



# 基于观测器的 $H_\infty$ 鲁棒次优性能回复设计

申铁龙

(燕山大学自动化系 秦皇岛市 066004)

## 摘 要

提出了一种基于状态观测器的  $H_\infty$  鲁棒次优性能回复设计方案。对于具有不确定性的被控对象,当存在满足给定的  $H_\infty$  鲁棒次优性能准则的状态反馈阵,且状态不可测量时,引入适当的状态观测器可使闭环系统的  $H_\infty$  鲁棒次优性能任意接近状态反馈系统。

**关键词:** 鲁棒控制,  $H_\infty$  次优系统, 构造型不确定性。

## 1 引言

考虑如图 1 所示系统,  $P_\Sigma$  表示具有不确定性  $\Sigma$  的广义被控对象,  $K$  表示控制器。 [ $H_\infty$  鲁棒次优系统设计问题是: 设  $\Sigma$  属于某一可描述集, 求能使闭环系统对任意  $\Sigma$  稳定且满足  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$  的  $K$ , 这里  $T_{zw}$  表示由  $w$  至  $z$  的闭环传递阵,  $\gamma > 0$  称为次优指标。对于许多鲁棒控制问题都可以归结为这一类设计问题。近几年来提出了许多解法, 其中较为简洁的解法就是基于黎卡堤方程的设计方法<sup>[1-4]</sup>。文献 [1-4] 讨论了状态反馈问题, 文献 [4] 还给出了基于输出动态反馈的设计方法。本文提出一种基于高增益状态观测器的性能回复设计方案。

