第 20 卷 第 6 期 自 动 化 学 报 Vol. 20, No. 6
1994 年 11 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1994

短 文

正控制总量受限下离散线性系统的能控域[1)]

陈 兆 宽 陈 辉
(山东大学数学系 济南 250100)

摘 要

本文研究正控制总量受限下一类多输入离散线性系统的能控域问题. 利用线性系统的分解技巧、凸集的支撑超平面与阶的估计等方法，得到了能控域的结构性定理，还给出了状态属于能控域的显式判别条件. 这些结果在工程控制与社会经济系统中是有实用价值的.

关键词: 正控制，总量受限，线性系统，能控域.

设离散线性系统的状态方程为

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k). \tag{1}$$

其中 A 为 $n\times n$ 正则实常阵; B 为 $n\times r$ 实常阵; $x(k)$ 为 n 维状态向量; $u(k)$ 为 r 维控制向量. 并设控制受到如下的约束:

$$0\leqslant u_s(k)<+\infty,\quad \sum_{k=0}^{N-1}u_s(k)\leqslant M_s,\quad s=1,\cdots,r, \tag{2}$$

上述约束的物理背景是正控制总量受限. 令

$$\Omega_s(N)=\left\{[u_s(k)]_{k=0}^{N-1},\ 0\leqslant u_s(k),\ \sum_{k=0}^{N-1}u_s(k)\leqslant M_s,\right\}\ s=1,\cdots,r, \tag{3}$$

$$\Omega(N)=\{[u_s(k)]_{k=0}^{N-1}\in\Omega_s(N),s=1,\cdots,r\}. \tag{4}$$

定义 1. 在状态空间 $\mathscr{X}$ 中确定这样的初始状态 $x(0)$ 的集合，使得对其中的每一点，必存在满足约束条件(2)的允许控制，能在有限拍内将它引导到坐标原点，这样的集合称为系统(1)在正控制总量受限下的最大能控域 Q.

令

$$Q(N)=\left\{p(N),p(N)=-\sum_{i=0}^{N-1}A^{-i-1}Bu(i),[u(i)]_{i=0}^{N-1}\in\Omega(N)\right\}, \tag{5}$$

则 $Q(N)$ 为控制受到(2)式的约束下的 N 拍能控域. 由于 $Q(N)\subset Q(N+1)$，所以

$$Q=\bigcup_{0\leqslant N<+\infty}Q(N). \tag{6}$$

文献[1]给出了系统(1)在控制受到约束

本文于 1992 年 2 月 29 日收到.
1) 国家自然科学基金资助课题.

$$0 \leqslant u_s(k) < +\infty,\ s = 1,\cdots,\ r,\ k = 0,1,\cdots \tag{7}$$

为完全能控的充要条件是:

(1) $\operatorname{rank}[B, AB, \cdots, A^{n-1}B] = n$; (8)

(2) B 的列向量构成正基. (9)

以下的讨论都假设满足这两个条件.

定义 2. 所谓向量组 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 构成它们所张成的子空间 $\operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r\}$ 的正基，是指对于 $\forall \boldsymbol{b} \in \operatorname{span}\{\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r\}$，都可表示为 $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r$ 的正系数的线性组合:

$$\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i \boldsymbol{b}_i,\ \mu_i > 0,\ i = 1,\cdots,r. \tag{10}$$

引理 1. 对于系统(1)存在满秩线性变换 T，令 $\boldsymbol{y} = T^{-1}\boldsymbol{x}$，则变换后的系统为

$$\boldsymbol{y}(k+1) = J\boldsymbol{y}(k) + G\boldsymbol{u}(k), \tag{11}$$

其中 $J = T^{-1}AT$，$G = T^{-1}B$. 可分别表示为

$$J = \begin{bmatrix} J_1, & 0, & 0 \\ 0, & J_2, & 0 \\ 0, & 0, & J_3 \end{bmatrix},\quad G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

这里 J_1, J_2, J_3 为实 Jordan 标准形,且 $|\lambda(J_1)| > 1$，$|\lambda(J_2)| = 1$，$|\lambda(J_3)| < 1$，$\lambda(J_i)$ 为 J_i 的特征值.

引理 2. 对于固定的正整数 N，$Q(N)$ 是凸集,原点是 $Q(N)$ 的内点.

