士学位,现在英国进行访问研究,主要研究领域为神经网络控制及机器人。