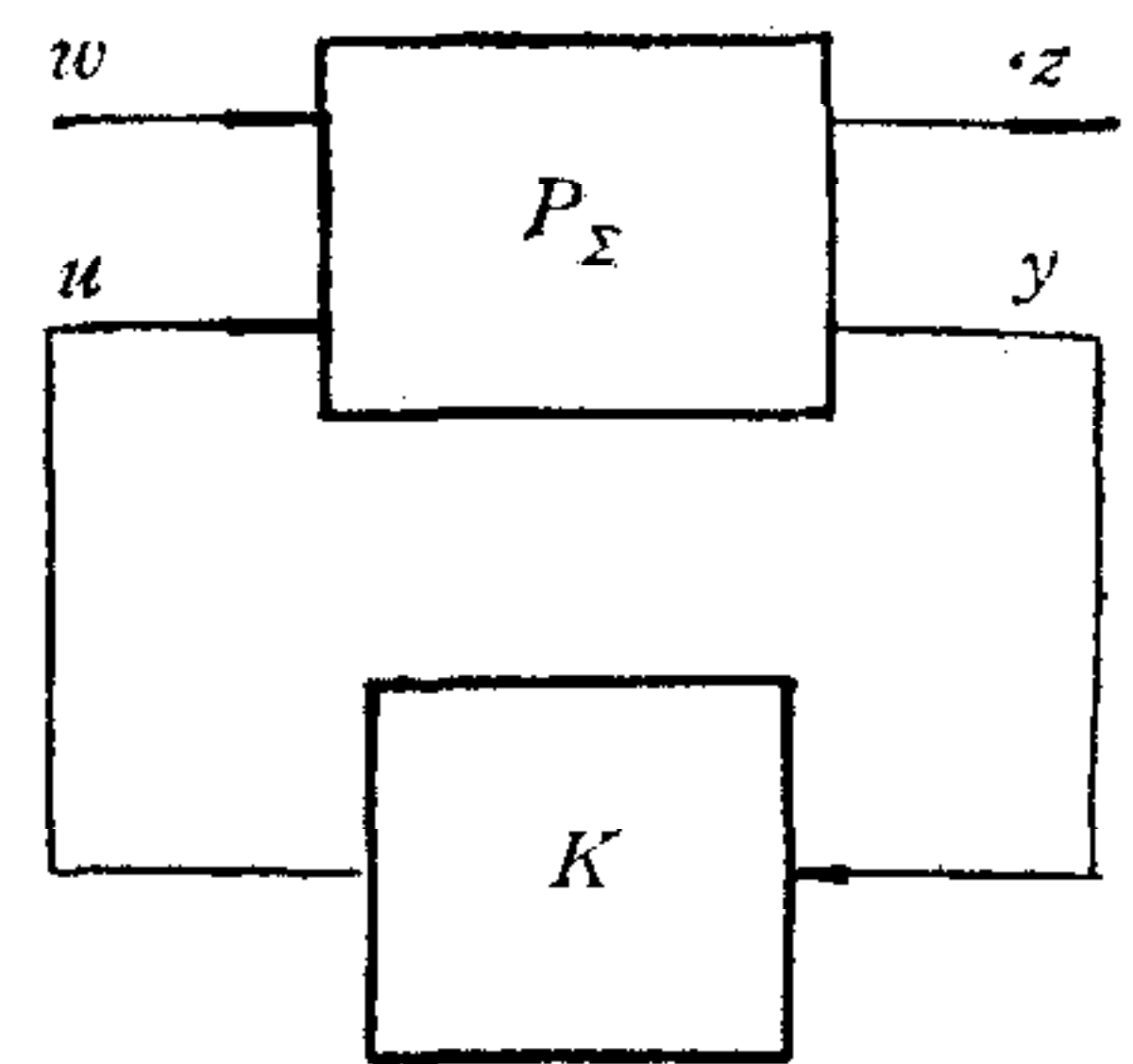


图 1  $H_\infty$  鲁棒性能准则设计问题

## 2 系统描述

设被控对象  $P_\Sigma$  由下式描述

$$(P_\Sigma): \dot{x} = (A + \Delta A)x + B_1 w + (B_2 + \Delta B)u, \quad (1)$$

$$z = C_1 x + D_1 u, \quad (2)$$

$$y = C_2 x. \quad (3)$$

其中  $x \in R^n, u \in R^m, w \in R^p, y \in R^r, z \in R^q$  分别为状态、控制输入、干扰输入、可测输出及被控输出量;  $A, B_1, B_2, C_1, D_1$  及  $C_2$  为已知阵。不确定性摄动阵  $\Delta A$  及  $\Delta B$  可描述为

$$[\Delta A \ \Delta B] = E\Sigma[F_a \ F_b], \Sigma \in R^{h \times k}. \quad (4)$$

其中  $E, F_a$  及  $F_b$  为已知;未知阵  $\Sigma$  属于给定集  $\mathcal{Q} = \{\Sigma | \sigma_{\max}(\Sigma) \leq 1\}$ ;  $\sigma_{\max}(\cdot)$  ( $\sigma_{\min}(\cdot)$ ) 表示最大(小)奇异值.

若被控对象  $P_\Sigma$  和控制器  $u = K(s)y$  所构成的闭环系统的状态空间具有如下结构

$$(S_\Sigma): \dot{x}_s = A_s(\Sigma)x + B_s(\Sigma)w, \quad (5)$$

$$z = C_s(\Sigma)x_s. \quad (6)$$

实际上,当  $C_2 = I, K(s) = K$  时,  $A_s(\Sigma) = A_K + E\Sigma F_K, B_s(\Sigma) = B_1, C_s(\Sigma) = C_K$ . 其中  $A_K = A + B_2K, C_K = C_1 + D_1K, F_K = F_a + F_bK$ .

**定义 1<sup>[1,4]</sup>**. 如果存在正定阵  $P$  使得黎卡堤不等式

$$A_s^T(\Sigma)P + PA_s(\Sigma) + \frac{1}{\gamma^2}PB_s(\Sigma)B_s^T(\Sigma)P + C_s^T(\Sigma)C_s(\Sigma) < 0, \forall \Sigma \in \mathcal{Q} \quad (7)$$

成立,则称闭环系统  $S_\Sigma$  对于给定  $\gamma > 0$  满足  $H_\infty$  鲁棒次优性能准则.

由文献[5]的引理 2.2 可证,如果  $S_\Sigma$  满足  $H_\infty$  鲁棒次优性能准则,则对于任意  $\Sigma \in \mathcal{Q}$  系统  $S_\Sigma$  为内部稳定,且满足  $\|C_s(sI - A_s)^{-1}B_s\|_\infty < \gamma$ , 或等价地有  $\|z\|_2 < \gamma\|w\|_2, \forall w \in L_2(0, +\infty)$ .

