

# 离散时滞系统最优跟踪控制及应用<sup>1)</sup>

褚健 胡协和 钟镔 陈虹

(浙江大学工业控制研究所 杭州 310027) (扬州大学水利学院 扬州 225001)

## 摘 要

本文研究线性时滞离散时间系统的最优跟踪控制问题,首先针对具有控制时滞,且输入输出之间具有前向直接通道的系统讨论,进而考虑一般多重时滞系统. 本文利用线性二次型加权积分(LQI)的最优状态反馈控制理论实现负荷变化时的最优跟踪控制. 文中研究了闭环系统的稳定性及输出完全跟踪,并针对某针厂一无纺针热处理淬火炉,进行了温度跟踪控制的仿真研究. 仿真结果表明,本文提出的控制方案在温度给定值变化条件下能达到快速、小偏差的跟踪效果.

**关键词:** 时滞系统,最优跟踪控制, LQI, 负荷变化,工业电阻炉.

## 1 引言

在实际工业过程中,时延现象极为普遍,如传输过程,热交换系统等,并且多品种小批量的生产方式越来越多,产量、质量指标的变换也较频繁. 因此对于时滞系统不仅要进行稳定化控制问题的研究,针对时滞系统在负荷发生变化及给定值调节情况下的最优控制问题也是很有意义的.

伺服系统最优控制理论的研究已较完善,并取得相当多的成果<sup>[1-4]</sup>,如对于能稳能观的线性定常系统,只要控制变量数不少于输出变量数,就能实现输出跟踪阶跃信号. 关于时滞系统稳定化控制的研究已不少<sup>[5-7]</sup>,但研究其最优跟踪控制并不多. 本文第二节首先讨论单控制滞后系统的最优跟踪控制,进而推广至一般多重时滞系统.

## 2 单控制滞后系统的最优跟踪控制

假定我们所研究的线性离散时间系统如下:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + B_1u(k-\tau), \quad (1)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k). \quad (2)$$

其中  $x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p, A, B, B_1, C, D$  为具有相应维数的定常矩阵,  $\tau$  表示系统输入通道中的时滞. 在方程(2)中,输入通过系数矩阵直接作用于系统的输出,假定  $D$  为满

1) 国家自然科学基金和浙江省自然科学基金资助项目.  
本文于1992年12月27日收到.

秩矩阵(即 $\text{rank}D = p \leq m$ ).

为考虑负荷变化,即参考输入 $r(k) \in R^p$ ,假定 $r(k)$ 为任意的有界信号,且有下列假定:

$$H_1: \lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = \bar{r}, \quad (3)$$

$$H_2: r(k+j) = r(k+N_L), j = N_L + 1, \dots \quad (4)$$

$H_2$ 意味着 $N_L$ 步后的参考输入均相同.

本文的目的是要设计稳定的、使系统输出跟踪参考输入的最优控制律,即对于系统(1)–(2),在假定条件 $H_1$ 和 $H_2$ 下,设计使下述目标函数达到最小的最优伺服控制律:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [e^T(k)Q_1 e(k) + \Delta x^T(k)Q_2 \Delta x(k) + \Delta u^T(k)R \Delta u(k)]. \quad (5)$$

其中

$$e(k) = r(k-1) - y(k-1), \quad (6)$$

$$\Delta x(k) = x(k) - x(k-1), \quad (7)$$

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1). \quad (8)$$

而 $Q_1$ ,  $R$ 分别为 $p \times p$ 和 $m \times m$ 正定加权阵, $Q_2$ 为 $n \times n$ 非负定加权阵.其中引入 $\Delta x$ 和 $\Delta u$ 的目的就是为消除余差,引入积分作用.为此,由(1)–(2)及(6)–(8)式,有如下差分方程:

$$\Delta x(k+1) = A\Delta x(k) + B\Delta u(k) + B_1\Delta u(k-\tau), \quad (9)$$

$$e(k+1) = e(k) - C\Delta x(k) - D\Delta u(k) + \Delta r(k), \quad (10)$$

其中

$$\Delta r(k) = r(k) - r(k-1). \quad (11)$$

由(9)–(10)式组成了增广系统,注意包含时滞的控制变量增量只出现在(9)式中.因此构造如下 $(n+p+\tau m) \times 1$ 的增广状态向量 $Z(k)$ :

$$Z(k) = \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ e(k) \\ \Delta u(k-\tau) \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta u(k-1) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

由此可将(9)–(10)式写成如下形式:

$$Z(k+1) = \bar{A}Z(k) + \bar{B}\Delta u(k) + \bar{C}\Delta r(k), \quad (13)$$

其中

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 & B_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ -C & I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & I_m \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ -D \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix}; \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_p \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

根据以上描述,我们可以看到,在增广系统(13)中,滞后项不出现了,因此可将最优跟踪控制问题(5)变为在约束(13)式使

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [Z^T(k)QZ(k) + \Delta u^T(k)R\Delta u(k)] \quad (15)$$

达到最小,其中

$$Q = \text{diag}[Q_2 \quad Q_1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad (16)$$

虽然这是普通的 LQ 问题,但在约束(13)中多了一项参考输入  $\Delta r(k)$ 。下面我们给出在假定  $H_1$  和  $H_2$  条件下的最优跟踪控制律  $\Delta u(k)$ 。

