第20卷 第6期
1994年11月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 20, No. 6
Nov., 1994

多指标动态规划的交互式满意置换率法

赵 蔚
(中国科学院自动化研究所 北京 100080)

吴沧浦
(北京理工大学自动控制系 北京 100081)

摘 要

提出了一种新的求解多指标动态规划问题的算法，它是由多目标静态规划的交互式满意置换率法[1]推广得到的. 通过增加附加状态变量进行数学模型转换，将单指标动态规划问题转化为静态规划问题，再进行迭代. 这样既减少了计算量，又使各指标间的置换关系易于求得. 所提方法在人机交互过程中对决策者的要求不高，对于一类常见的多指标动态规划问题，可以迅速获得满意的解.

关键词: 多目标规划，动态规划，交互式方法，满意决策，置换率.

1 引言

实际工程中的多指标动态规划问题日趋增多，而到目前为止，尚无特别有效的求解方法. 文献[2]提出的多指标动态规划的人机交互式满意权衡法是一种较有实用价值的算法，但也存在着一些不足. 该方法要求每次迭代时期求水平必须取得可行，而决策者设置期求水平时对其可行性很难把握，并且期求水平每改变一次，就要求解一个复杂的动态规划问题，计算量很大.

本文提出了一种新的求解多指标动态规划问题的算法，它是由多目标静态规划的交互式满意置换率法推广得到的. 算法的基本思路是：通过增加附加状态变量进行数学模型转换，将复杂的单指标动态规划问题转化为简单的静态规划问题，再进行迭代. 由该静态规划问题还可很容易地求出各指标间的置换关系. 在迭代终止，得到决策者满意的指标函数值向量后，再利用状态转移方程逆向递推即可求出决策者满意的局部非劣解[3]. 该方法克服了文献[2]所提方法的不足，提高了求解效率.

2 基本理论

设多指标动态规划模型为

(VDP)

本文于1992年6月5日收到.

$$\max\ \boldsymbol{f} \triangleq \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} v_k^1(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) + v_N^1(\boldsymbol{x}_N) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{N-1} v_k^l(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) + v_N^l(\boldsymbol{x}_N) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_k \in D(\boldsymbol{x}_k), k = 0, \cdots, N-1,$$
$$\boldsymbol{x}_k \in X, k = 0, \cdots, N,$$
$$\boldsymbol{x}_{k+1} = T_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k), k = 0, \cdots, N-1.$$

其中 $l \geqslant 2$; $\boldsymbol{x}_k$ 为状态变量，$k = 0, \cdots, N$; $\boldsymbol{u}_k$ 为决策变量；$D(\boldsymbol{x}_k) \subset R^r$ 为第 k 阶段对应于 $\boldsymbol{x}_k$ 的决策约束集，$k = 0, \cdots, N-1$; $X \subset R^n$ 为状态约束集.

把某一可行的初始状态 x_0 及相应的可行策略 $P_{0,N-1} \triangleq (\boldsymbol{u}_0, \cdots, \boldsymbol{u}_{N-1})$ 称为动态规划问题的可行解，记为 $(\boldsymbol{x}_0, P_{0,N-1})$.

做模型

DP($\boldsymbol{w}$) $\min\ z$

$$w_i(b_i - f_i) \leqslant z, i = 1, \cdots, l,$$
$$\boldsymbol{u}_k \in D(\boldsymbol{x}_k), k = 0, \cdots, N-1,$$
$$\boldsymbol{x}_k \in X, k = 0, \cdots, N,$$
$$\boldsymbol{x}_{k+1} = T_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k), k = 0, \cdots, N-1.$$

其中 $b_i > f_i^*$; $w_i = \dfrac{1}{b_i - \bar{f}_i}$; $\bar{f}_i < f_i^*$, f_i^* 是指标函数 f_i 所能取的最大值，$i = 1, \cdots, l$; $(\bar{f}_1, \cdots, \bar{f}_l)$ 是决策者的期求水平.

根据文献[4]，若 $(z^*, \boldsymbol{x}^*, P_{0,N-1}^*)$ 是 DP($\boldsymbol{w}$) 的严格局部最优解，则 $(\boldsymbol{x}_0^*, P_{0,N-1}^*)$ 是 (VDP) 的局部非劣解. DP($\boldsymbol{w}$) 是一动态规划，若直接求解，计算量很大.

