第20卷 第6期
1994年11月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 20, No. 6
Nov., 1994

短 文

广义分散前馈控制系统有穷固定模的研究

李光泉 高志伟 陈国威 郑丕谔
(天津大学系统工程研究所 天津 300072)

摘 要

研究了广义分散前馈控制系统有穷固定模问题，提出根据传输零点判别和消除有穷固定模的算法.

关键词: 广义系统,分散控制,前馈控制,有穷固定模,传输零点.

1 引言

近年来,广义分散控制系统逐渐受到人们的重视，并取得了一些研究成果[1,2]. 有穷固定模是一个很重要的概念,它对于广义分散控制系统的极点配置和镇定性都很有影响.因此，研究有穷固定模问题是很有意义的. 本文集中讨论广义分散前馈控制系统有穷固定模的判别和消除问题. 为了讨论方便,假定将要讨论的系统是R——能控且R——能观的[3].

2 预备知识

考虑广义分散前馈控制系统:

$$\begin{cases} E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \sum_{i=1}^{N} B_i \boldsymbol{u}_i(t), \\ \boldsymbol{y}_i(t) = C_i \boldsymbol{x}(t) + \sum_{j=1}^{N} D_{ij}\boldsymbol{u}_j(t),\ i \in \underline{N} = \{1,2,\cdots,N\}. \end{cases} \tag{2.1}$$

这里 $\boldsymbol{x} \in R^n$ 为状态矢量; $\boldsymbol{u}_i \in R^{m_i}$, $\boldsymbol{y}_i \in R^{l_i}$ 分别为第 i 个控制站的局部输入和输出矢量; $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$, $l = \sum_{i=1}^{N} l_i$, $A \in R^{n\times n}$, $E \in R^{n\times n}$, $\mathrm{rank}E < n$.

令系统(2.1)是正则的,即 $\det(sE - A) \neq 0$, $s \in \mathbb{C}$(复平面).

记 $B = (B_1,\cdots,B_N)$, $C^T = (C_1^T,\cdots,C_N^T)$, $D = \begin{bmatrix} D_{11} \cdots D_{1N} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ D_{N1} \cdots D_{NN} \end{bmatrix}$.

本文于1992年3月2日收到.

对系统(2.1)施加静态分散输出反馈控制:

$$u = Ky,\ K \in \bar{K}. \tag{2.2}$$

其中 $\bar{K} = \{K \mid K = \mathrm{blockdiag}(K_1, \cdots, K_N),\ K_i \in R^{m_i \times l_i},\ i \in \underline{N},\ \det(I_l - DK) \neq 0$, 且 $\det[\lambda E - A - BK(I_l - DK)^{-1}C] \not\equiv 0\}$.

相应的闭环系统为

$$E\dot{x} = [A + BK(I_l - DK)^{-1}C]x. \tag{2.3}$$

定义 2.1. 对于给定的反馈结构 $\bar{K}$, 系统(2.1)关于结构 $\bar{K}$ 的有穷固定模的集合为

$$\Lambda = \bigcap_{K \in \bar{K}} \sigma\{E, A + BK(I_l - DK)^{-1}C\}, \tag{2.4}$$

这里 $\sigma(R, T) = \{\lambda \mid \det(\lambda R - T) = 0,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda$ 有限$\}$.

显然,若取 $K = 0$, 则 $\sigma\{E, A + BK(I_l - DK)^{-1}C\} = \sigma(E, A)$,则必有 $\Lambda \subset \sigma(E, A)$.

定义 2.2. 对于系统(2.1)的一个 i 阶子系统 $G_j^i(\lambda)$, 多项式

$$z_j^i(\lambda) = \det\begin{bmatrix} A - \lambda E & B_\gamma^i \\ C_\alpha^i & D_{\alpha,\gamma}^i \end{bmatrix} = -P(\lambda) \cdot \det[G_j^i(\lambda)] \quad (j = 1, 2, \cdots, V_i) \tag{2.5}$$

称为它的零多项式. 其中 $G_j^i(\lambda)$ 为该子系统的传函阵, $Z_j^i(\lambda) = 0$ 的根为 i 阶子系统 $G_j^i(\lambda)$ 的传输零点; $P(\lambda) = \det(\lambda E - A)$; $\det[G_j^i(\lambda)] = \det[C_\alpha^i(\lambda E - A)^{-1}B_\gamma^i + D_{\alpha,\gamma}^i]$; $V_i = \dfrac{m!}{i!(m-i)!} \cdot \dfrac{l!}{i!(l-i)!}$.