### 3 状态反馈 $H_\infty$ 鲁棒次优系统

令  $C_2 = I$ , 考虑静态状态反馈控制器  $u = Kx$ . 由上节可知,如果存在一正定阵  $P$ , 使得

$$(A_K + E\Sigma F_K)^T P + P(A_K + E\Sigma F_K) + \frac{1}{\gamma^2}PB_1B_1^T P + C_K^T C_K < 0, \forall \Sigma \in \mathcal{Q} \quad (8)$$

成立,则状态反馈系统满足  $H_\infty$  鲁棒次优准则.

**引理 1<sup>[3,6]</sup>**. 存在正定阵  $P$  使得(8)式成立的充分必要条件是存在一标量  $\lambda > 0$ , 使得不等式

$$A_K^T P + PA_K + \frac{1}{\gamma^2}PB_1B_1^T P + C_K^T C_K + \lambda^2 PEE^T P + \frac{1}{\lambda^2}F_K^T F_K < 0 \quad (9)$$

有正定解  $P$ .

根据引理 1 可得如下结论. 证明参见文献[1—4].

**定理 1.** 设  $(A, B_2)$  为可稳定且  $D_1$  为列满秩. 对于给定的  $\gamma > 0$ , 存在状态反馈阵  $K \in R^{m \times n}$ , 使闭环系统满足  $H_\infty$  鲁棒次优性能准则的充分必要条件, 是存在一正定阵  $Q$  和标量  $\lambda > 0$ , 使得黎卡堤方程式

$$A_m^T X + XA_m + X(B_m B_m^T - B_2 M^{-1} B_2^T)X + C_m^T (I - D_m M^{-1} D_m^T)C_m + Q = 0 \quad (10)$$

有正定解  $X$ , 并且  $H_\infty$  鲁棒次优控制器给定如下:

$$K = -M^{-1}(B_2 X + D_m^T C_m), \quad (11)$$

其中  $A_m = A - B_2 M^{-1} D_m^T C_m, B_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} B_1 & \lambda E \end{bmatrix}, C_m^T = \begin{bmatrix} C_1^T & \frac{1}{\lambda} F_a^T \end{bmatrix}, D_m^T = \begin{bmatrix} D_1^T & \frac{1}{\lambda} F_b^T \end{bmatrix}, M = D_m^T D_m$ .

## 4 基于状态观测器的性能回复设计

假设被控对象  $P_\Sigma$  由(1)–(3)式给定, 且存在正定阵  $Q$  和标量  $\lambda > 0$ , 使得黎卡堤方程(10)有正定解. 当  $C_2 \cong I$  时, 我们引入状态观测器, 使闭环系统的  $H_\infty$  鲁棒次优性能渐近回复到状态反馈下的系统性能. 为此需要  $P_\Sigma$  及  $\lambda$  满足以下条件:

- 1)  $(C_2, A)$  为能检测,  $(A, B_m)$  为能稳定;
- 2)  $C_2$  为行满秩阵,  $B_m$  为列满秩阵;
- 3)  $p + h \leq \gamma \leq n$ ;
- 4)  $\text{rank} \begin{bmatrix} A - sI & B_m \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} = n + p + h, \forall R, s > 0$ .

令  $K$  由(11)式给定, 考虑基于观测器的反馈控制器为

$$(O_c): \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2u + L_\sigma(y - C_2\hat{x}), \quad (12)$$

$$u = K\hat{x}. \quad (13)$$

为确定满足要求的状态观测器增益  $L$ , 引入如下黎卡堤方程

$$AY + YA^T + \frac{1}{\sigma^2}Y(K^T D_m^T D_m K + R)Y - Y C_2^T C_2 Y + \sigma^2 B_m B_m^T + Q_0 = 0, \quad (14)$$

其中  $R$  和  $Q_0$  为正定阵.

**引理 2.** 设条件 1)–4) 成立. 对于任意给定的  $\gamma > 0$  及正定阵  $R, Q_0$  存在  $q_1 > 0$ , 使得(14)式对于任意给定  $\sigma \geq q_1$  具有正定解  $Y > 0$ , 且存在  $N \in R^{(p+h) \times r}$  使得下式成立:

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} Y C_2^T = B_m N, \quad NN^T = I, \quad (15)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma^2} Y = 0. \quad (16)$$

证明. 参见文献[7].

$$\text{令 } L_0 = Y C_2^T, \text{ 并记 } \frac{1}{\sigma} Y C_2^T N^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} B_\sigma & \lambda E_\sigma \end{bmatrix},$$

其中矩阵  $B_\sigma \in R^{n \times p}, E_\sigma \in R^{n \times h}$ . 由引理 2 可知  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} B_\sigma & \lambda E_\sigma \end{bmatrix} = B_m$ . 构造观测器增益阵为

$$L_\sigma = L_0 + l_\sigma Y C_2^T, \quad (17)$$

其中  $l_\sigma$  为充分大正数.