取附加状态变量如下：

$$x_0^{n+i} \geqslant b_i, i = 1, \cdots, l;$$
$$x_1^{n+i} = x_0^{n+i} - v_0^i(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0), i = 1, \cdots, l;$$
$$\vdots$$
$$x_N^{n+i} = x_{N-1}^{n+i} - v_{N-1}^i(\boldsymbol{x}_{N-1}, \boldsymbol{u}_{N-1}), i = 1, \cdots, l.$$

将以上诸式相加，得

$$x_N^{n+i} = x_0^{n+i} - \sum_{k=0}^{N-1} v_k^i(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k), i = 1, \cdots, l,$$

$$x_N^{n+i} \geqslant b_i - \sum_{k=0}^{N-1} v_k^i(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k), i = 1, \cdots, l.$$

因此

$$x_N^{n+i} - v_N^i(\boldsymbol{x}_N) = x_0^{n+i} - f_i(\boldsymbol{x}_0, P_{0,N-1}), i = 1, \cdots, l,$$
$$x_N^{n+i} - v_N^i(\boldsymbol{x}_N) \geqslant b_i - f_i(\boldsymbol{x}_0, P_{0,N-1}), i = 1, \cdots, l. \tag{1}$$

于是得到了一个与 DP($\boldsymbol{w}$) 完全等价的模型：

$$\begin{aligned}
\text{DP1}(\boldsymbol{w})\ \min\ & \max_{1\leqslant i\leqslant l}\ \{w_i[x_N^{n+i}-v_N^i(\boldsymbol{x}_N)]\},\\
& \boldsymbol{u}_k\in D(\boldsymbol{x}_k),k=0,\cdots,N-1,\\
& \boldsymbol{x}_k\in X,k=0,\cdots,N,\\
& x_0^{n+i}\geqslant b_i,i=1,\cdots,l,\\
& \boldsymbol{x}_{k+1}=T_k(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k),k=0,\cdots,N-1,\\
& x_{k+1}^{n+i}=x_k^{n+i}-v_k^i(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k),i=1,\cdots,l,k=0,\cdots,N-1.
\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{y}_k=(\boldsymbol{x}_k,x_k^{n+1},\cdots,x_k^{n+l})$，以 Y_k 表示第 k 阶段的可达状态集，$k=0,\cdots,N$. 做模型

$$\begin{aligned}
\text{P}(\boldsymbol{w})\ \min\ & z\\
\text{s.t.}\ & w_i[x_N^{n+i}-v_N^i(\boldsymbol{x}_N)]\leqslant z,i=1,\cdots,l,\\
& \boldsymbol{y}_N\in Y_N.
\end{aligned}$$

假定 $(z^*,\boldsymbol{y}_N^*)$ 是 $\text{P}(\boldsymbol{w})$ 的严格局部最优解，$(\boldsymbol{y}_0^*,P_{0,N-1}^*)$ 是根据 $\text{DP1}(\boldsymbol{w})$ 的状态转移方程由 $\boldsymbol{y}_N^*$ 逆向递推得到的 $\text{DP1}(\boldsymbol{w})$ 的可行解. 那么由后面定理 1 的证明过程，可得 $(\boldsymbol{x}_0^*,P_{0,N-1}^*)$ 是 (VDP) 的局部非劣解. 其中 $\boldsymbol{x}_0^*$ 是由 $\boldsymbol{y}_0^*$ 的前 n 个分量组成的向量，且 $f_i(\boldsymbol{x}_0^*,P_{0,N-1}^*)=b_i-[x_0^{n+i*}-v_N^i(\boldsymbol{x}_N^*)]$. 在实际求解过程中，一般地，决策者只需了解局部非劣解对应的各指标函数值，因此在每次迭代中只需求解静态规划 $\text{P}(\boldsymbol{w})$. 在迭代终止，得到决策者满意的指标函数值向量后，再由 $\text{DP1}(\boldsymbol{w})$ 的状态转移方程逆向递推求出 (VDP) 的局部非劣解. 因为 $\text{DP1}(\boldsymbol{w})$ 的状态转移方程中的 $\boldsymbol{x}_{k+1}=T_k(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)$，$k=0,\cdots,N-1$，与 (VDP) 的状态转移方程相同，所以具体计算时只需由 (VDP) 的状态转移方程逆向递推，即可求出 (VDP) 的局部非劣解.

