

# 一类工业过程预测控制的闭环分析<sup>1)</sup>

席裕庚 厉隽恂

(上海交通大学自动化研究所 200030)

## 摘 要

该文定量分析了一类典型工业过程预测控制系统的闭环性能,文中首先基于广义动态矩阵控制系统的内模控制结构和控制器的最小化形式,导出了一阶惯性加时滞的典型对象预测控制的闭环传递函数,在此基础上,给出了预测控制中主要设计参数与闭环动态响应和扰动抑制时间的解析关系以及关于闭环系统鲁棒性的三个定理,提出了对增益或时滞失配允许范围的搜索算法,从而为分析和设计预测控制系统提供了理论依据。

**关键词:** 预测控制,广义动态矩阵控制,工业过程,系统分析,鲁棒性。

## 1 引言

70年代中期发展起来的各种预测控制算法,如DMC<sup>[1]</sup>、MAC<sup>[2]</sup>等,由于采用了简易的建模方式,以滚动优化和在线误差校正保证了优良的控制性能和对参数、环境变化的强鲁棒性,已在工业过程中获得了广泛的应用。然而,在这些算法中,设计参数与闭环性能间缺乏直接的定量关系,通常的文献只是给出了一些定性规则,因而对控制效果的估计只能通过仿真获得。为了便于系统分析与设计,进一步从理论上研究预测控制系统的闭环性能是十分必要的。

本文从预测控制的内模控制结构和最小化实现形式出发,针对一类常见的一阶惯性加时滞的工业过程,分析了其预测控制系统的闭环性能,给出了系统动态响应、抗干扰性、鲁棒性与设计参数的解析关系,从而为分析和设计这类过程的预测控制系统提供了理论依据。

## 2 广义动态矩阵控制算法及其内模控制结构

广义动态矩阵控制(GDMC)是在Cutler等提出的动态矩阵控制(DMC<sup>[1]</sup>)基础上,推广了其性能指标的形式和反馈校正的策略而得到的一种预测控制算法<sup>[3]</sup>。它以线性稳定对象的单位阶跃响应的有限采样值 $\{a_i, i=1, \dots, N\}$ 为设计的出发点。其算法原理可简要概括为:

### 1) 预测模型

1) 国家自然科学基金资助。

本文于1992年1月24日收到

$$\tilde{y}_M(k+i|k) = \tilde{y}_0(k+i|k) + \sum_{j=1}^{\min(M,i)} a_{i-j+1} \Delta u(k+j-1), \quad i=1, \dots, N. \quad (1)$$

其中  $\tilde{y}$  为系统输出预测值, 其下标表示从  $k$  时刻起控制量变化的次数.

## 2) 滚动优化

$k$  时刻的优化性能指标

$$\min_{\Delta u} J(k) = \sum_{i=1}^P q_i [\omega(k+i) - \tilde{y}_M(k+i|k)]^2 + \sum_{j=1}^M r_j \Delta u^2(k+j-1), \quad (2)$$

其中  $\omega$  为输出期望值,  $P$ 、 $M$  分别为优化、控制时域,  $q_i$ 、 $r_j$  均为权系数

$k$  时刻的最优即时控制增量

$$\Delta u(k) = \sum_{i=1}^P d_i [\omega(k+i) - \tilde{y}_0(k+i|k)], \quad (3)$$

其中  $[d_1 \dots d_P] = [1 \ 0 \dots 0] (A^T Q A + R)^{-1} A^T Q$ , 而

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_P & \dots & a_{P-M+1} \end{bmatrix}, \quad Q = \text{diag}(q_1 \dots q_P), \quad R = \text{diag}(r_1 \dots r_M).$$

## 3) 反馈校正

$$\tilde{y}_0(k+i|k+1) = \tilde{y}_0(k+i|k) + a_i \Delta u(k) + h_i e(k+1), \quad i=1, \dots, N. \quad (4)$$

其中最后一项是利用  $k+1$  时刻的误差信息  $e(k+1) = y(k+1) - \tilde{y}_0(k+1|k) - a_1 \Delta u(k)$  通过加权  $h_i$  对未来输出预测进行的误差补偿.

为集中讨论闭环性质, 这里只考虑定值控制, 对上述算法作  $Z$  变换, 可导出其内模控制结构<sup>[4]</sup>, 见图 1.