定理 1.  $(\bar{A}, \bar{B})$  能稳,  $(Q^{1/2}, \bar{A})$  能观,对系统(1)–(2),在假定条件(3)–(4)下,实现最优跟踪的控制律为

$$\Delta u(k) = -K_1 \Delta x(k) - K_2 e(k) - \sum_{i=1}^{\tau} K_d(i) \Delta u(k-i) - \sum_{j=0}^{N_L} K_f(j) \Delta r(k), \quad (17)$$

其中

$$K = [K_1, K_2, K_d^*], K_d^* = [K_d(\tau) \cdots K_d(1)], \quad (18)$$

$$K = [R + \bar{B}^T P \bar{B}]^{-1} \bar{B}^T P \bar{A}, \quad (19)$$

$$K_f(j) = [R + \bar{B}^T P \bar{B}]^{-1} \bar{B}^T (\bar{A}^T)^j P \bar{C}, \quad (20)$$

$$j = 0, 1, 2, \cdots, N_L$$

其中  $P$  为下式 Riccati 方程的解:

$$P = \bar{A}^T P \bar{A} - \bar{A}^T P \bar{B} [R + \bar{B}^T P \bar{B}]^{-1} \bar{B}^T P \bar{A} + Q. \quad (21)$$

证明 限于篇幅,证明过程略。

### 3 最优控制律的存在性

定理 1 仅给出了当  $(\bar{A}, \bar{B})$  能稳,  $(Q^{1/2}, \bar{A})$  能观的条件下存在最优控制律(17),但这一条件与原系统(1)–(2)之间有什么关系呢?或者说在什么条件下,  $(\bar{A}, \bar{B})$  是能稳的,  $(Q^{1/2}, \bar{A})$  是能观的呢?我们有如下定理:

定理 2. 假定  $(A, B)$  能稳,且

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_n - A & B + B_1 \\ C & -D \end{bmatrix} = n + p, \quad (22)$$

则  $(\bar{A}, \bar{B})$  能稳。

证明 显然当  $\text{rank}[sI - \bar{A} \bar{B}] = n + p + \tau m$  时,  $(\bar{A}, \bar{B})$  是能稳的。由(14)式即有

$$[sI - \bar{A} \bar{B}] = \begin{bmatrix} sI_n - A & 0 & -B_1 & 0 & B \\ C & sI_p - I_p & 0 & 0 & -D \\ 0 & 0 & sI_m & -I_m & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & -I_m & 0 \\ & & & & sI_m & I_m \end{bmatrix}. \quad (23)$$



由假定知  $\text{rank}[sI_n - AB] = n, |s| \geq 1$ , 当  $s \neq 1$  且  $|s| \geq 1$ , 有  $\text{rank}[sI - \bar{A}\bar{B}] = n + p + \tau m$ , 而当  $s = 1$  时, 由(23)式得使  $\text{rank}[sI - \bar{A}\bar{B}] = n + p + \tau m$  的条件为(22).

定理 3. 假定  $(C, A)$  能观, 且  $Q_1 > 0, Q_2 \geq 0$ , 则  $(Q^{1/2}, \bar{A})$  能观.

证明 同理可证.

由最优控制理论可知, 在满足上述两个定理的前提下, Riccati 方程(21)有唯一正定解, 且闭环系统  $\bar{A}_c$  稳定. 当参考输入  $r(k)$  满足假定条件(3), (4)时, 即  $\Delta r(k) \rightarrow 0$ , 当  $k \rightarrow \infty$ , 又由于  $\bar{A}_c$  稳定, 故当  $k \rightarrow \infty, \Delta Z(k) \rightarrow 0$ . 因此有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0. \quad (24)$$

这显然说明实现了跟踪控制.

#### 4 多重滞后系统的最优跟踪控制

在这一节里, 我们将把上述结论推广至一般的离散时滞系统. 假定有如下多重滞后系统:

$$x(k+1) = Ax(k) + \sum_{i=1}^{n_1} A_i x(k - \gamma_i) + Bu(k) + \sum_{j=1}^{n_2} B_j u(k - \tau_j), \quad (25)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k). \quad (26)$$

其中  $\gamma_i (i = 1, 2, \dots, n_1)$  和  $\tau_j (j = 1, 2, \dots, n_2)$  分别为状态项时滞和控制项时滞, 并假定

$$\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_{n_1} > 0, \quad (27)$$

$$\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_{n_2} > 0. \quad (28)$$

对于满足假定条件(3)–(4)的参考输入, 同样构造如下差分方程

$$\Delta x(k+1) = A\Delta x(k) + \sum_{i=1}^{n_1} A_i \Delta x(k - \gamma_i) + B\Delta u(k) + \sum_{j=1}^{n_2} B_j \Delta u(k - \tau_j), \quad (29)$$

$$e(k+1) = e(k) - C\Delta x(k) - D\Delta u(k) + \Delta r(k). \quad (30)$$

类似地可构造如下增广向量  $Z(k)$

$$Z(k) = \begin{bmatrix} e(k) \\ \Delta x(k) \\ \Delta x(k-1) \\ \vdots \\ \Delta x(k-\gamma_1) \\ \Delta u(k-1) \\ \vdots \\ \Delta u(k-\tau_1) \end{bmatrix}. \quad (31)$$

因此(29)–(30)式可写成如下增广系统

$$Z(k+1) = \bar{A}Z(k) + \bar{B}\Delta u(k) + \bar{C}\Delta r(k), \quad (32)$$

其中  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  类似可写出. 为实现最优跟踪控制, 目标函数(15)可改为

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [Z^T(k)QZ(k) + \Delta u^T(k)R\Delta u(k)], \quad (33)$$

