第20卷 第6期　自动化学报　Vol. 20, No. 6
1994年11月　ACTA AUTOMATICA SINICA　Nov., 1994

短文

多项式Schur稳定性的最大摄动区间

赵克友　徐世许
(青岛大学电气工程系　青岛　266071)

摘　　要

已知摄动多项式 $p(z,r)=\sum_{i=0}^{n} a_i(r)z^i$,其中诸系数 $a_i(r)(i=0,1,\cdots\cdots,n)$皆为实变量 r 的多项式函数，又设标称多项式 $p(z,0)$ 是 Schur 稳定的. 这里给出最大摄动区间 $(r_{\min}, r_{\max})$ 的计算方法,以使对这区间中的所有 r,多项式 $p(z,r)$ 都是 Schur 稳定的.

关键词: Schur 稳定性,鲁棒性,摄动多项式.

1　问题的叙述

若一个多项式的全部根位于开单位圆内,则称它是 Schur 稳定的，Schur 稳定多项式的全体以 $\boldsymbol{S}$ 记之. 考虑连续地依赖于实参量 r 的 n 阶实系数多项式族:

$$p(z,r)=a_0(r)+a_1(r)z+a_2(r)z^2+\cdots+a_n(r)z^n, \tag{1}$$

其中标称多项式 $p(z,0)$ 满足 $a_n(0)>0$ 及 $p(z,0)\in \boldsymbol{S}$，求最大区间 $(r_{\min},r_{\max})\subset R$，使对 $\forall r\in(r_{\min},r_{\max})$ 都有 $a_n(r)\neq 0$ 及 $p(z,r)\in \boldsymbol{S}$. “最大”系指当 r 等于区间端点时，$p(z,r)$ 是临界 Schur 稳定的. 显然 $r_{\min}<0, r_{\max}>0$ 是存在的,问题是如何去计算出它们. 从离散控制观点看 $r_{\min}$ 越小，$r_{\max}$ 越大系统的稳定鲁棒性就越好，因此 $r_{\min}$ 与 $r_{\max}$ 可作为单参数摄动系统稳定性的指标.

当式(1)中诸系数 $a_i(r)$ 是 r 的非线性连续函数时，文[1]提出用数字规划方法求最大摄动区间. 当 $a_i(r)$ 对 r 呈仿射线性关系时,文[2]给出直接求法. 在本文中设 $a_i(r)$ 是 r 的多项式函数,即

$$a_i(r)=a_{0i}+a_{1i}r+a_{2i}r^2+\cdots+a_{mi}r^m,\ i=0,1,2,\cdots,n. \tag{2}$$

将式(2)代入式(1),并按 r 的幂次合并同类项,可得

$$p(z,r)=p_0(z)+rp_1(z)+r^2p_2(z)+\cdots+r^mp_m(z), \tag{3}$$

其中 $p_k(z)=a_{k0}+a_{k1}z+a_{k2}z^2+\cdots+a_{kn}z^n,\ k=0,1,\cdots,m$. 此时标称多项式 $p(z,0)=p_0(z)$，其首项系数 $a_{0n}=a_n(0)$. 式(3)中的 $p(z,r)$ 可看作 $p_0(z)$ 沿 m 个“摄动方向” $p_k(z)$ 的组合. 当 $m=1$ 时 $p(z,r)$ 是单向摄动族，文[3]就多项式单向摄动族的 Hurwitz 稳定鲁棒性予以研究. 本文要解决下面的问题.

本文于1992年5月4日收到.

问题 1. 设式(3)中的 $a_{0n}>0$ 及 $p_0(z)\in \boldsymbol{S}$，求 r 的最大摄动区间 $(r_{\min},r_{\max})$ 以使对 $\forall r\in(r_{\min},r_{\max})$ 都有 $a_n(r)\neq 0$，且 $p(z,r)\in \boldsymbol{S}$。

诸系数 $a_i(r)$ 是 r 的多项式函数。众所周知，开环传递函数的分子与分母常是一些低阶次因子的乘积，若某些因子仿射线性依赖于参数 r，则闭环特征多项式必对 r 呈多项式依赖关系，整理后即为式(3)的形式。

2　问题的解答

对于离散型多项式 $p(z)=\sum_{i=0}^{n} a_i z^i$，$a_n>0$ 有 Jury 判据[4,5]：$p(z)\in \boldsymbol{S}$ 当且仅当同时有 (i) $p(1)>0$，(ii) $(-1)^n p(-1)>0$，(iii) 矩阵 $X-Y$，$X+Y$ 的行列式以及它们所有各阶内子行列式皆大于零，此处 X 与 Y 为如下定义的 $(n-1)$ 阶方阵：

$$X=\begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 \\ & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_3 \\ & & a_n & \cdots & a_4 \\ & & & \ddots & \vdots \\ \text{O} & & & & a_n \end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix} \text{O} & & & & a_0 \\ & & & \iddots & \vdots \\ & & a_0 & \cdots & a_{n-4} \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} \end{bmatrix}.$$