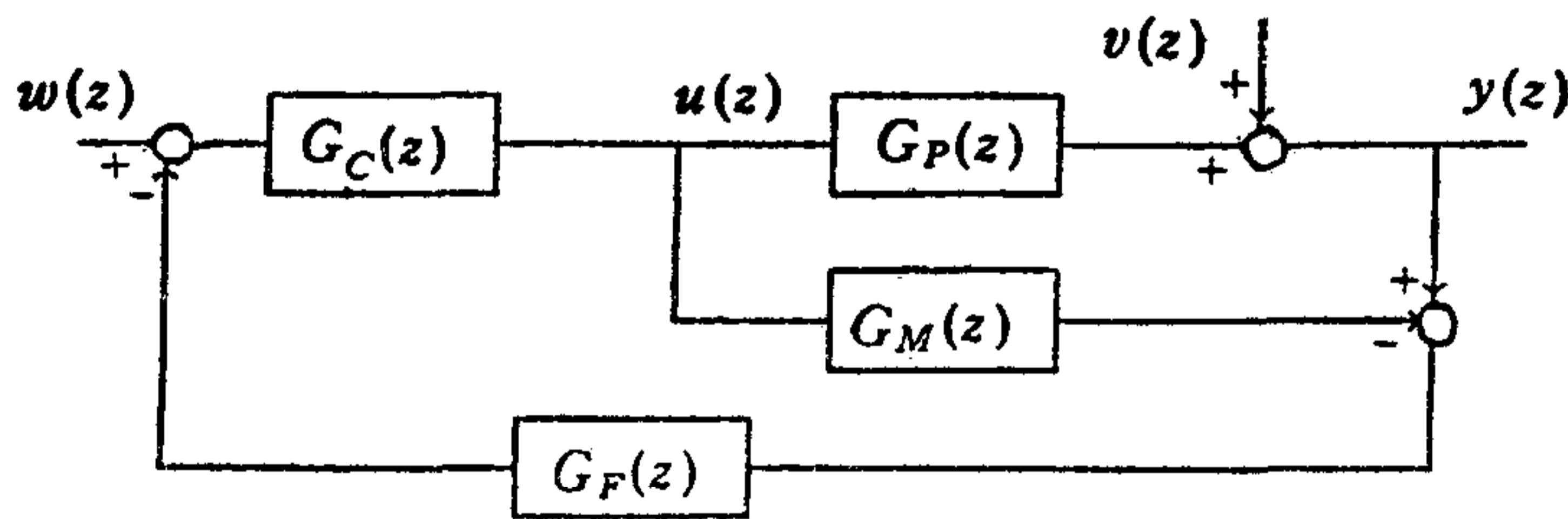


图 1 广义动态矩阵控制的内模控制结构

在模型长度  $N$  充分大时, 采用最小化形式<sup>[5]</sup>, 可写出其中各环节的  $Z$  传递函数模型

$$G_M(z^{-1}) = \frac{m_1 z^{-1} + \dots + m_n z^{-n}}{1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_n z^{-n}}, \quad (5)$$

控制器

$$G_C(z^{-1}) = \frac{d_s (1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_n z^{-n})}{1 + p_1^* z^{-1} + \dots + p_{n+1}^* z^{-(n+1)}}, \quad (6)$$

滤波器

$$G_F(z^{-1}) = \frac{c_2 + \cdots + (c_N - c_{N-1})z^{-(N-2)}}{d_s[1 + (h_2 - 1)z^{-1} + \cdots + (h_N - h_{N-1})z^{-(N-1)}]} \quad (7)$$

其中 
$$b_i = \sum_{j=1}^P d_j a_{i+j-1}, \quad c_i = \sum_{j=1}^P d_j h_{i+j-1}, \quad i = 1, \cdots, N$$

当  $s > N$  时, 取  $a_s = a_N, h_s = h_N,$

$$d_s = \sum_{j=1}^P d_j,$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ p_1^* \\ \vdots \\ p_{n+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ b_2 - 1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ b_{n+2} - b_{n+1} & \cdots & b_2 - 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}.$$

式(5)~(7)是本文分析预测控制系统的基础。

### 3 一类工业过程广义动态矩阵控制的控制策略和闭环形式

在工业领域内大量存在着一阶惯性加纯滞后的过程, 其模型可用传递函数的规范化形式写作

$$G_M(s) = \frac{e^{-\tau s}}{1 + T_m s}.$$

设采样周期为  $T$ , 为简便计, 令  $\tau = lT$ ,  $l$  为整数, 经零阶保持后可得模型的  $Z$  传递函数为

$$G_M(z^{-1}) = z^{-(l+1)} \frac{1 - \sigma}{1 - \sigma z^{-1}}, \quad (8)$$

式中  $\sigma = \exp(-T/T_m)$ .

由于过程动态较简单, 可首先固定 GDMC 算法中的部份设计参数:  $M = 1, Q = 1, R = 0$ , 并把优化时域取作  $P + 1$ , 加权校正系数  $h_i$  均取为  $h, 0 < h \leq 1$ . 在此控制策略下, 可得到式(6),(7)的具体表达式

$$G_C(z^{-1}) = \frac{1 - \sigma + \lambda}{1 - \sigma} \cdot \frac{1 - \sigma z^{-1}}{1 - (\sigma - \lambda)z^{-1}}, \quad (9)$$

$$G_F(z^{-1}) = \frac{h}{1 - (1 - h)z^{-1}}, \quad (10)$$

其中

$$\lambda = \lambda(P) = \frac{\sigma(1 - \sigma)(1 - \sigma^P)(1 - \sigma^{P+1})}{(1 - \sigma^2)P - \sigma(1 - \sigma^P)(2 + \sigma - \sigma^{P+1})}. \quad (11)$$