这里利用偏置换率[5]指导决策者设置期求水平，这种偏置换率 T_{ij} 被定义在指标空间中的局部非劣面上，它表示在局部非劣面上某点当第 j 个指标函数的值被提高（或降低）一个单位，而必须由第 i 个指标函数的值降低(或提高) T_{ij} 个单位来补偿，但其它指标函数的值均固定不变. 可通过求 $\text{DP}(\boldsymbol{w})$ 中约束条件 $w_i(b_i-f_i)\leqslant z(i=1,\cdots,l)$ 对应的 Kuhn-Tucker 乘子计算偏置换率 T_{ij}，但由于 $\text{DP}(\boldsymbol{w})$ 的变量维数太高，所以直接计算不可能. 可以将其转化为求解 $\text{P}(\boldsymbol{w})$ 中与约束条件 $w_i[x_N^{n+i}-v_N^i(\boldsymbol{x}_N)]\leqslant z\ (i=1,\cdots,l)$ 相对应的 Kuhn-Tucker 乘子.

定义 Y_N 上的函数

$$g_i(\boldsymbol{y}_N)=x_N^{n+i}-v_N^i(\boldsymbol{x}_N),i=1,\cdots,l.$$

于是 $\text{P}(\boldsymbol{w})$ 可表示成另一种形式：

$$\begin{aligned}
\min\ & z\\
\text{s.t.}\ & w_ig_i(\boldsymbol{y}_N)\leqslant z,i=1,\cdots,l,\\
& \boldsymbol{y}_N\in Y_N.
\end{aligned}$$

做模型

$$\begin{aligned}
(\text{VP})\ \max\ & \{b_1-g_1(\boldsymbol{y}_N),\cdots,b_l-g_l(\boldsymbol{y}_N)\},\\
\text{s.t.}\ & \boldsymbol{y}_N\in Y_N.
\end{aligned}$$

引理. 设 $\boldsymbol{y}_N^*$ 是 (VP) 的局部非劣解，$(\boldsymbol{y}_0^*,P_{0,N-1}^*)$ 是根据 $\text{DP1}(\boldsymbol{w})$ 的状态转移

方程由 $\boldsymbol{y}_N^*$ 逆向递推求得的 DP1($\boldsymbol{w}$) 的任一可行解，则必有 $x_0^{n+i*}=b_i, i=1,\cdots,l$. (证明略).

定理 1. 假定 (VDP) 中函数 $v_k^i(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)$, $T_k(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)$ 在 $\{(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)|\boldsymbol{x}_k\in X, \boldsymbol{u}_k\in D(\boldsymbol{x}_k)\}$ 上连续，$k=0,\cdots,N-1, i=1,\cdots,l, \boldsymbol{y}_N^*$ 是 (VP) 的局部非劣解,则必存在 $(\boldsymbol{x}_0^*,P_{0,N-1}^*)$，使 $(\boldsymbol{x}_0^*,P_{0,N-1}^*)$ 是 (VDP) 的局部非劣解，且 $b_i-g_i(\boldsymbol{y}_N^*)=f_i(\boldsymbol{x}_0^*,P_{0,N-1}^*), i=1,\cdots,l$.

证明. 令 $(\boldsymbol{y}_0^*, P_{0,N-1}^*)$ 是根据 DP1 ($\boldsymbol{w}$) 的状态转移方程由 $\boldsymbol{y}_N^*$ 逆向递推求得的 DP1($\boldsymbol{w}$) 的任一可行解,那么 $(\boldsymbol{x}_0^*,P_{0,N-1}^*)$ 是 (VDP) 的可行解,且

$g_i(\boldsymbol{y}_N^*)=x_N^{n+i*}-v_N^i(\boldsymbol{x}_N^*)=\boldsymbol{x}_0^{n+i*}-f_i(\boldsymbol{x}_0^*,P_{0,N-1}^*)=b_i-f_i(\boldsymbol{x}_0^*,P_{0,N-1}^*), i=1,\cdots,l$. 所以，$b_i-g_i(\boldsymbol{y}_N^*)=f_i(\boldsymbol{x}_0^*,P_{0,N-1}^*), i=1,\cdots,l$.