引理 2.1. 对于系统(2.1)的闭环系统(2.3),有

$$\det[\lambda E - A - BK(I_l - DK)^{-1}C] = \det(I_l - DK)^{-1} \cdot \det(\lambda E - A) \cdot \det[I_l - G(\lambda)K]. \tag{2.6}$$

证明.

$$\begin{aligned}
\det[\lambda E - A - BK(I_l - DK)^{-1}C] &= \det\begin{bmatrix} \lambda E - A - BK(I_l - DK)^{-1}C & 0 \\ (I_l - DK)^{-1}C & I_l \end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix} \lambda E - A & BK \\ (I_l - DK)^{-1}C & I_l \end{bmatrix} \\
&= \det\begin{bmatrix} \lambda E - A & BK \\ 0 & I_l - (I_l - DK)^{-1}C(\lambda E - A)BK \end{bmatrix} \\
&= \det(I_l - DK)^{-1} \cdot \det(\lambda E - A) \cdot \det[I_l - G(\lambda)K].
\end{aligned}$$

证毕.

引理 2.2. [4]

$$\det[I_l - G(\lambda)K] = 1 - \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{V_i} \det(K_j^i)^T \cdot \det[G_j^i(\lambda)]. \tag{2.7}$$

联立式(2.5),(2.6)和(2.7),有

$$\det[\lambda E - A - BK(I_l - DK)^{-1}C] = \det(I_l - DK)^{-1} \cdot \left[P(\lambda) + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{V_i} \det(K_j^i)^T \cdot Z_j^i(\lambda)\right]. \tag{2.8}$$

因为 $\det(I_l - DK)^{-1} \neq 0$, 由式(2.8),并利用文[4]中定理1的证明方法,不难得到

如下定理。

定理 2.1. $\lambda_0 \in \sigma(E, A)$ 为系统 (2.1) 关于结构 $\bar{K}$ 的有穷固定模的充要条件是：矩阵 $\bar{K}^T$ 中所有非奇异子反馈阵所对应的一切子系统都以 λ_0 为公共传输零点。

3 有穷固定模的判定和消除

由定理 2.1 可知，在不以系统(2.1)的开环特征根 λ_0 为传输零点的所有子系统所对应的 $\bar{K}^T$ 的子反馈阵中，只要有一个是非奇异的，那么 λ_0 就不是系统(2.1)关于结构 $\bar{K}$ 的有穷固定模；否则 λ_0 是有穷固定模。

首先讨论如何求取不以 $\lambda_0 \in \sigma(E, A)$ 为传输零点的子系统。

将系统(2.1)的输入、输出向量的下标集合分别记为 $I = (1, 2, \cdots, m)$，$J = (1, 2, \cdots, l)$；并记 $B = B_I = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$，$C^T = C_J^T = (c_1^T, c_2^T, \cdots, c_l^T)$，$D = D_{J,I} = \begin{bmatrix} d_{11} \cdots d_{1m} \\ \vdots \quad \vdots \\ d_{l1} \cdots d_{lm} \end{bmatrix}$。

由于 λ_0 是系统(2.1)的开环特征根，所以 $\operatorname{rank}(A - \lambda_0 E) < n$。不妨设$(A - \lambda_0 E)$的降秩数为 $f(f > 0)$。已知系统(2.1)是 R——能控且 R——能观的，因此，总可以从 B_I 和 C_J 中找到子集 $B_{I'}$ 和 $C_{J'}(I' = (i_1, i_2, \cdots, i_f)$，$J' = (j_1, j_2, \cdots, j_f))$，使

$$\operatorname{rank}(A - \lambda_0 E \quad B_{I'}) = n, \tag{3.1a}$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A - \lambda_0 E \\ C_{J'} \end{bmatrix} = n. \tag{3.1b}$$

构造矩阵

$$Q = \left[\begin{array}{cc|c} A - \lambda_0 E & B_{I'} & B_{I-I'} \\ C_{J'} & D_{J',I'} & D_{J',I-I'} \\ \hline C_{J-J'} & D_{J-J',I'} & D_{J-J',I-I'} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

这里 $I - I' = (i_{f+1}, \cdots, i_m)$，$J - J' = (j_{f+1}, \cdots, j_l)$。

定理 3.1. $\lambda_0 \in \sigma(E, A)$，且满足式(3.1)，则由系统传函阵中的 I' 列和 J' 行构成的子系统 $\Sigma\begin{pmatrix} I' \\ J' \end{pmatrix}$ 不以 λ_0 为传输零点。

证明. 因 $\operatorname{rank}(A - \lambda_0 E) = n - f$，则

$$\operatorname{rank}\bar{A} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A - \lambda_0 E & B_{I'} \\ C_{J'} & D_{J',I'} \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\left[\begin{array}{cc|c} I_{n-f} & 0 & B_{I'}^1 \\ 0 & 0 & B_{I'}^2 \\ \hline C_{J'}^1 & C_{J'}^2 & D_{J',I'} \end{array}\right].$$