根据图 1 和式(8)~(10), 分析闭环系统性能与设计参数  $P$  和  $h$  的定量关系。

## 4 无模型失配时的动态响应和抗干扰性分析

### 4.1 无模型失配、无干扰时的动态响应

在图 1 中,当  $G_P(z^{-1}) = G_M(z^{-1})$  且  $v = 0$  时,系统的动态响应将只取决于其前向传递函数

$$F_o(z^{-1}) = G_c(z^{-1})G_P(z^{-1}) = z^{-(l+1)} \frac{1 - (\sigma - \lambda)}{1 - (\sigma - \lambda)z^{-1}}. \quad (12)$$

对比式(8)可知,闭环系统仍表现出一阶惯性加纯滞后环节的动态特性,其增益与时滞和原对象相同,但惯性时间常数改变为

$$T_m^* = \frac{-T}{\ln(\sigma - \lambda)} = \frac{\ln \sigma}{\ln(\sigma - \lambda)} T_m. \quad (13)$$

因此,在采样周期  $T$  选定后,  $T_m^*$  将只取决于优化时域  $P$ ,其关系除用解析式(13)表示外,也可用图 2 的曲线表示.

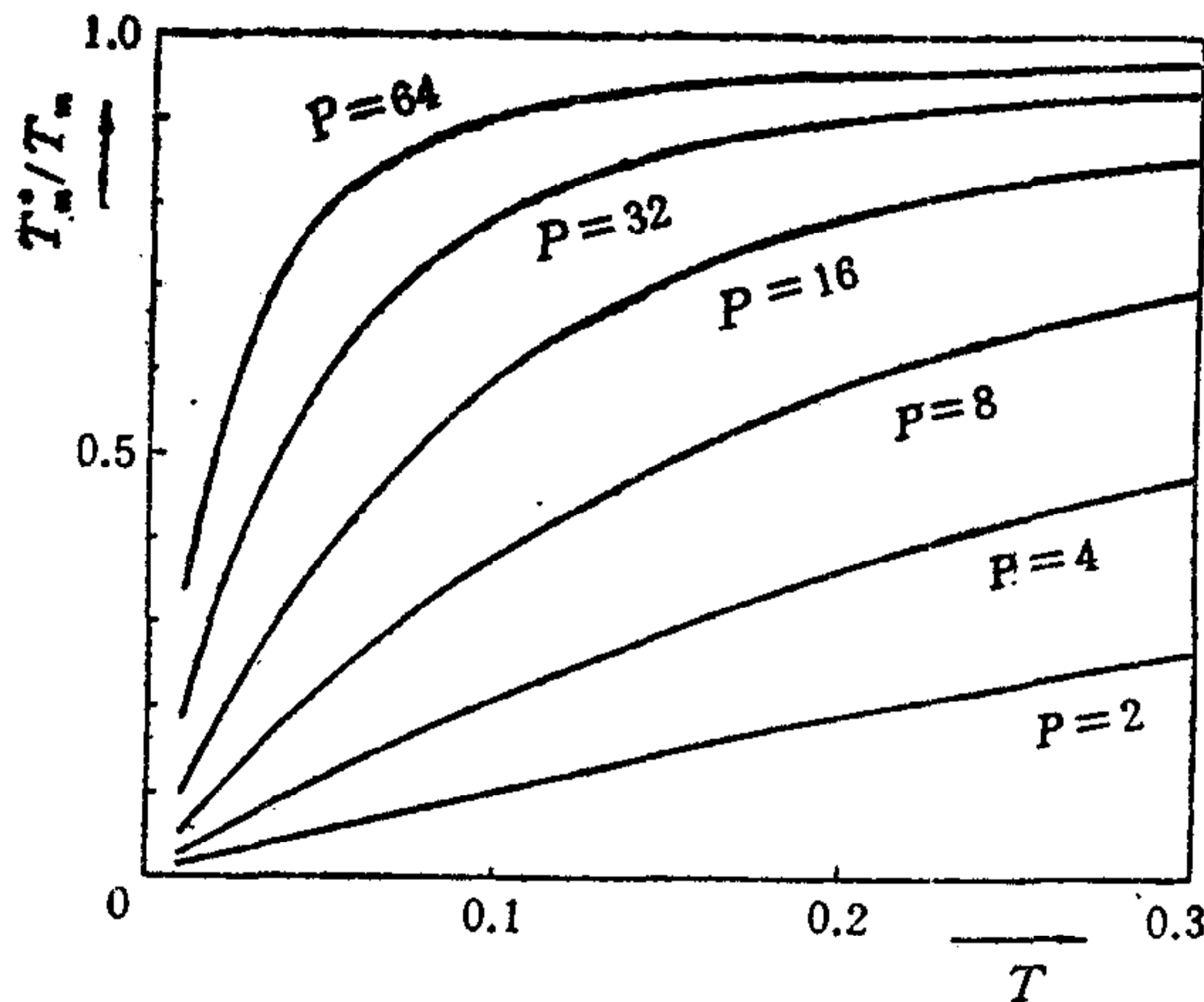


图 2  $T_m^*$  与  $P, T$  的关系

由式(11)用归纳法可以证明,  $\lambda(P)$  随  $P$  增大而减小,且  $0 < \lambda \leq \sigma$ . 当  $P = 1$  时,  $\lambda = \sigma$ , 这时  $T_m^* \rightarrow 0$ , 前向传递函数(12)退化为  $F_o(z^{-1}) = z^{-(l+1)}$ , 对应于最少拍控制; 而当  $P \rightarrow +\infty$  时,  $\lambda \rightarrow 0$ , 这时  $T_m^* \rightarrow T_m$ , 式(12)趋于对象开环传递函数(8), 实际上退化为对稳态的控制. 在这两个极端情况之间, 根据  $\lambda(P)$  随  $P$  变化的单调性及式(13), 可知  $T_m^* < T_m$ , 即经控制后系统动态响应较原对象有所加快, 且  $P$  越小,  $T_m^*$  越小, 动态响应越快, 这从图 2 中也可直接看出.

### 4.2 无模型失配时对输出端阶跃扰动的抑制

在图 1 中,当  $G_P(z^{-1}) = G_M(z^{-1})$  且  $w = 0$  时, 输出  $y$  对作用在输出端扰动  $v$  的传递函数为

$$y(z^{-1})/v(z^{-1}) = 1 - G_c(z^{-1})G_F(z^{-1})G_P(z^{-1}). \quad (14)$$

对于阶跃扰动  $v(t)$ , 对应的输出响应为

$$y(t) = 1 - x[t - (l-1)T] \left\{ 1 - \frac{1}{(\sigma - \lambda) - (1-h)} [h(\sigma - \lambda) \frac{t-(l-1)T}{T} - (1 - \sigma + \lambda)(1-h) \frac{t-(l-1)T}{T}] \right\}.$$

其中

$$x[t - (l-1)T] = \begin{cases} 1, & t \geq (l-1)T, \\ 0, & t < (l-1)T. \end{cases}$$