下面用反证法证明 $(\boldsymbol{x}_0^*,P_{0,N-1}^*)$ 是 (VDP) 的局部非劣解.

假定 $(\boldsymbol{x}_0^*,P_{0,N-1}^*)$ 不是 (VDP) 的局部非劣解,那么对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 (VDP) 的可行解 $(\tilde{\boldsymbol{x}}_0,\tilde{P}_{0,N-1})$，$(\tilde{\boldsymbol{x}}_0,\tilde{P}_{0,N-1})\in N((\boldsymbol{x}_0^*, P_{0,N-1}^*), \varepsilon)$，使 $f_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_0,\tilde{P}_{0,N-1})\geqslant f_i(\boldsymbol{x}_0^*,P_{0,N-1}^*)$，$i=1,\cdots,l$，且至少存在一个 $j, 1\leqslant j\leqslant l$，使 $f_j(\tilde{\boldsymbol{x}}_0,\tilde{P}_{0,N-1})>f_j(\boldsymbol{x}_0^*,P_{0,N-1}^*)$.

令 $\tilde{x}_0^{n+i}=b_i, i=1,\cdots,l, \tilde{\boldsymbol{y}}_0=(\tilde{\boldsymbol{x}}_0,\tilde{x}_0^{n+1},\cdots,\tilde{x}_0^{n+l})$,则 $(\tilde{\boldsymbol{y}}_0,\tilde{P}_{0,N-1})$ 是 DP1($\boldsymbol{w}$) 的可行解,从而 $\tilde{\boldsymbol{y}}_N$ 是 (VP) 的可行解，且 $g_i(\tilde{\boldsymbol{y}}_N)=\tilde{x}_0^{n+i}-f_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_0,\tilde{P}_{0,N-1})=b_i-f_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_0,\tilde{P}_{0,N-1}), i=1,\cdots,l$,故

$$b_i-g_i(\tilde{\boldsymbol{y}}_N)=f_i(\tilde{\boldsymbol{x}}_0,\tilde{P}_{0,N-1})\geqslant f_i(\boldsymbol{x}_0^*,P_{0,N-1}^*)=b_i-g_i(\boldsymbol{y}_N^*), i=1,\cdots,l, \tag{2}$$

且至少存在一个 $j, 1\leqslant j\leqslant l$，使

$$b_j-g_j(\tilde{\boldsymbol{y}}_N)=f_j(\tilde{\boldsymbol{x}}_0,\tilde{P}_{0,N-1})>f_j(\boldsymbol{x}_0^*,P_{0,N-1}^*)=b_j-g_j(\boldsymbol{y}_N^*). \tag{3}$$

因为 $v_k^i(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k), T_k(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)$ 连续，$k=0,\cdots,N-1, i=1,\cdots,l$, 所以 $\forall\varepsilon'>0$, $\exists 0<\delta<\varepsilon'$，使对 (VDP) 的任一可行解 $(\boldsymbol{x}_0,P_{0,N-1})$，$(\boldsymbol{x}_0,P_{0,N-1})\in N((\boldsymbol{x}_0^*,P_{0,N-1}^*), \delta)$，都有

$$\boldsymbol{x}_N\in N(\boldsymbol{x}_N^*,\varepsilon'),$$

$$\left|\sum_{k=0}^{N-1}v_k^i(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{u}_k)-\sum_{k=0}^{N-1}v_k^i(\boldsymbol{x}_k^*,\boldsymbol{u}_k^*)\right|<\varepsilon', i=1,\cdots,l.$$

现在取 $\varepsilon=\delta$，则有

$$\left|\left[b_i-\sum_{k=0}^{N-1}v_k^i(\tilde{\boldsymbol{x}}_k,\tilde{\boldsymbol{u}}_k)\right]-\left[b_i-\sum_{k=0}^{N-1}v_k^i(\boldsymbol{x}_k^*,\boldsymbol{u}_k^*)\right]\right|<\varepsilon', i=1,\cdots,l,$$