其中

$$Q = \text{diag}[Q_1 \quad Q_2 \quad 0 \cdots 0], \quad (34)$$

同样可推得多重时滞系统(25)–(26)的最优跟踪控制律。

定理 4.  $(\bar{A}, B)$  能稳,  $(Q^{1/2}, \bar{A})$  能观, 对系统(25)–(26), 在假定条件(3)–(4)下, 实现最优跟踪的控制律为

$$\begin{aligned} \Delta u(k) = & -K_1 e(k) - K_2 \Delta x(k) - \sum_{i=1}^{\tau_1} K_p(i) \Delta x(k-i) \\ & - \sum_{j=1}^{\tau_1} K_d(j) \Delta u(k-j) - \sum_{l=0}^{N_L} K_f(l) \Delta r(k). \end{aligned} \quad (35)$$

其中

$$K = [K_1, K_2, K_p^*, K_d^*], K_p^* = [K_p(1) \cdots K_p(\tau_1)], K_d^* = [K_d(1) \cdots K_d(\tau_1)] \quad (36)$$

而且  $K$  和  $K_f(1)$  由(19)和(20)式定义(注意  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  不同)。

最优跟踪控制律的存在性可叙述如下:

定理 5. 假定  $(A, B)$  能稳, 且

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I_n - A - \sum_{i=1}^{\tau_1} A_i & B + \sum_{j=1}^{\tau_2} B_j \\ C & -D \end{bmatrix} = n + p, \quad (37)$$

则  $(\bar{A}, \bar{B})$  能稳。

证明 证明过程同定理 2, 此处略。

## 5 仿真研究

应用控制对象为浙江仙居针厂一无纺针热处理淬火炉, 该炉现采用时滞控制算法取代常规仪表 PID 控制律进行稳定化控制, 取得了很好的效果<sup>[8]</sup>。若采用常规 PID 法控制炉温, 其过渡过程在超调量与稳定速度方面的指标均不如时滞控制算法优越<sup>[8]</sup>。这里将本文提出的最优跟踪控制算法与现用的时滞控制算法就设定值变化时的跟踪控制进行比较。

淬火炉状态空间模型为<sup>[8]</sup>:

$$x(k+1) = Ax(k) + A_1 x(k-\tau) + Bu(k),$$

其中  $\tau = 15$ , 系数矩阵见文[8]。  $x$  代表五个工作区的温度,  $u$  代表五个工作区的加热电流。

最优目标函数如(33), (34)式。其中  $Q_1, Q_2, R$  加权矩阵选为

$$\begin{aligned} Q_1 &= \text{diag}[0.25 \quad 0.1111 \quad 1 \quad 1 \quad 4] \\ Q_2 &= \text{diag}[0.50 \quad 0.2222 \quad 4 \quad 4 \quad 16] \end{aligned}$$

$$R = \text{diag}[0.25 \quad 0.4444 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

仿真曲线见图 1—图 6。其中图 6 为温度给定值调节曲线  $\Delta r(k)$ 。假定五个温区给定调节相同,均为 3 分钟(18 个采样周期)内提高  $10^\circ\text{C}$ 。