可见该扰动要经  $l$  拍后才开始受到抑制。由于  $0 \leq \sigma - \lambda < 1$ , 并且  $0 < h \leq 1$ , 干扰抑制过程总是衰减的, 控制是无静差的。若以到达  $|y(t)| = 5\%$  的时刻  $t'_s = t_s + lT$  作为扰动已被抑制的标志, 则由上式可导出

$$\left| \frac{1}{(\sigma - \lambda) - (1 - h)} [h(\sigma - \lambda)^{\frac{t'_s}{T}+1} - (1 - \sigma + \lambda)(1 - h)^{\frac{t'_s}{T}+1}] \right| = 0.05, \quad (15)$$

它给出了  $P$  (通过  $\lambda$ ) 和  $h$  与扰动抑制速度的解析关系。

由式(14)可知, 扰动抑制过程是通过两个一阶传递环节

$$G_C(z^{-1})G_P(z^{-1}) = z^{-(l+1)} \frac{1 - \sigma + \lambda}{1 - (\sigma - \lambda)z^{-1}}, \quad G_F(z^{-1}) = \frac{h}{1 - (1 - h)z^{-1}}$$

实现的, 由于两者的响应速度恰好只与  $P$ 、 $h$  分别有关, 故  $P$  越小 (即  $\lambda$  越大)、 $h$  越接近 1, 扰动抑制就越快。

## 5 模型失配时的鲁棒性分析

### 5.1 增益失配

设实际对象经采样保持后的  $Z$  传递函数为

$$G_P(z^{-1}) = \alpha z^{-(l+1)} \frac{1 - \sigma}{1 - \sigma z^{-1}}. \quad (16)$$

由此可得闭环系统的特征多项式

$$F(z) = z^{l+1} + (h - 1 - \sigma + \lambda)z^l + (1 - h)(\sigma - \lambda)z^{l-1} + h(1 - \sigma + \lambda)(\alpha - 1). \quad (17)$$

当  $l \leq 2$  时, 根据稳定性判据, 不难得到稳定界域。

$$0 < \alpha < \frac{2[1 + (1 - h)(\sigma - \lambda)]}{h(1 - \sigma + \lambda)}, \quad l = 0,$$

$$0 < \alpha < \frac{h + 1 - \sigma + \lambda}{h(1 - \sigma + \lambda)}, \quad l = 1,$$

$$0 < \alpha < 1 + \frac{(\lambda - \sigma) + (h - 1) + \sqrt{\Delta}}{2(1 - \sigma + \lambda)h},$$

$$\Delta = (\lambda - \sigma + h - 1)^2 + 4[1 - (1 - h)(\sigma - \lambda)], \quad l = 2,$$

但对  $l > 2$  的情况, 由式(17)给出的高阶多项式很难直接导出稳定界域的解析表达。为此, 须针对具体的  $P$ 、 $h$  值, 用稳定性判据检验不同  $\alpha$  数值时的稳定性, 以确定  $\alpha$  的稳定范围。为了有序地进行搜索, 给出下面的引理:

**引理 1.** 设离散系统的特征方程为

$$f(z) = g(z) + a = 0,$$

其中  $n$  阶多项式  $g(z) = z^n + g_1 z^{n-1} + \dots + g_n$  的全部根都在单位圆内,  $a$  为实参数。当  $a = a_1 > 0$  时若  $f(z)$  稳定, 则  $f(z)$  对一切  $a_1 \geq a \geq 0$  均稳定。当  $a = a_2 < 0$  时若  $f(z)$  稳定, 则  $f(z)$  对一切  $a_2 \leq a \leq 0$  均稳定。

**引理 2.** 设离散系统的特征方程为

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)z^n + a = 0,$$

其中  $0 \leq z_1 < 1$ ,  $0 \leq z_2 < 1$  均为实常数,  $n$  为非负整数,  $a$  为实参数. 若  $|a| < (1 - z_1)(1 - z_2)$ , 则  $f(z)$  的全部根在单位圆内.

由上述引理, 可分别导出下面的定理:

**定理 1.** 若  $\alpha = \alpha_0 \geq 1$  时, 式(17)中的多项式  $F(z)$  是稳定的, 则它对一切  $\alpha \in [1, \alpha_0]$  均稳定; 若  $\alpha = \alpha_0 \leq 1$  时,  $F(z)$  是稳定的, 则它对一切  $\alpha \in [\alpha_0, 1]$  均稳定.

定理 1 表明, 当  $\alpha$  变化时, 闭环系统从稳定变为不稳定是一次性的, 这样, 在数值搜索  $\alpha$  的稳定界域时, 就可用黄金分割法等取代逐点搜索, 提高搜索的效率.

**定理 2.** 当  $\alpha \in [0, 2]$  时, 式(17)中的  $F(z)$  均是稳定的.

这一定理从理论上解释了广义动态矩阵控制在典型工业过程中的强鲁棒性. 在本文所取的控制策略下, 不论参数  $P$ 、 $h$  如何选择, 对象增益在小于模型增益到为其 2 倍的范围内变化时, 闭环系统均可保持稳定.

应该指出, 定理 2 给出的增益的允许失配范围只是充分的, 实际允许的失配上界可以比 2 更大. 这一上界在  $l = 0, 1, 2$  时已以解析形式给出, 在  $l > 2$  时可依据定理 1 用黄金分割法数值搜索给出. 无论是解析结果还是数值结果均表明,  $h$  越小,  $P$  越大, 增益允许失配的上界就越大.

## 5.2 时滞失配

设实际对象经采样保持后的  $Z$  传递函数为

$$G_P(z^{-1}) = z^{-(m+1)} \frac{1 - \sigma}{1 - \sigma z^{-1}}, \quad (18)$$

由此可得闭环系统的特征多项式

$$F(z) = \begin{cases} z^{m+1} + (h - 1 - \sigma + \lambda)z^m + (1 - h)(\sigma - \lambda)z^{m-1} - h(1 - \sigma + \lambda)z^{m-l} \\ \quad + h(1 - \sigma + \lambda), \quad m \geq l, \\ z^{l+1} + (h - 1 - \sigma + \lambda)z^l + (1 - h)(\sigma - \lambda)z^{l-1} + h(1 - \sigma + \lambda)z^{l-m} \\ \quad - h(1 - \sigma + \lambda), \quad m < l. \end{cases} \quad (19)$$

在这种情况下, 无法导出时滞失配界域  $m_{\min}$ 、 $m_{\max}$  与  $P$ 、 $h$  的直接解析关系. 针对具体的  $P$ 、 $h$  值, 可从标称情况  $m = l$  出发, 逐 1 增加或减小  $m$ , 由式(19)检验闭环系统的稳定性, 直至不稳定为止, 由此确定  $m$  的稳定界域.

对于时滞失配非采样周期整数倍的情况, 给出

**定理 3.** 设对象时滞  $\tau' \in [m_0 T, (m_0 + 1)T]$ ,  $m_0 \geq l$ , 若当  $m = m_0$  及  $m = m_0 + 1$  时, 式(19)中的  $F(z)$  均稳定, 则闭环系统在对象时滞为  $\tau'$  时也稳定.

这一定理表明, 当实际对象时滞大于模型时滞时, 不论其是否采样周期的整数倍, 均可通过对整数倍失配的情况进行稳定性判别来搜索失配的上界.