而 $\tilde{x}_N^{n+i}=\tilde{x}_0^{n+i}-\sum_{k=0}^{N-1}v_k^i(\tilde{\boldsymbol{x}}_k,\tilde{\boldsymbol{u}}_k)=b_i-\sum_{k=0}^{N-1}v_k^i(\tilde{\boldsymbol{x}}_k,\tilde{\boldsymbol{u}}_k), i=1,\cdots,l,$

$$x_N^{n+i*}=x_0^{n+i*}-\sum_{k=0}^{N-1}v_k^i(\boldsymbol{x}_k^*,\boldsymbol{u}_k^*)=b_i-\sum_{k=0}^{N-1}v_k^i(\boldsymbol{x}_k^*,\boldsymbol{u}_k^*), i=1,\cdots,l.$$

所以 $|\tilde{x}_N^{n+i}-x_N^{n+i*}|<\varepsilon'$，$i=1,\cdots,l$. 于是，$\tilde{\boldsymbol{y}}_N\in N(\boldsymbol{y}_N^*,M\varepsilon')$，$M$ 为正常数，再由 (2)，(3)两式得出 $\boldsymbol{y}_N^*$ 不是 (VP) 的局部非劣解，但此结果是与已知相矛盾的，所以 $(\boldsymbol{x}_0^*,P_{0,N-1}^*)$ 是 (VDP) 的局部非劣解.　　证毕.

令 Ω,Ω_1 分别是 (VDP),(VP) 的局部非劣面,由定理 1 可得，$\Omega_1\subset\Omega$.

根据 $g_i(i=1,\cdots,l)$ 的定义,由(1)式可得

$$g_i(\boldsymbol{y}_N)>0,\boldsymbol{y}_N\in Y_N,i=1,\cdots,l,$$
$$b_i-g_i(\boldsymbol{y}_N)<b_i,\boldsymbol{y}_N\in Y_N,i=1,\cdots,l.$$

定理 2[1]. 对多目标静态规划问题 (VP), 假设 $(z^*,\boldsymbol{y}_N^*)$ 是 $\mathrm{P}(\boldsymbol{w})$ 的严格局部最优解,则 $\boldsymbol{y}_N^*$ 是 (VP) 的局部非劣解. 又设

(1) $(z^*,\boldsymbol{y}_N^*)$ 是 $\mathrm{P}(\boldsymbol{w})$ 的约束的正规点;

(2) 在 $(z^*,\boldsymbol{y}_N^*)$,第二阶充分条件被满足;

(3) 在 $(z^*,\boldsymbol{y}_N^*)$,所有起作用的不等式约束非退化.

$\lambda_i(i=1,\cdots,l)$ 为在 $(z^*,\boldsymbol{y}_N^*)$ 处与约束条件 $w_i[x_N^{n+i}-v_N^i(\boldsymbol{x}_N)]\leqslant z(i=1,\cdots,l)$ 相对应的 Kuhn-Tucker 乘子,且在 $(z^*,\boldsymbol{y}_N^*)$ 处, 约束条件 $w_i[x_N^{n+i}-v_N^i(\boldsymbol{x}_N)]\leqslant z$ $(i=1,\cdots,l)$ 均起作用,则在 (VP) 的目标空间中的局部非劣面上 $(b_1-g_1(\boldsymbol{y}_N^*),\cdots,b_l-g_l(\boldsymbol{y}_N^*))$ 点处, b_i-g_i 对 b_j-g_j 的偏置换率为

$$\frac{\partial(b_i-g_i)}{\partial(b_j-g_j)}=-\frac{\lambda_j w_j}{\lambda_i w_i},i,j=1,\cdots,l,i\neq j.$$

至此,如果 $(z^*,\boldsymbol{y}_N^*)$ 是 $\mathrm{P}(\boldsymbol{w})$ 的严格局部最优解, $f_i^*=b_i-g_i(\boldsymbol{y}_N^*),i=1,\cdots,l$, 那么由定理 2 及 $\Omega_1\subset\Omega$ 可得,在 (VDP) 的指标空间中 Ω_1 上 $(f_1^*,\cdots,f_l^*)$ 点处,