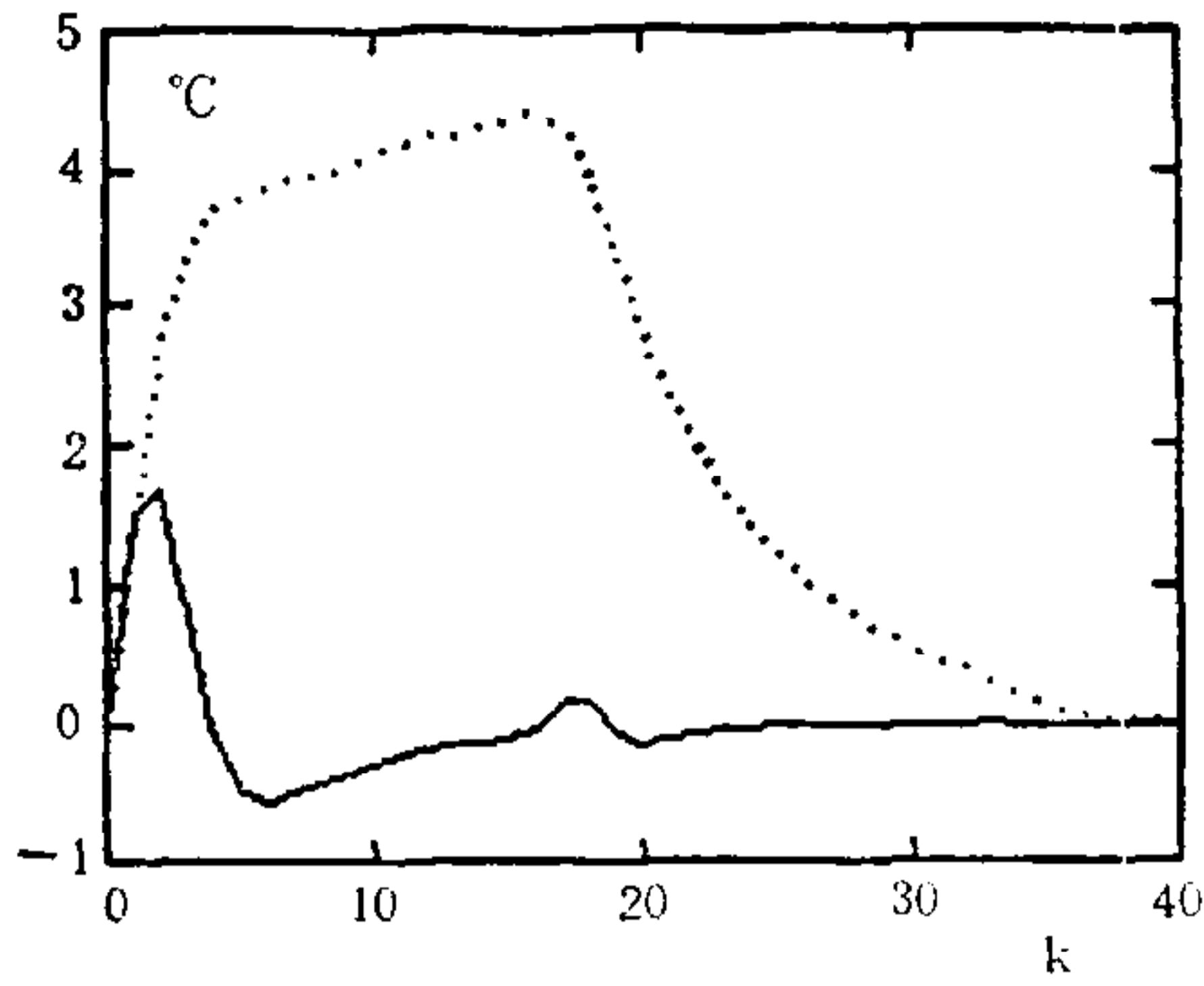


图 1  $e_1 = r_1 - y_1$

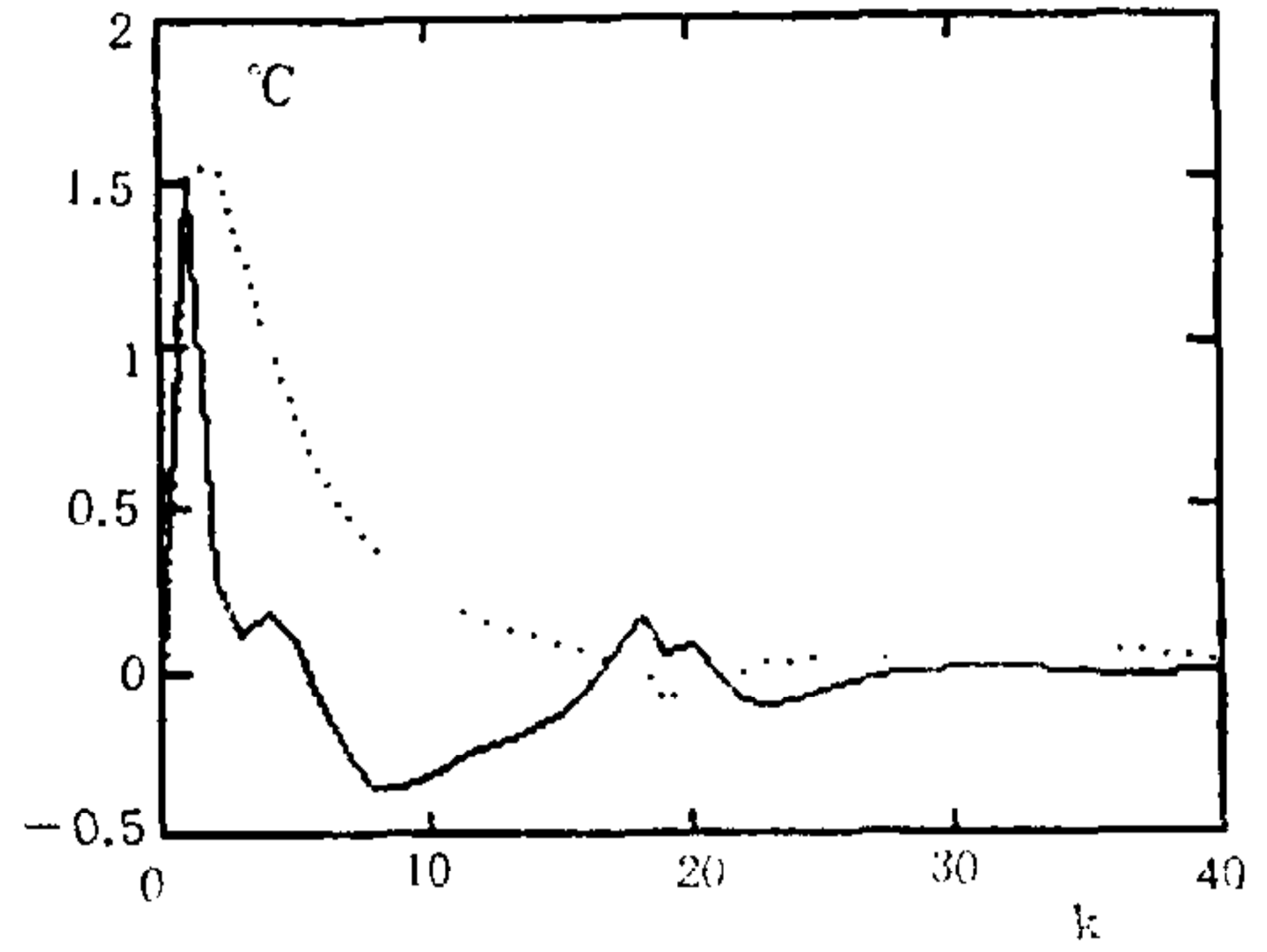


图 2  $e_2 = r_2 - y_2$

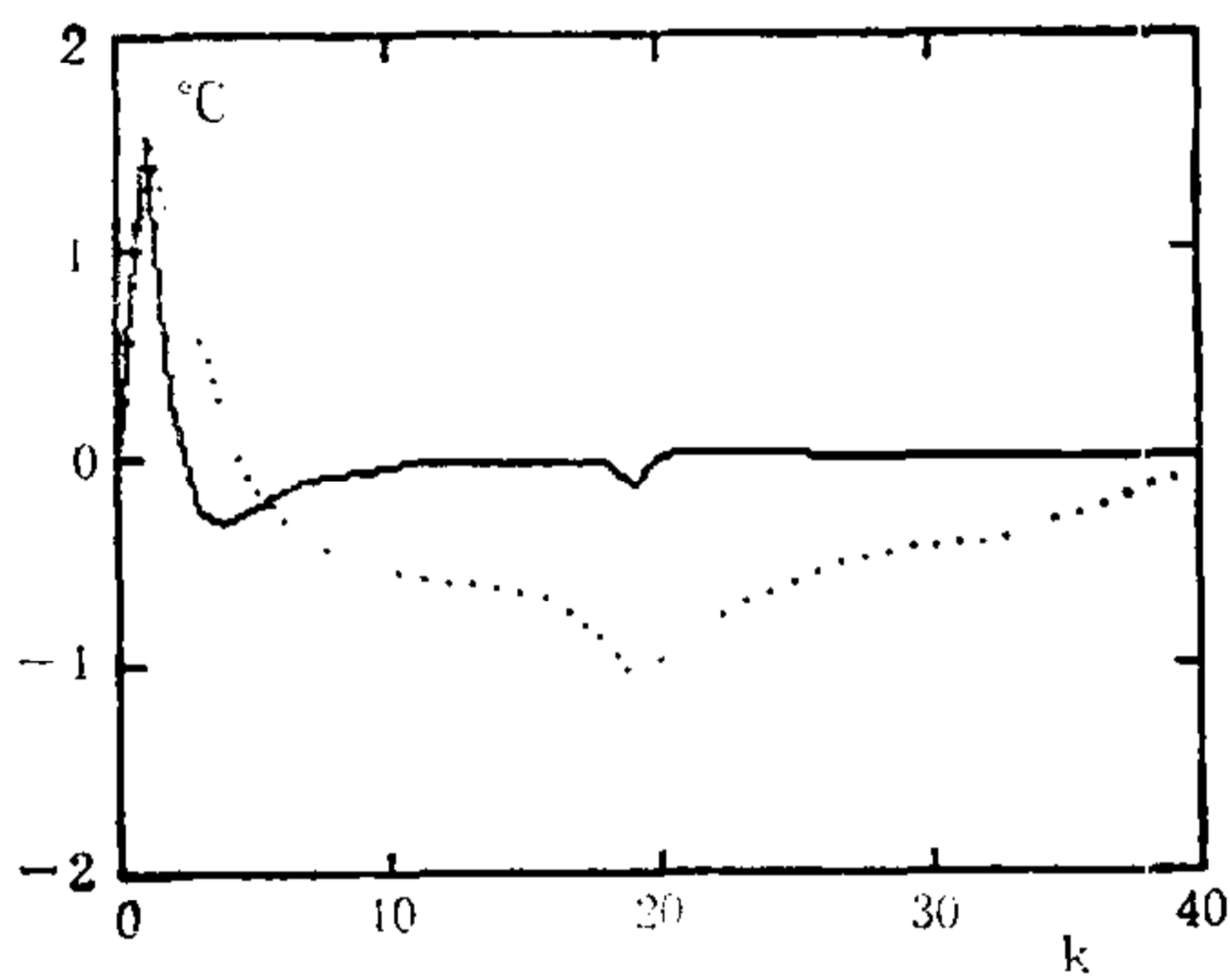


图 3  $e_3 = r_3 - y_3$

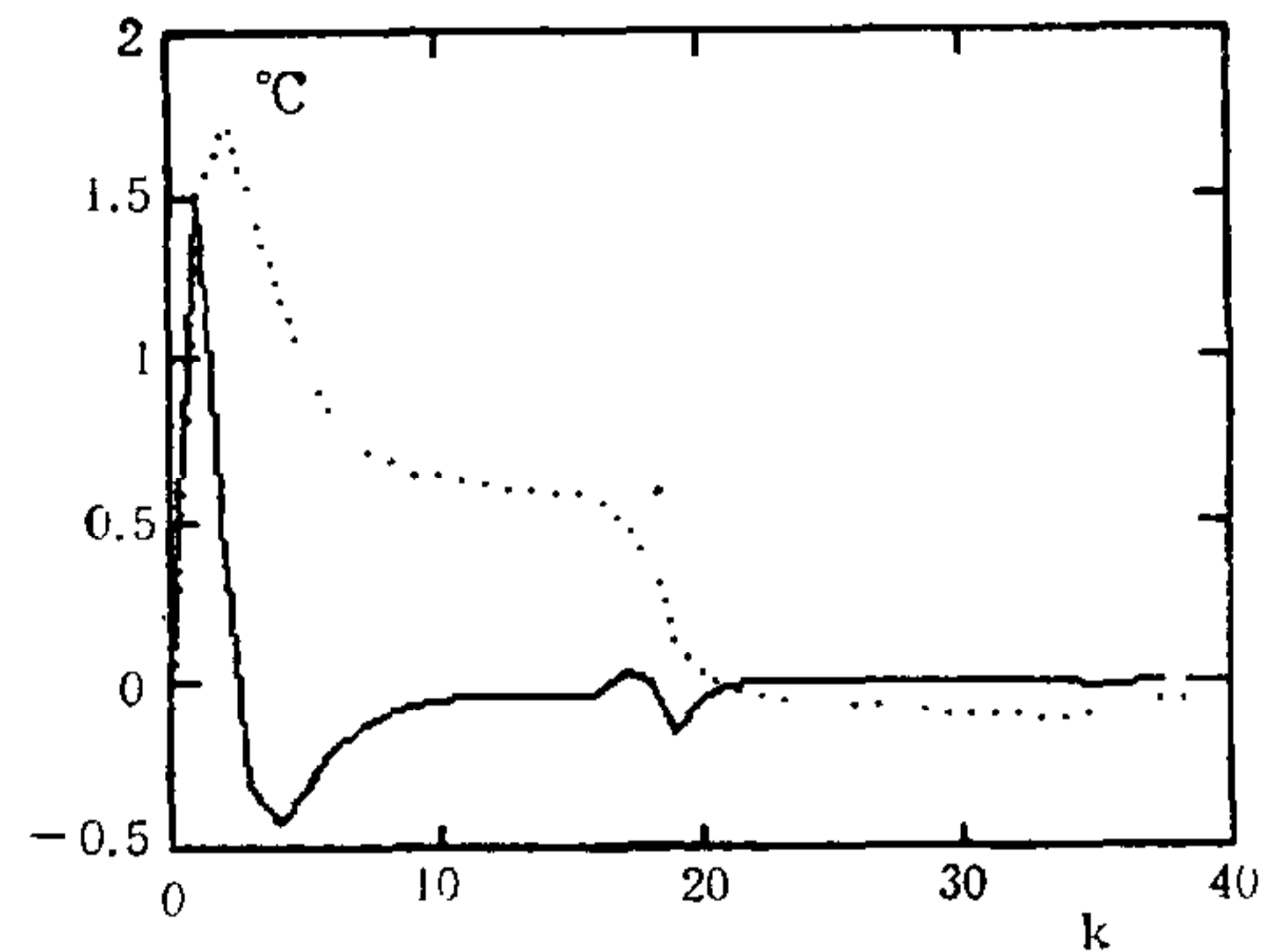


图 4  $e_4 = r_4 - y_4$

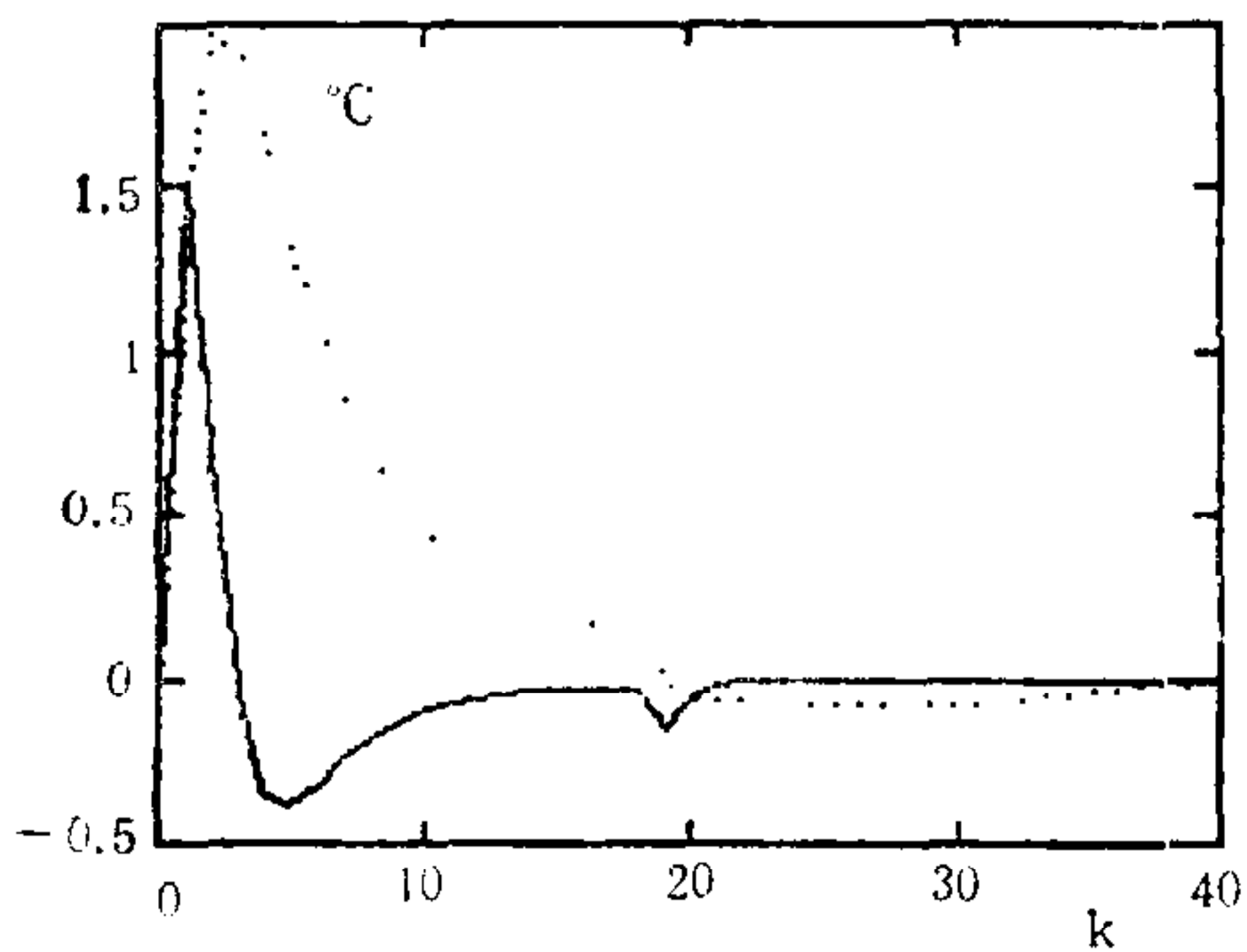


图 5  $e_5 = r_5 - y_5$

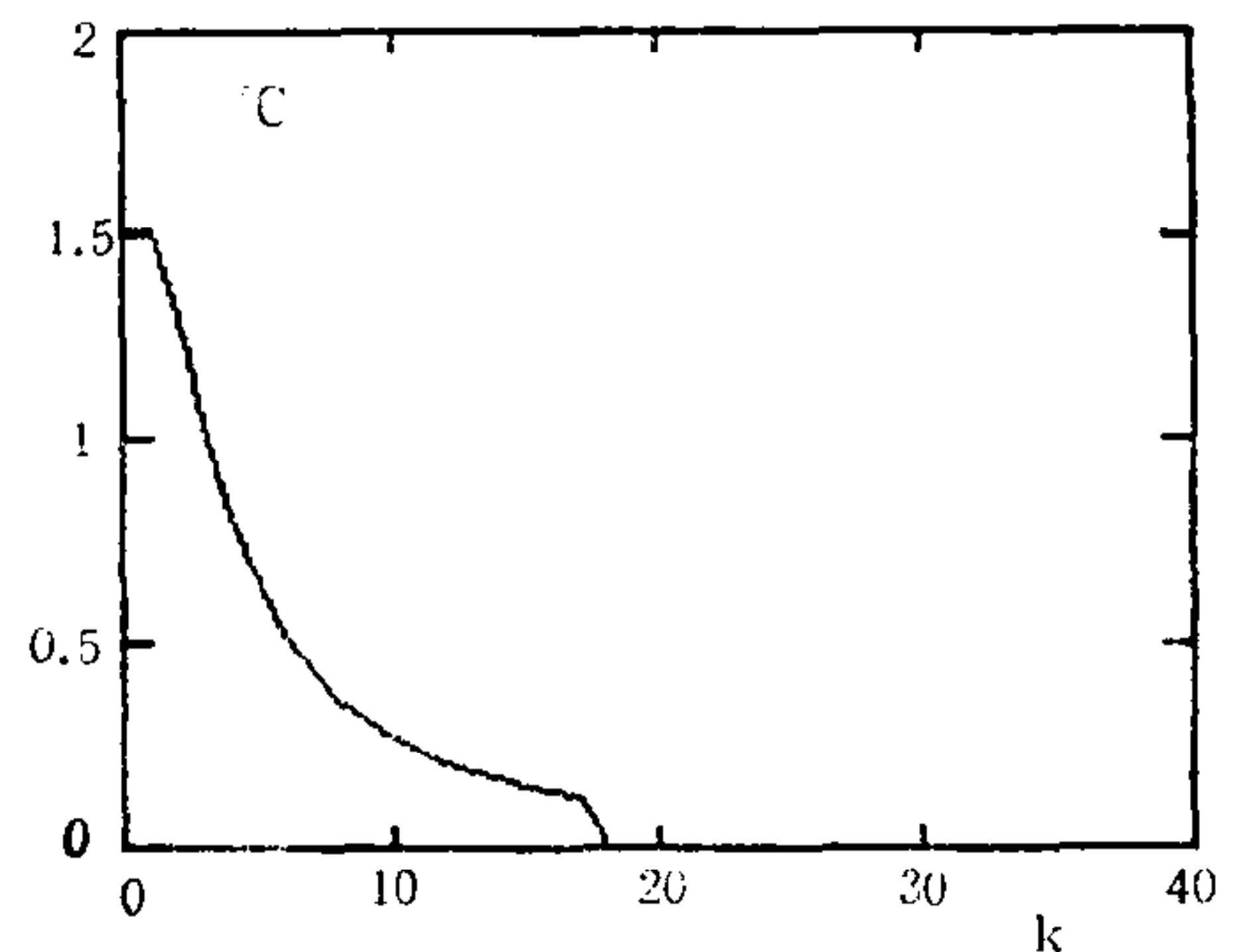


图 6  $e_6 = r_6 - y_6$

图 1—图 5 分别表示五个炉区温度与给定值偏差曲线,其中实线为采用最优跟踪算法的跟踪曲线,虚线为采用时滞控制算法的跟踪曲线。

比较仿真曲线可以看出,若采用最优跟踪控制,五个炉区过渡过程普遍优于时滞控制



算法的效果,最大偏差较小,偏差总面积也较小,说明最优跟踪控制算法使系统输出具有更好的随动性;同时,跟踪达到无差的时间较短,也说明输出具有很好的稳定性。