由式(3.1)可知，$B_{I'}^2$ 和 $C_{J'}^2$ 是满秩的，则

$$\operatorname{rank}\bar{A} = \operatorname{rank}\left[\begin{array}{cc|c} I_{n-f} & 0 & B_{I'}^1 \\ 0 & 0 & I_f \\ \hline C_{J'}^1 & I_f & 0 \end{array}\right] = n + f.$$

即 $\bar{A}$ 为满秩,则子系统 $\Sigma\binom{I'}{J'}$ 不以 λ_0 为传输零点。 证毕。

对矩阵 Q 进行线性变换:

$$Q=\begin{bmatrix}\bar{A} & \bar{B}\\ \bar{C} & \bar{D}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\bar{A} & 0\\ 0 & M\end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

其中 $M=-\bar{C}\bar{A}^{-1}\bar{B}+\bar{D}$,则有

定理 3.2. $\lambda_0\in\sigma(E,A)$,并对矩阵 Q 进行如式(3.3)的线性变换。如果矩阵 M 中的非奇异子阵 $\bar{M}$ 对应的列下标集 I'' 和行下标集 J'',与 I', J' 一起构成输入,输出下标集 I^* 和 J^*,即 $I^*=(I'I'')$, $J^*=(J'J'')$,则子系统 $\Sigma\binom{I^*}{J^*}$ 不以 λ_0 为传输零点。

证明. 由于

$$\det\begin{bmatrix}A-\lambda_0E & B_{I^*}\\ C_{J^*} & D_{J^*,I^*}\end{bmatrix}=\det\left[\begin{array}{cc|c}A-\lambda_0E & B_{I'} & B_{I''}\\ C_{J'} & D_{J',I'} & D_{J',I''}\\ \hline C_{J''} & D_{J'',I'} & D_{J'',I''}\end{array}\right]$$

$$=\det\begin{bmatrix}\bar{A} & 0\\ 0 & \bar{M}\end{bmatrix}=\det\bar{A}\cdot\det\bar{M}\neq 0$$

所以,子系统 $\Sigma\binom{I^*}{J^*}$ 不以 λ_0 为传输零点。 证毕。

由定理 3.1 和 3.2,便可以给出求取系统(2.1)不以 $\lambda_0\in\sigma(E,A)$ 为传输零点的子系统的算法。

算法 3.1. 求取不以 $\lambda_0\in\sigma(E,A)$ 为传输零点的子系统的集合。

步骤 1. 构造矩阵 $Q=\begin{bmatrix}A-\lambda_0E & B_I\\ C_J & D_{J,I}\end{bmatrix}$,经过线性变换找出所有满足式(3.1)的输入下标集 $I'_i(i=1,2,\cdots)$ 和输出下标集 $I'_j(j=1,2,\cdots)$。

步骤 2. 对每对输入集和输出集 I'_i 和 J'_j (为书写方便,简写成 I' 和 J')做如式(3.3)的线性变换,从 M 中找出所有非奇异子阵,并找出对应的列下标集 I'' 和行下标集 J'',与 I' 和 J' 一起构造子系统,便得到了系统(2.1)不以 λ_0 为传输零点的全部子系统。

算法 3.2. 判别和消除有穷固定模 $\lambda_0\in\sigma(E,A)$。

步骤 1. 用算法 3.1 求出所有不以 λ_0 为传输零点的子系统的集合。

步骤 2. 当这些子系统所对应的 $\bar{K}^T$ 的子反馈阵中只要有一个是非奇异的,则 λ_0 就不是有穷固定模;否则,λ_0 是系统(2.1)关于结构 $\bar{K}$ 的有穷固定模,转步骤 3。

步骤 3. 把这些子系统所对应的 $\bar{K}^T$ 的子反馈阵中降秩数为最少的一个变为非奇异,便消除了有穷固定模 λ_0,且所增加的反馈信息通道最少。

参 考 文 献

[1] 王恩平,刘万泉. 广义分散控制系统的有穷固定模. 自动化学报,1990,**16**(4): 358—361

[2] Xie X K. On fixed modes in singular systems. Proc. of the Amercian Contr. Conf., 1988, 1550—1551.

[3] Yip E L, Solvability. Controllabilty and observability of continuous descriptor system. *IEEE Trans. AC*, 1981, **26**(3):702—706.

[4] Tarokh M. Fixed modes in multivariable systems using constrained controllers. *Automatica*, 1985, **21**(4):495—497.

RESEARCH ON FINITE FIXED MODES IN SINGULAR FEEDFORWARD DECENTRALIZED CONTROL SYSTEMS

Li Guangquan Gao Zhiwei Chen Guowei Zheng Pi'e

(*Institute of Systems Engineering, Tianjing University, Tianjin* 300072)

Abstract

Problems of finite fixed modes in singular feedforward decentralized control systems are discussed. A new effective algorithm to determine and eliminate finite fixed modes is proposed in terms of the concept of transmission zeros.

Key words: Singular systems, decentralized control feedforward control, finite fixed modes, transmission zeros.