$\dfrac{\partial f_i}{\partial f_j}=-\dfrac{\lambda_j w_j}{\lambda_i w_i}$, $i,j=1,\cdots,l,i\neq j$. 令 $T'_{ij}=-\dfrac{\lambda_j w_j}{\lambda_i w_i},i,j=1,\cdots,l,i\neq j$,

则 T'_{ij} 表示在由 (VDP) 的某些局部非劣点所构成的曲面 Ω_1 上各指标间的置换关系. Ω_1 不一定是 (VDP) 的局部非劣面,故 T'_{ij} 也不必是定义在 (VDP) 指标空间中局部非劣面上的偏置换率. 但由 T'_{ij} 的涵义,在算法中可用 T'_{ij} 代替 T_{ij}.

3 算法

下面给出算法的具体步骤:

1) 求 f_i 的最大值 f_i^*, 相应的最优解为 $(\boldsymbol{x}_0^i,P_{0,N-1}^i)$, 指标函数向量为 f^i, $i=1,\cdots,l$. 将 $f^i(i=1,\cdots,l)$ 送给决策者评价,若决策者对某 f^k 满意, 则得最终解 $(\boldsymbol{x}_0^k,P_{0,N-1}^k)$;否则,令 $b_i>f_i^*(i=1,\cdots,l)$,转到 2).

2) 计算 $\mathrm{DP1}(\boldsymbol{w})$ 中各阶段的可达状态集 $Y_k,k=0,\cdots,N$.

3) 由决策者设置期求水平 $\bar{f}_i<f_i^*,i=1,\cdots,l$,令 $k=l+1$.

4) 令 $w_i=\dfrac{1}{b_i-\bar{f}_i},i=1,\cdots,l$, 求 $\mathrm{P}(\boldsymbol{w})$ 的局部最优解 $(z^k,\boldsymbol{y}_N^k)$; 令 $f_i^k=b_i-[x_N^{k,n+i}-v_N^i(\boldsymbol{x}_N^k)],i=1,\cdots,l$, 将 $(f_1^k,\cdots,f_l^k)$ 送给决策者评价. 若决策者满意,再根据 (VDP) 的状态转移方程由 $\boldsymbol{x}_N^k$ 逆向递推求出最终解 $(\boldsymbol{x}_0^k,P_{0,N-1}^k)$;否则,转到 5).

5) 求各指标间的置换关系. 令 $w_i=\dfrac{1}{b_i-f_i^k},i=1,\cdots,l$, 求 $\mathrm{P}(\boldsymbol{w})$ 中与约束条件 $w_i[x_N^{n+i}-v_N^i(\boldsymbol{x}_N)]\leqslant z(i=1,\cdots,l)$ 相对应的 Kuhn-Tucker 乘子 $\lambda_i(i=1,\cdots,$

l)，令 $T'_{lj}=-\dfrac{\lambda_j w_j}{\lambda_l w_l}, i,j=1,\cdots,l, i\neq j$.

6) 将 $T'_{lj}(i,j=1,\cdots,l,i\neq j)$ 提供给决策者参考. T'_{lj} 表示若 f_j 的值被提高(或降低)一个单位,则必须由 f_l 的值降低(或提高)T'_{lj} 个单位来补偿. 决策者可根据 f^k 将所有指标函数分为两组，第一组是决策者认为需要进一步改善或可以接受的那些指标函数,设其下标集为 I_1; 第二组是决策者认为可以降低要求的那些指标函数,设其下标集为 I_2. 决策者重新设置期求水平,令 $\bar{f}_i\geqslant f_i^k, i\in I_1;\bar{f}_i\leqslant f_i^k, i\in I_2$. 其值由决策者确定，且满足 $\sum_{j=1}^{l-1}T'_{lj}(\bar{f}_j-f_j^k)-(\bar{f}_l-f_l^k)\leqslant\varepsilon$, ε 为一充分小的正数. 令 $k=k+1$,转到 4).