令 $J=X-Y$，则其行列式与 $p(z)$ 的 n 个根 $z_i(i=1,2,\cdots,n)$ 间有下面的 Jury 公式[6]：

$$|J|=a_n^{n-1}\prod_{\substack{k=1\\ i>k}}^{n}(1-z_i z_k). \tag{4}$$

设相应于 $p(z,r)$ 的上述矩阵为 $X(r)$，$Y(r)$ 与 $J(r)$；相应于式(3)右边诸 $p_k(z)$ 的矩阵为 X_k，Y_k 与 J_k。不难验证：

$$X(r)=\sum_{k=0}^{m} r^k X_k,\ Y(r)=\sum_{k=0}^{m} r^k Y_k,\ J(r)=\sum_{k=0}^{n} r^k J_k. \tag{5}$$

引理 1. 若存在实数 r^- 与 r^+，使对 $\forall r\in(r^-,r^+)$ 式(3)中的 $p(z,r)$ 都满足 $a_n(r)>0$ 及 $p(z,r)\in \boldsymbol{S}$，当且仅当同时有：

(c.1) 至少存在某一 $r_0\in(r^-,r^+)$，使 $a_n(r_0)>0$ 及 $p(z,r_0)\in \boldsymbol{S}$；

(c.2) $p(-1,r)\neq 0,\forall r\in(r^-,r^+)$；

(c.3) $p(1,r)\neq 0,\forall r\in(r^-,r^+)$；

(c.4) $|J(r)|\neq 0,\forall r\in(r^-,r^+)$。

证明. 根据 Jury 判据，(c.1)—(c.4) 的必要性是显然的. 下面用反证法证明其充分性. 若存在 $r_1\in(r^-,r^+)$ 有 $p(z,r_1)\notin \boldsymbol{S}$ 的话，因 $p(z,r_0)\in \boldsymbol{S}$，不失一般性可设 $r_1>r_0$。注意到 $p(z,r)$ 的根 $z_i(r)(i=1,2,\cdots,n)$ 对 r 有连续依赖关系，$p(z,r_0)\in \boldsymbol{S}$，$p(z,r_1)\notin \boldsymbol{S}$，于是必存在 $\tilde{r}\in(r_0,r_1)\subset(r^-,r^+)$，使 $p(z,\tilde{r})$ 有根位于单位圆上. 若 $p(z,\tilde{r})$ 有根 $z=\pm 1$，会与 (c.2)，(c.3) 相矛盾；若有模为 1 的共轭复根，则必与 (c.4) 相矛盾.　　证毕.

借助引理 1，可将问题 1 等价地转化为

问题 2. 设式(3)中的 $a_{0n}>0$ 及 $p_0(z)\in \boldsymbol{S}$，求 r 的最大摄动区间 $(r_{\min},r_{\max})$，使对 $\forall r\in(r_{\min},r_{\max})$ 都有 $a_n(r)\neq 0, p(1,r)\neq 0, p(-1,r)\neq 0$ 及 $|J(r)|\neq 0$.

注意 $p_0(z)\in \boldsymbol{S}$ 隐含 $p_0(1)\neq 0$，$p_0(-1)\neq 0$ 及 $|J_0|\neq 0$，于是可以定义下面的方阵，其中 A, P_{+1}, P_{-1} 是m阶的，J 是 $m(n-1)$ 阶的：

$$
\left.\begin{aligned}
&A=\left[\begin{array}{c|ccc}
\mathrm{O} & & \mathrm{I} & \\
\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{-a_{mn}}{a_{0n}} & \dfrac{-a_{m-1,n}}{a_{0n}} & \cdots & \dfrac{-a_{1n}}{a_{0n}}
\end{array}\right], \quad
J=\left[\begin{array}{c|ccc}
\mathbf{O} & & \mathbf{I} & \\
\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-J_0^{-1}J_m & -J_0^{-1}J_{m-1} & \cdots & -J_0^{-1}J_1
\end{array}\right]. \\
&P_{+1}=\left[\begin{array}{c|ccc}
\mathrm{O} & & \mathrm{I} & \\
\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{-p_m(1)}{p_0(1)} & \dfrac{-p_{m-1}(1)}{p_0(1)} & \cdots & \dfrac{-p_1(1)}{p_0(1)}
\end{array}\right], \\
&P_{-1}=\left[\begin{array}{c|ccc}
\mathrm{O} & & \mathrm{I} & \\
\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{-p_m(-1)}{p_0(-1)} & \dfrac{-p_{m-1}(-1)}{p_0(-1)} & \cdots & \dfrac{-p_1(-1)}{p_0(-1)}
\end{array}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{6}
$$

这里 O，I 与 $\mathbf{O}$，$\mathbf{I}$ 分别表示相应维数的零阵与单位阵. 下文中用符号 $\lambda_{\min}^{-}(\cdot)$ 与 $\lambda_{\max}^{+}(\cdot)$ 分别表示矩阵的最小负实特征值与最大正实特征值. 若矩阵无负实特征值，则令 $\lambda_{\min}^{-}(\cdot)=0^{-}$；若无正实特征值，则令 $\lambda_{\max}^{+}(\cdot)=0^{+}$.