引理 3. 设 $\boldsymbol{\xi}$ 为 n 维空间中的任意给定的单位向量,则原点到能控域 $Q(N)$ 的 $\boldsymbol{\xi}$ 方向支撑超平面的距离[2]可表示为

$$d(\boldsymbol{\xi}, N) = \sum_{s=1}^{r} \max_{0 \leqslant i \leqslant N-1} M_s[\boldsymbol{\xi}' A^{-i-1} \boldsymbol{b}_s]_-, \tag{13}$$

其中

$$[\boldsymbol{\xi}' A^{-i-1} \boldsymbol{b}_s]_- = \begin{cases} -\boldsymbol{\xi}' A^{-i-1} \boldsymbol{b}_s, & \text{当 } \boldsymbol{\xi}' A^{-i-1} \boldsymbol{b}_s < 0, \\ 0, & \text{当 } \boldsymbol{\xi}' A^{-i-1} \boldsymbol{b}_s \geqslant 0. \end{cases} \tag{14}$$

同样,原点到能控域 $Q(N)$ 的 $(-\boldsymbol{\xi})$ 方向的支撑超平面的距离也可表示为

$$d(-\boldsymbol{\xi}, N) = \sum_{s=1}^{r} \max_{0 \leqslant i \leqslant N-1} M_s[\boldsymbol{\xi}' A^{-i-1} \boldsymbol{b}_s]_+, \tag{15}$$

其中

$$[\boldsymbol{\xi}' A^{-i-1} \boldsymbol{b}_s]_+ = \begin{cases} 0, & \text{当 } \boldsymbol{\xi}' A^{-i-1} \boldsymbol{b}_s \leqslant 0, \\ \boldsymbol{\xi}' A^{-i-1} \boldsymbol{b}_s, & \text{当 } \boldsymbol{\xi}' A^{-i-1} \boldsymbol{b}_s > 0. \end{cases} \tag{16}$$

设

$$J_2 = \begin{bmatrix} J_2^1 & & 0 \\ & J_2^2 & \\ 0 & & \ddots \ \ J_2^q \end{bmatrix} \tag{17}$$

其中 J_2^1 相应于特征值 $\lambda_2^1 = 1$；J_2^2 相应于特征值 $\lambda_2^2 = -1$；J_2^t 相应于特征值 $\lambda_2^t = \sigma_t +$

$\mu_t j(3\leqslant t\leqslant q)$. 若 $J_2^t(t=1,2)$ 中最大子块的维数为 m_t 及 $J_2^t(3\leqslant t\leqslant q)$ 中最大子块的维数为 $2m_t$. 令

$$m=\max\{m_1,m_2,\cdots,m_q\} \tag{18}$$

相应于 J_2 的分解式(17), n_2 维向量 $\boldsymbol{\xi}_2$ 与 $\boldsymbol{g}_2$ 可表示为

$$\boldsymbol{\xi}_2=((\boldsymbol{\xi}_2^1)',(\boldsymbol{\xi}_2^2)',\cdots,(\boldsymbol{\xi}_2^q)')', \tag{19}$$

$$\boldsymbol{g}_{2s}=((\boldsymbol{g}_{2s}^1)',(\boldsymbol{g}_{2s}^2)',\cdots,(\boldsymbol{g}_{2s}^q)')', \tag{20}$$

于是

$$\boldsymbol{\xi}_2'J_2^{-i-1}\boldsymbol{g}_{2s}=\sum_{t=1}^{q}(\boldsymbol{\xi}_2^t)'(J_2^t)^{-i-1}\boldsymbol{g}_{2s}^t. \tag{21}$$

对于(21)式右端和式中的每一项,利用文献[3]的引理2.2中的(2.3)式与(2.4)式展开得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\xi}_2^t)'(J_2^t)^{-i-1}\boldsymbol{g}_{2s}^t=&B_{s0}^t-C_{i+1}^1\left(\frac{1}{\lambda_2^t}\right)^{i+2}B_{s1}^t+C_{i+2}^2\left(\frac{1}{\lambda_2^t}\right)^{i+3}B_{s2}^t\\&+\cdots+(-1)^{m-1}C_{i+m-1}^{m-1}\left(\frac{1}{\lambda_2^t}\right)^{i+m}B_{s(m-1)}^t,\ t=1,2,\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\xi}_2^t)'(J_2^t)^{-i-1}\boldsymbol{g}_{2s}^t=&B_{s0}^t+\bar{B}_{s0}^t-C_{i+1}^1\rho^{-2(i+2)}[(\lambda_2^t)^{i+2}B_{s1}^t+(\lambda_2^t)^{i+2}\bar{B}_{s1}^t]\\&+\cdots+(-1)^{m-1}C_{i+m-1}^{m-1}\rho^{-2(i+m)}[(\lambda_2^t)^{(i+m)}B_{s(m-1)}^t\\&+(\bar{\lambda}_2^t)^{i+m}\bar{B}_{s(m-1)}^t],\ 3\leqslant t\leqslant q.\end{aligned} \tag{23}$$

引理 3. 设在系统(12)中,为了使

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{s=1}^{r}M_s\max_{0\leqslant i\leqslant N-1}[\boldsymbol{\xi}_2'J_2^{-i-1}\boldsymbol{g}_{2s}]_-$$