4　算例

设多指标动态规划问题为

$$\max\ \boldsymbol{f}\triangleq\begin{bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{9}\left(x_k^1+\dfrac{1}{2}x_k^2+u_k^1+\dfrac{1}{2}u_k^2\right)+e^{x_{10}^1+x_{10}^2-14}\\ \sum_{k=0}^{9}(x_k^1+x_k^2-u_k^1-u_k^2)-(x_{10}^1+x_{10}^2)^2\\ \sum_{k=0}^{9}(4x_k^1+6x_k^2-u_k^1-u_k^2)-x_{10}^1+\dfrac{9}{10}x_{10}^2\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}_0=(0,0),\\&-10\leqslant x_k^1\leqslant 10, k=1,\cdots,10,\\&-10\leqslant x_k^2\leqslant 10, k=1,\cdots,10,\\&\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{u}_k, k=0,\cdots,9.\end{aligned}$$

解:

1) 求 f_i 的最大值 $f_i^*, i=1,2,3$，得 $f_1^*=553.42878, f_2^*=180.25, f_3^*=921$,相应的指标函数向量分别为 $\boldsymbol{f}^1=(553.42878,-240,879)$，$\boldsymbol{f}^2=(129.25, 180.25, 919.05)$，$\boldsymbol{f}^3=(120,-200,921)$. 这里 f_2^* 对应的解不唯一，$\boldsymbol{f}^2$ 是任取的一非劣解对应的指标函数向量.

2) 计算 DP1($\boldsymbol{w}$) 中各阶段的可达状态集,得

$$Y_0=\left\{(0,0,x_0^3,x_0^4,x_0^5)\left|\begin{array}{l}x_0^3\geqslant 555\\x_0^4\geqslant 182\\x_0^5\geqslant 922\end{array}\right.\right\},$$

$$Y_k=\left\{(x_k^1,x^2,x_k^3,x_k^4,x_k^5)\left|\begin{array}{l}-10\leqslant x_k^1\leqslant 10\\-10\leqslant x_k^2\leqslant 10\\x_k^3\geqslant 570-15k-x_k^1-0.5x_k^2\\x_k^4\geqslant 202-20k+x_k^1+x_k^2\\x_k^5\geqslant 1022-100k+x_k^1+x_k^2\end{array}\right.\right\}, k=1,\cdots,10.$$

3) 由决策者设置初始期求水平,假设为 $\bar{\boldsymbol{f}}=(145,102,197)$.

4) 求 P($\boldsymbol{w}$) 的最优解,得 ($z^4,\boldsymbol{y}_{10}^4$) = (1.012547, 1.301748, 7.1007, 415.147902, 10.402448, 30.402448), 计算 $f_i^4, i=1,2,3$, 得 $f_1^4=139.85581$, $f_2^4=100.99642$, $f_3^4=896.6864$. 将 (f_1^4,f_2^4,f_3^4) 送给决策者评价,假设决策者不满意.

5) 求各指标间的置换关系, 得 $T'_{12}=-0.02681411$, $T'_{13}=-0.2631608$, $T'_{23}=-9.8142657$.

6) 将 T'_{12},T'_{13},T'_{23} 提供给决策者参考. 假设决策者认为 f_2 的值需要提高,而 f_1 的值可适当降低, f_3 的值可以接受. 考虑到新的期求水平需满足 $-(\bar{f}_1-f_1^4)+T'_{12}(\bar{f}_2-f_2^4)+T'_{13}(\bar{f}_3-f_3^4)\leqslant 0.0001$(本例中取 $\varepsilon=0.0001$),给出新的期求水平 $\bar{\boldsymbol{f}}=(138.783245, 140.99642, 896.6864)$.

7) 按照算法步骤进行下去. 当决策者给出期求水平 $\bar{\boldsymbol{f}}=(136.419668, 170.9790954, 900.6757)$ 时,求 P($\boldsymbol{w}$) 的最优解 (z,y_{10}),并计算 $f_i, i=1,2,3$,得 $f_1=136.03364$, $f_2=170.96899$, $f_3=900.6559$. 假设决策者满意, 根据 (VDP) 的状态转移方程由 $\boldsymbol{x}_{10}$ 逆向递推求出 (VDP) 的可行解,它就是决策者满意的最终解.