引理 2. 若 $a_{0n}>0$ 及 $P_0(z)\in \boldsymbol{S}$，则对 $P(z,r)$ 而言有：

(i) 使 $a_n(r)\neq 0$ 的 r 最大摄动区间为 (r_1^-, r_1^+)，其中

$$
r_1^-=\frac{1}{\lambda_{\min}^{-}(A)}, \qquad r_1^+=\frac{1}{\lambda_{\max}^{+}(A)}; \tag{7}
$$

(ii) 使 $P(1,r)\neq 0$ 的 r 最大摄动区间为 (r_2^-, r_2^+)，其中

$$
r_2^-=\frac{1}{\lambda_{\min}^{-}(P_{+1})}, \qquad r_2^+=\frac{1}{\lambda_{\max}^{+}(P_{+1})}; \tag{8}
$$

(iii) 使 $P(-1,r)\neq 0$ 的 r 最大摄动区间为 (r_3^-, r_3^+)，其中

$$
r_3^-=\frac{1}{\lambda_{\min}^{-}(P_{-1})}, \qquad r_3^+=\frac{1}{\lambda_{\max}^{+}(P_{-1})}; \tag{9}
$$

(iv) 使 $|J(r)|\neq 0$ 的 r 最大摄动区间为 (r_4^-, r_4^+)，其中

$$
r_4^-=\frac{1}{\lambda_{\min}^{-}(\boldsymbol{J})}, \qquad r_4^+=\frac{1}{\lambda_{\max}^{+}(\boldsymbol{J})}. \tag{10}
$$

证明. 因结论 (i)—(iv) 的证明类似，故只就 (iv) 证之. 对分块阵的行列式进行行变换后有

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}|=\lambda^{m(n-1)^2}|J_0^{-1}|\cdot\left|J_0+\frac{1}{\lambda}J_1+\frac{1}{\lambda^2}J_2+\cdots+\frac{1}{\lambda^m}J_m\right|,$$

代 $r=\frac{1}{\lambda}$ 于上式，并利用式(5)，则得

$$\frac{1}{r^{m(n-1)^2}}|J(r)|=\frac{1}{|J_0^{-1}|}\left|\frac{1}{r}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{J}\right|.$$

欲使上式不为零，当且仅当 $\frac{1}{r}<\lambda_{\min}^{-}(\boldsymbol{J})$ 或 $\frac{1}{r}>\lambda_{\max}^{+}(\boldsymbol{J})$，也即

$$\frac{1}{\lambda_{\min}^{-}(\boldsymbol{J})}<r<\frac{1}{\lambda_{\max}^{+}(\boldsymbol{J})}.$$

证毕.

由此引理，即可得到如下定理——本文的主要结论.

定理. 设 $a_{0n}>0$ 及 $P_0(z)\in \boldsymbol{S}$，则使 $a_n(r)\neq 0$ 且保证 $P(z,r)\in\boldsymbol{S}$ 的 r 的最大摄动区间 $(r_{\min}^{-},r_{\max}^{+})$ 的左右端点分别为

$$r_{\min}=\max\{r_1^-,r_2^-,r_3^-,r_4^-\},r_{\max}=\min\{r_1^+,r_2^+,r_3^+,r_4^+\}. \tag{11}$$

3 算法与算例

算法步骤:

1) 输入多项式 $p_k(z)=\sum_{i=0}^{n}a_{ki}z^i(k=0,1,\cdots,m)$ 的系数 $a_{ki}(i=0,1,\cdots,n)$ 经适当处理使 $a_{0n}>0$；

2) 算 $p_k(-1)$ 及 $p_k(1)(k=0,1,\cdots,m)$，此时应有 $p_0(1)>0$ 及 $(-1)^n p_0(-1)>0$，否则说明标称多项式 $p_0(z)\notin\boldsymbol{S}$，停算；

3) 构造各多项式 $p_k(z)$ 的 J 矩阵 $J_k=X_k-Y_k(k=0,1,\cdots,m)$，此时应有 $|J_0|>0$，否则 $p_0(z)\notin\boldsymbol{S}$，停算；

4) 按式(6)构造 m 阶方阵 A,P_{+1},P_{-1} 及 $m(n-1)$ 阶方阵 $\boldsymbol{J}$；

5) 对 A,P_{+1},P_{-1} 及 $\boldsymbol{J}$ 求出各自的 $\lambda_{\min}^{-}(\cdot)$ 与 $\lambda_{\max}^{+}(\cdot)$，并算出 r_1^-,r_2^-,r_3^-,r_4^- 及 r_1^+,r_2^+,r_3^+,r_4^+；

6) 由式(11)求出 $r_{\min}$ 与 $r_{\max}$. 算毕.