## 6 仿真实例

本节以仿真实例验证本文理论分析的正确性. 设典型工业过程的时滞为  $\tau = 0.4s$ , 惯性时间常数为  $T_m = 1s$ , 取采样周期  $T = 0.1s$ , 则对应于式(8)的模型  $Z$  传递函数为

$$G_M(z^{-1}) = z^{-5} \frac{0.095}{1 - 0.905z^{-1}}$$

取  $P = 4$ ,  $h = 0.8$ 。图 3 中曲线  $a$  和  $b$  分别为对象和被控系统的阶跃响应, 曲线  $b$  的惯性时间常数与由式(13)算出的  $T_m^* = 0.21s$  或与图 2 中的曲线指示值显然是相符的。

考虑实际对象增益  $\alpha$  的失配。根据第五节可搜索出失配上界  $\alpha_{\max} = 2.4744$ , 此外  $\alpha_{\min} = 0$ , 图 4 中的曲线  $a, b, c$  分别对应于  $\alpha = 0.2, 2.4, 2.6$  的闭环响应, 证实了界域的正确性。

在时滞失配时, 由搜索可得  $m_{\min} = 0$ ,  $m_{\max} = 10$ , 图 5 中曲线  $a, b, c$  给出了  $m = 0, 10, 11$  的闭环响应, 也是相符的。