存在有限的充要条件是:

$$B_{sk}^t=0,s=1,\cdots,r,\ t=1,\cdots,q,\ k=1,2,\cdots,m-1. \tag{24}$$

引理 4. 对于系统(12),设 $\boldsymbol{\xi}_1$ 为 n_1 维空间中任给的单位向量,则

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{s=1}^{r}M_s\max_{0\leqslant i\leqslant N-1}[\boldsymbol{\xi}_1'J_1^{-i-1}\boldsymbol{g}_{1s}]_-\text{存在有限.}$$

定理 1. 对于系统(1),在控制满足(2)式的约束下,状态 $\boldsymbol{x}\in Q(N)$ 的充要条件是对于 n 维空间中任给的单位向量 $\boldsymbol{\xi}$.

当 $\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{x}\geqslant 0$ 时,

$$\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{x}\leqslant d(\boldsymbol{\xi},N)=\sum_{s=1}^{r}M_s\max_{0\leqslant i\leqslant N-1}[\boldsymbol{\xi}'A^{-i-1}\boldsymbol{b}_s]_-; \tag{25}$$

当 $\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{x}<0$ 时,则

$$-\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{x}\leqslant d(-\boldsymbol{\xi},N)=\sum_{s=1}^{r}M_s\max_{0\leqslant i\leqslant N-1}[\boldsymbol{\xi}'A^{-i-1}\boldsymbol{b}_s]_+. \tag{26}$$

设 $\bar{Y}$ 为如下的集合:

$$\bar{Y}=\{(\boldsymbol{y}_1',\boldsymbol{y}_2',\boldsymbol{y}_3')'.$$

其中 $\boldsymbol{y}_1$ 为 n_1 维向量; $\boldsymbol{y}_2$ 为 n_2 维向量; $\boldsymbol{y}_3$ 为 n_3 维向量, 可以任取. 令 n 维单位向量 $\boldsymbol{\xi}$ 有相应的分解 $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\xi}_1',\boldsymbol{\xi}_2',\boldsymbol{\xi}_3')'$. 若 ξ_2 满足(24)式,对于如上选取的 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{y}_1$ 和 $\boldsymbol{y}_2$ 满足:

当 $(\boldsymbol{\xi}_1',\boldsymbol{\xi}_2')\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\\boldsymbol{y}_2\end{bmatrix}\geqslant 0$ 时,

$$(\boldsymbol{\xi}_1', \boldsymbol{\xi}_2')\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix} \leqslant \sum_{s=1}^{r} M_s \sup_{0\leqslant i<+\infty} [\boldsymbol{\xi}_1' J_1^{-i-1}\boldsymbol{g}_{1s} + \boldsymbol{\xi}_2' J_2^{-i-1}\boldsymbol{g}_{2s}]_- < +\infty; \tag{27}$$

当 $(\boldsymbol{\xi}_1', \boldsymbol{\xi}_2')\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix} < 0$ 时，

$$-(\boldsymbol{\xi}_1', \boldsymbol{\xi}_2')\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix} \leqslant \sum_{s=1}^{r} M_s \sup_{0\leqslant i<+\infty} [\boldsymbol{\xi}_1' J_1^{-i-1}\boldsymbol{g}_{1s} + \boldsymbol{\xi}_2' J_2^{-i-1}\boldsymbol{g}_{2s}]_+ < +\infty. \tag{28}$$

定理 2. $Q\subset\overline{Y}$.

证明. $\forall \boldsymbol{y}\in Q$，$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y}_1',\boldsymbol{y}_2',\boldsymbol{y}_3')$，对于这个 $\boldsymbol{y}$，存在 N_0 及 $[\boldsymbol{u}(i)]_{i=0}^{N_0-1}\in\Omega(N_0)$，使得

$$\boldsymbol{y} + \sum_{i=0}^{N_0-1} J^{-i-1}G\boldsymbol{u}(i) = 0, \tag{29}$$

所以

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix} + \sum_{i=0}^{N_0-1}\begin{bmatrix}J_1 & 0\\ 0, & J_2\end{bmatrix}^{-i-1}\begin{bmatrix}G_1\\ G_2\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(i) = 0. \tag{30}$$

根据定理 1，对于任给 (n_1+n_2) 维空间中的单位向量 $(\boldsymbol{\xi}_1', \boldsymbol{\xi}_2')'$，并且 $\boldsymbol{\xi}_2$ 满足(24)式.