本文讨论了时滞离散系统的最优跟踪问题,给出相应的最优控制律及其存在性条件,并结合实际工业过程作了应用仿真研究,分析了采用该最优控制律达到的跟踪效果。

### 参 考 文 献

- [1] Lewis F L. Optimal Control. Wiley, 1986.
- [2] 张伯彦,蔡庆宇,袁曾任。“跟踪机动目标的一种新方法的研究”。控制理论与应用,1992,9: 215.
- [3] Fujinaka T and Araki M. “Discrete Time Optimal Control of Systems with Unilateral Time-Delays”. *Automatica*, 1987, 23: 763.
- [4] Kwakernaak H H and Sivan R. “Linear Optimal Control Systems”. New York: Wiley, 1972.
- [5] 片山彻等. 負荷変化を考慮したデジタルトラック制御系の設計. システム制御情報学会論文誌, 1992,5: 111.
- [6] Mori T et al. A Way to Stabilize Linear Systems with Delay States. *Automatica*, 1983, 19: 571.
- [7] 褚健,林南春. 具有可调衰减度的时滞系统鲁棒控制器设计. 浙江大学学报,1994.4
- [8] 褚健,于军,林南春,“工业电加热炉的时滞控制算法及应用”. 江西工业大学学报,1992,14(3): 119—123.
- [9] 解学书. 最优控制理论与应用. 清华大学出版社, 1986.

## OPTIMAL TRACKING CONTROL OF DISCRETE TIME-DELAY SYSTEMS AND ITS APPLICATION

CHU JIAN HU XIEHE ZHONG ER

(*Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University Hangzhou 310027*)

CHEN HONG

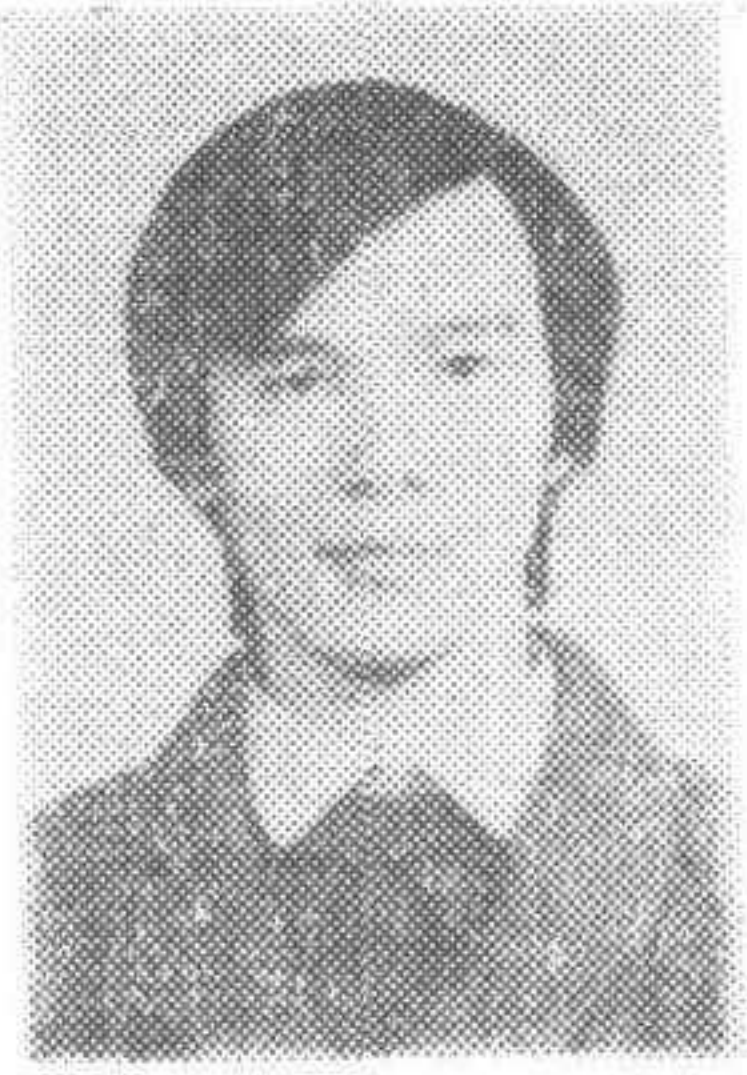
(*Jiangsu Institute of Irrigation Works Yangzhou University 225001*)