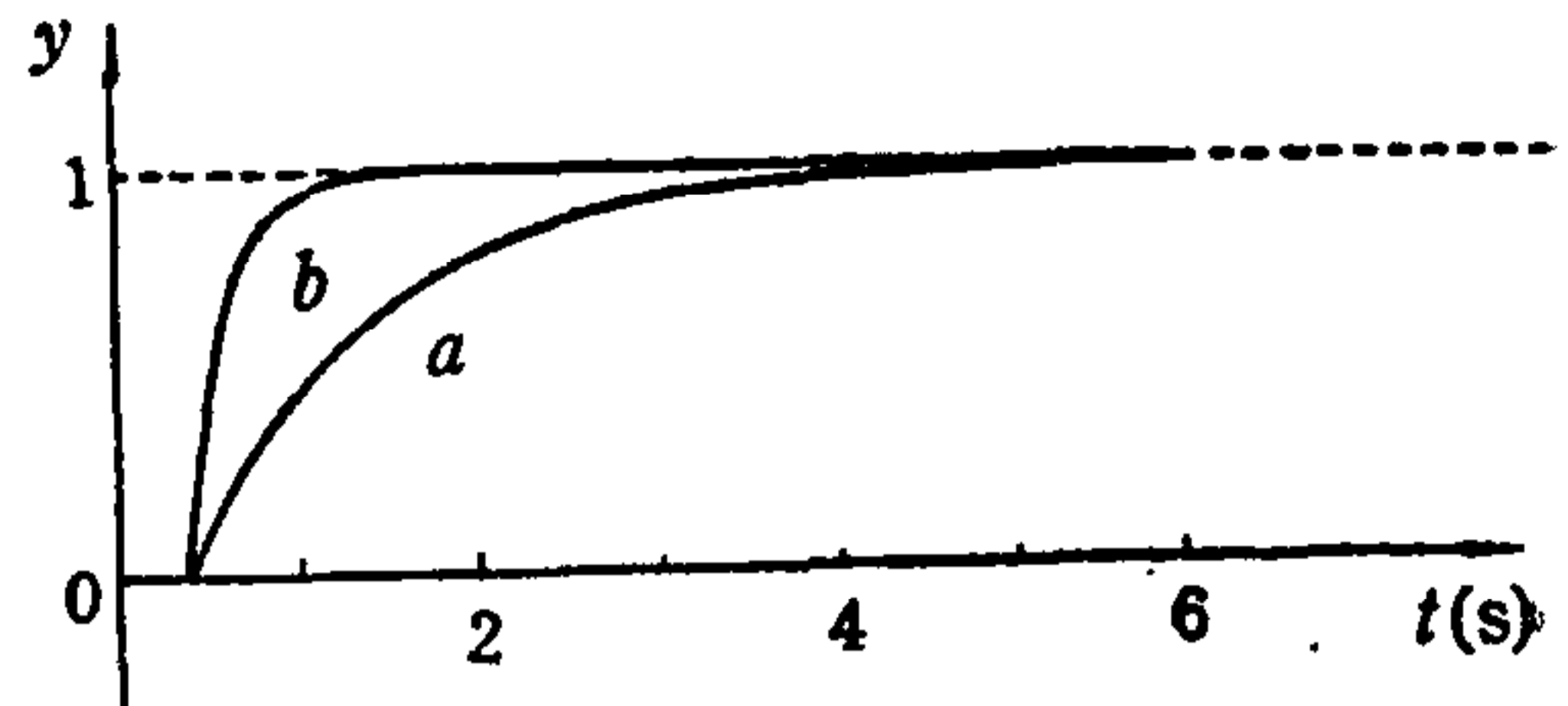


图 3 对象和闭环系统的动态响应

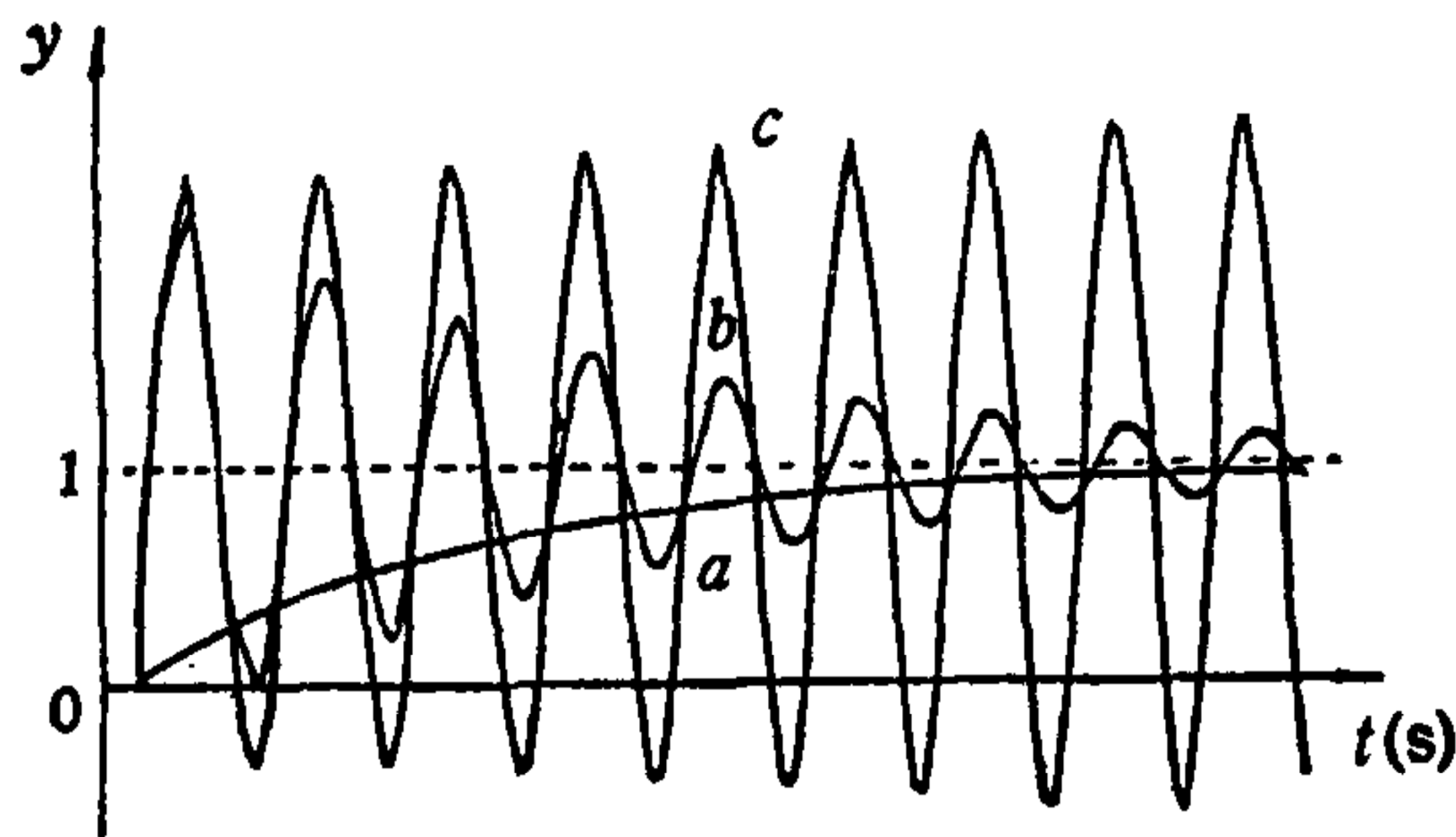


图 4 增益失配时的闭环响应

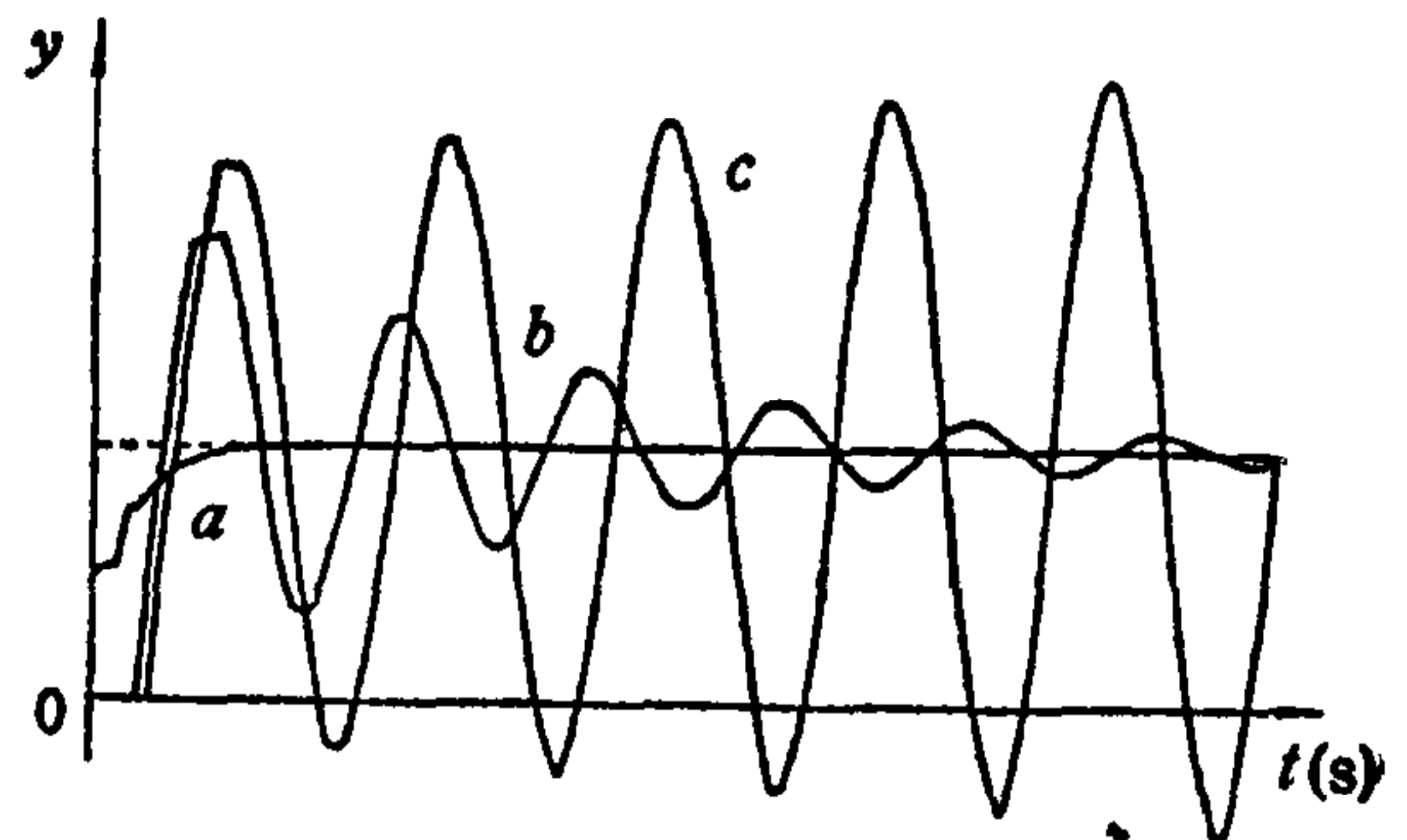


图 5 时滞失配时的闭环响应

本文根据广义动态矩阵控制的内模控制结构和传递函数的最小化形式, 对一类常见的工业过程, 分析了闭环系统性能与主要设计参数的定量关系, 从理论上解释了预测控制在工业环境中的强鲁棒性, 并为摆脱仿真直接对这类过程分析和设计预测控制提供了理论依据。

### 参 考 文 献

- [1] Cutler C R and Ramaker B L. Dynamic Matrix Control-A Computer Control Algorithm, Proc. JACC, San Francisco, 1980, WP5-B.
- [2] Rouhani R and Mehra R K. Model Algorithm Control (MAC): Basic Theoretical Properties. *Automatica*, 1982, 18: 401-414.
- [3] Schmidt G and Xi Y. A New Design Method for Digital Controllers [based on Nonparametric Plant Models. In: Applied Digital Control (ed. Tzafestas, S. G.), North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [4] Xi Y. Beiträge zur Analyse und Synthese eines prädiktiven Regelverfahrens, Dr-Ing Dissertation, T. U. München, 1984.
- [5] Xi Y. The minimal form of the Predictive Controller based on the Step-Response Model. *Int. J. Control*, 1989, 49: 57-64.

## CLOSED-LOOP ANALYSIS OF PREDICTIVE CONTROL FOR A CLASS OF INDUSTRIAL PROCESSES

XI YUGENG LI JUNYI

(Institute of Automation, Shanghai Jiao Tong University 200030)

### ABSTRACT

In this paper, the closed-loop performances of predictive control systems for a class of industrial processes are quantitatively analysed. Based on the Internal Model Control (IMC) structure and the minimal form of the controller in the Generalized Dynamic Matrix Control (GDMC) systems, the closed-loop transfer functions of predictive control for typical first order plants with time delay are introduced. The analytical relationships between the main design parameters and the closed-loop dynamics as well as the disturbance rejection time are given and three theorems on closed-loop robustness are presented. Some search algorithms are proposed to find the admissible ranges for gain or time delay mismatches. The new results in the paper provide theoretical foundations for analysing and designing predictive control systems.

**Key words:** predictive control; generalized dynamic matrix control; industrial process, system analysis; robustness



**席裕庚** 1946年生,上海市人,1968年毕业于哈尔滨军事工程学院,1984年在慕尼黑工业大学获德国工学博士学位。现为上海交通大学教授、博士生导师。目前的主要研究方向为复杂工业过程和智能机器人的控制理论与方法。



**厉隽悻** 1969年生,上海市人,1989年毕业于上海交通大学,1991年在该校获工学硕士学位。目前主要从事高级过程控制和智能控制方面的理论和算法研究。