当 $(\boldsymbol{\xi}_1', \boldsymbol{\xi}_2')\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix} \geqslant 0$ 时，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\xi}_1', \boldsymbol{\xi}_2')\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix} &\leqslant \sum_{s=1}^{r} M_s \max_{0\leqslant i\leqslant N_0-1} [\boldsymbol{\xi}_1' J_1^{-i-1}\boldsymbol{g}_{1s} + \boldsymbol{\xi}_2' J_2^{-i-1}\boldsymbol{\xi}_{2s}]_- \\ &\leqslant \sum_{s=1}^{r} M_s \sup_{0\leqslant i<+\infty} [\boldsymbol{\xi}_1' J_1^{-i-1}\boldsymbol{g}_{1s} + \boldsymbol{\xi}_2' J_2^{-i-1}\boldsymbol{g}_{2s}]_- < +\infty;\end{aligned} \tag{31}$$

当 $(\boldsymbol{\xi}_1', \boldsymbol{\xi}_2')\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix} < 0$ 时，

$$-(\boldsymbol{\xi}_1', \boldsymbol{\xi}_2')\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix} \leqslant \sum_{s=1}^{r} M_s \sup [\boldsymbol{\xi}_1' J_1^{-i-1}\boldsymbol{g}_{1s} + \boldsymbol{\xi}_2' J_2^{-i-1}\boldsymbol{g}_{2s}]_+ < +\infty. \tag{32}$$

证毕.

令集合 Y 为集合 $\overline{Y}$ 中的不等式(27)和(28)改为严格不等式所生成的集合.

定理 3. $Y\subset Q$.

定理 4. 设 $\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\xi}_1', \boldsymbol{\xi}_2', \boldsymbol{0}')'$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 满足(24)式，$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y}_1', \boldsymbol{y}_2', \boldsymbol{y}_3')'$.

当 $\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{y}>0$ 时，

$$\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\xi}_1'\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{\xi}_2'\boldsymbol{y}_2 = \sum_{s=1}^{r} M_s \sup_{0\leqslant i<+\infty} [\boldsymbol{\xi}_1' J_1^{-i-1}\boldsymbol{g}_{1s} + \boldsymbol{\xi}_2' J_2^{-i-1}\boldsymbol{g}_{2s}]_-; \tag{33}$$

当 $\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{y}<0$ 时，

$$-\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{\xi}_1'\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{\xi}_2'\boldsymbol{y}_2 = \sum_{s=1}^{r} M_s \sup_{0\leqslant i<+\infty} [\boldsymbol{\xi}_1' J_1^{-i-1}\boldsymbol{g}_{1s} + \boldsymbol{\xi}_2' J_2^{-i-1}\boldsymbol{g}_{2s}]_+. \tag{34}$$

则这个 $\boldsymbol{y}$ 是 Q 的边界点. 又令（$\boldsymbol{\xi}_2$ 仍满足(24)式）

$$\sum_{s=1}^{r} M_s \sup_{0\leqslant i<+\infty} [\boldsymbol{\xi}_1' J_1^{-i-1}\boldsymbol{g}_{1s} + \boldsymbol{\xi}_2' J_2^{-i-1}\boldsymbol{g}_{2s}]_- = M^*,$$

$$\sum_{s=1}^{r} M_s \sup_{0 \leqslant i < +\infty} [\xi_1' J_1^{-i-1} g_{1s} + \xi_2' J_2^{-i-1} g_{2s}]_+ = M^{**},$$

若存在某个正整数 N_0，使

$$\sum_{s=1}^{r} M_s \max_{0 \leqslant i < N_0 - 1} [\xi_1' J_1^{-i-1} g_{1s} + \xi_2' J_2^{-i-1} g_{2s}]_- = M^*,$$

则满足(33)式的 $y \in Q$；或者当

$$\sum_{s=1}^{r} M_s \max_{0 \leqslant i < N_0 - 1} [\xi_1' J_1^{-i-1} g_{1s} + \xi_2' J_2^{-i-1} g_{2s}]_+ = M^{**},$$

则满足(34)式的 $y \in Q$. 除此以外，$y \bar{\in} Q$.

参 考 文 献

[1] R Gabasof, F Kirillova. The qualitative theory of optimal processes. Marcel Dekker INC,1976.

[2] V G Boltyanskii. Optimal control of the discretetime system. Moscow: Publishing of house "Science", 1973.

[3] 陈辉等. 控制燃料受限下离散线性系统的能控域. 控制理论与应用,1992,(3).

CONTROLLABLE REGION FOR DISCRETE LINEAR SYSTEM WITH CONSTRAINT ON BOUNDED POSITIVE CONTROL

CHEN ZHAOKUAN CHEN HUI

(*Mathematics Department of Shandong University, Jinan* 250100)

ABSTRACT

In this paper, the problem of controllable region for discrete-time linear system with several positive control input limited sum total is studied. The decomposition technique of linear system, the support hyperplane of convex set and the estimating method of the order is used. The structural theorem not only has been obtained, but the explicit criteria condition which deduces whether the state belongs to controllable region also has been obtained. These results are useful in the engineering social and economic systems.

Key words: Positive control, constraint limited sum total, Linear system, controllable region.