### ABSTRACT

This paper discusses the optimal tracking control of linear discrete time-delay systems. The system with control-time-delay and direct path between input and output variables is discussed first, and then a general form of time-delay systems is analysed. An extended state vector involved all the time-delay variables of the original system is constructed to get an extended new system without time-delay. Using the optimal feedback control theory of LQI, this paper gives optimal control tracking algorithm and the conditions of stability and exact tracking of close-loop systems. Finally, a simulation study on an industrial electric heater is carried out. The result shows that, in the situation of temperature setpoint changes, the optimal tracking control can result in fast exact tracking with small deviation.

**Key words:** Time-delay systems, optimal tracking control, LQI, load change, industrial electric heater.





**褚健** 1963年4月生。1986年—1989年留学日本京都大学，1989年获博士学位。回国后在浙江大学工业控制研究所从事博士后研究工作，后留校任教。1991年被聘为副教授。现任浙江大学工业自动化国家工程研究中心副主任。主要从事时滞系统控制、非线性系统控制理论及工业应用研究，发表论文三十余篇。



**胡协和** 1982年毕业于浙江大学化工系并获学士学位，同年在大连参加工作，1983年考回浙江大学电机系攻读硕士学位，1986年毕业后留校任教，1992年9月晋升为副教授。目前主要的研究领域是控制理论及应用，过程控制，微机控制及应用。