5 结论

本文所提出的求解一类常见的多指标动态规划问题的交互式方法, 利用置换率使设置的期求水平位于局部非劣面上点的切平面上, 从而提高了期求水平满足可行性要求的程度. 还可使决策者知道各指标间的置换关系, 这样就能指导决策者设置期求水平. 而且在每次迭代中不要求期求水平一定要取得可行. 特别是,决策者每改变一次期求水平,只需求解一个静态规划问题,减少了计算量,很好地适应了动态规划的特点. 算例说明了该方法的有效性.

参 考 文 献

[1] 赵蔚,吴沧浦. 多目标规划的交互式满意置换率法及其应用. 1993 中国控制与决策学术年会论文集,1993 年 5 月,黄山,670—673.

[2] 胡乐群,吴沧浦. 多指标动态规划的人机交互式满意权衡法. 自动化学报,1989,**15**(2): 105—113.

[3] Chankong V, Haimes Y Y. Multiobjective decision making: theory and methodology. Amsterdam: North-Holland, 1983: 152—153.

[4] Yano H, Sakawa M. Trade-off rates in the weighted tchebycheff norm method. *Large Scale Systems*, 1987, **13** (2):167—177.

[5] Haimes Y Y, Chankong V. Kuhn-tucker multipliers as trade-off in multiobjective decision-making analysis. *Automatica*, 1979, **15**(1):59—72.

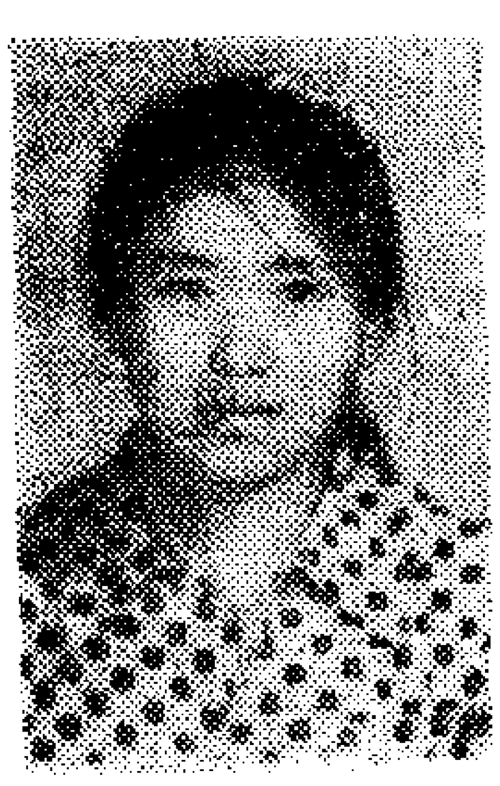
AN INTERACTIVE SATISFACTORY TRADE-OFF RATE METHOD FOR SOLVING MULTICRITERIA DYNAMIC PROGRAMMING

ZHAO WEI
(*Institute of Automation, Chinese Academy of Science, Beijing* 100080 *P.R. China*)
WU CANGPU
(*Department of Automatic Control, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081 *P. R. China*)

ABSTRACT

A new algorithm for solving multicriteria dynamic programming is proposed. It is obtained by extending the interactive satisfactory trade-off rate method for solving multiobjective static programming. By using some additional state variables, the mathematical model is transformed so that a dynamic programming problem is transformed into a static programming problem before iteration is performed. By doing so, the amount of computation is significantly reduced. Moreover, the relation of trade-off between criteria can be obtained easily. Using our method, the requirement to a decision maker is rather lenient in the process of man-machine interaction. For a class of general multicriteria dynamic programming problems, a solution which is satisfactory to the decision maker can be obtained quickly.

Key words: Multiobjective programming, dynamic programming, interactive method, satisfactory decision making, trade-off rate.



赵　蔚　1968年生，1989年毕业于北京理工大学应用数学系，并获学士学位，1992年在该校自动控制系获硕士学位．目前为中国科学院自动化研究所博士研究生，主要从事多目标决策理论与方法、大系统最优化等方面的研究．

吴沧浦　1932年生，1952年清华大学毕业，1962年中国科学院研究生毕业，1981年任北京理工大学教授，1984年任自动控制理论及应用专业博士生导师．主要研究领域为系统最优化、大系统控制与决策、神经网络技术与智能控制等．