算例.

考虑

$$\begin{aligned}P(z,r)&=(-0.03-r+r^2)+(0.31+r-r^2)z+(-0.1-r+0.1r^2)z^2+(1+0.5r)z^3\\&=\underbrace{(-0.03+0.31z-0.1z^2+z^3)}_{P_0(z)}+r\underbrace{(-1+z-z^2+0.5z^3)}_{P_1(z)}+r^2\underbrace{(1-z+0.1z^2)}_{P_2(z)},\end{aligned}$$

$a_3(0)=1$，使 $a_3(r)=1+0.5r\neq 0$ 的最大区间为 $(-2,+\infty)$；容易验证 $P_0(z)\in\boldsymbol{S}$，对 $P(1,r)=1.18-0.5r+0.1r^2$ 及 $P(-1,r)=-1.44-3.5r+2.1r^2$ 构造

$$P_{+1}=\begin{bmatrix}0 & 1.0000\\ -0.0847 & 0.4237\end{bmatrix},\quad P_{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1.0000\\ 1.4583 & 2.4306\end{bmatrix},$$

则 P_{+1} 的特征值为 $0.2119\pm j0.1996$，P_{-1} 的特征值为 0.4980 及 -2.9285. 于是求得 $r_2^-=-\infty$，

$r_2^+ = +\infty, r_3^- = -0.3415, r_3^+ = 2.0080$. 又由

$$J_0 = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.0700 \\ 0.0300 & 0.6900 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0 \\ 1.0000 & -0.5000 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.9000 \\ -1.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

算得

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -J_0^{-1}J_2 & -J_0^{-1}J_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0.1011 & 0.7961 & -0.5996 & 0.0506 \\ 1.4449 & -1.4839 & -1.4232 & 0.7224 \end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{J}$ 的特征值为 $0.4115 \pm j1.4219$, $-1.1963, 0.4961$. 由此得 $r_4^- = -0.8354$, $r_4^+ = 2.0157$. 最后求得 $r_{\min} = -0.3415, r_{\max} = 2.0080$.

4 结语

含不确定参量的系统在参量的标称值是稳定的时，并不能保证参量摄动后系统的稳定性，因此在参数空间中求取最大稳定边界一直是人们关注的问题. 本文考虑离散型多项式的 Schur 稳定最大界,其中多项式诸系统对一维参量呈多项式依赖关系. 这里给出了求参量最大摄动区间的算法，此算法简单直接. 进一步的问题是考虑含多摄动参量的一般情况,这将要用到最优化的某些理论与方法[1].

参 考 文 献

[1] Vicino A. Some results on stability of discrete-time systems. *IEEE Trans.*, 1988, AC-**33**:844—847.

[2] Soh C B. Robust stability of discrete-time systems using delta operators. *IEEE Trans.*, 1991, AC-**36**:377—380.

[3] Fu M, Barmish B R. Maximal unidirectional perturbation bounds for stability of polynomials and matrices. *Systems and control Letters*, 1988, (11):173—179.

[4] Jury E I. On the evalution of the stability determinants in linear discrete systems. *IRE Trans.*, 1962, AC-**7**:51—55.

[5] Jury E I. A simplified stability criterion for linear systems. *Proc. IRE*, 1962, **50**:1493—1500.

[6] Jury E I, Paulidis T. Stability and aperiodicity constraints for systems design. *IEEE Trans.*, 1963, CT-**10**:137—141.

MAXIMAL PERTURBATION INTERVAL FOR SCHUR STABILITY OF POLYNOMIALS

ZHAO KEYOU XU SHIXU

(Department of Electrical Engineering, Qingdao University, Qingdao 266071)

ABSTRACT

Given perturbed polynomials $p(z,r) = \sum_{i=0}^{n} a_i(r) z^i$, where the coefficients $a_i(r)$, $i = 0,1,\cdots,n$, are polynomial functions of a real variable r, and suppose also the nominal polynomial $p(z, 0)$ is Schur stable, this paper gives a simple method for calculating the maximal perturbation interval $(r_{\min}, r_{\max})$ so that the polynomials $p(z,r)$ are Schur stable for all r within the interval.

Key words: Schur stability, robustness, perturbed polynomials.