定义 1 具有不确定性的系统  $P_{\Sigma'}$  为

$$(P_{\Sigma'}): \dot{x} = (A + \Delta A)x + B_1 w + (B_2 + \Delta B)u, \quad (18)$$

$$z = C_1 x + D_1 u, \quad (19)$$

$$y = C_2 x. \quad (20)$$

其中  $[\Delta A \ \Delta B] = E \Sigma' [F_a \ F_b]$ , 不确定阵  $\Sigma'$  属于给定集合

$$\mathcal{Q}' = \left\{ \Sigma' \mid \Sigma' = \frac{\gamma}{\gamma + \varepsilon} \Sigma, \sigma_{\max}(\Sigma) \leq 1 \right\},$$

$\varepsilon \geq 0$  为任意给定正数. 比较  $P_\Sigma$  和  $P_{\Sigma'}$  可知, 标称系统在  $\Sigma = 0$  时  $P_\Sigma$  和  $P_{\Sigma'}$  一致, 且  $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$ .

控制器  $O_c$  和被控对象  $P_{\Sigma'}$  构成的闭环系统为

$$\dot{x}_c = (\tilde{A} + \tilde{E}\Sigma'\tilde{F})x_c + \tilde{B}w, \quad (21)$$

$$z = \tilde{C}x_c. \quad (22)$$

其中  $x_c^T = [x^T \ e^T]$ ,  $e = x - \hat{x}$ ,  $\tilde{E}^T = [E^T \ E^T]$ ,  $\tilde{F} = [F_K \ -F_b K]$ ,  $\tilde{C} = [C_K \ -D_1 K]$ ,  $\tilde{B}^T = [B_1^T \ B_1^T]$ ,  $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_K & B_2 K \\ 0 & A - L_\sigma C_2 \end{bmatrix}$ .

**引理 3.** 令  $K$  由(11)式给定. 对任意给定  $0 < \delta < \sigma_{\min}\{X^{-1}QX^{-1}\}$  存在  $q_2 > 0$ , 使得如下不等式对于任意  $\sigma \geq q_2$  成立:

$$A_K^T X + X A_K + \frac{1}{\gamma^2} X B_\sigma B_\sigma^T X + C_K^T C_K + \lambda^2 X E_\sigma E_\sigma^T X + \frac{1}{\lambda^2} F_K^T F_K < -\delta I. \quad (23)$$

证明. 见附录.

**引理 4.** 定义正定阵,

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & \sigma^2 Y^{-1} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

对于任意  $\sigma \geq q_3$  ( $q_3$  为正数) 存在  $l_\sigma > 0$  和正定阵  $R > 0$ , 使得

$$\tilde{A}^T P_\sigma + P_\sigma \tilde{A} + \frac{1}{\gamma^2} P_\sigma \tilde{B}_\sigma \tilde{B}_\sigma^T P_\sigma + \tilde{C}^T \tilde{C} + \lambda^2 P_\sigma \tilde{E}_\sigma \tilde{E}_\sigma^T P_\sigma + \frac{1}{\lambda^2} \tilde{F}^T \tilde{F} < 0 \quad (25)$$

成立. 其中  $\tilde{B}_\sigma^T = [B_\sigma^T \ B_\sigma^T]$ ,  $\tilde{E}_\sigma^T = [E_\sigma^T \ E_\sigma^T]$ .

证明. 见附录.

**定理 2.** 对于任意给定的  $\varepsilon > 0, \sigma \geq \sigma_\varepsilon$  ( $\sigma_\varepsilon > 0$ ) 存在  $l_\sigma$ , 使得由  $O_\varepsilon$  和  $P_{\Sigma'}$  构成的闭环系统满足  $H_\infty$  鲁棒次优性能准则  $\gamma + \varepsilon$ , 且

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{Q}' = \mathcal{Q}, \quad (26)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon = \infty. \quad (27)$$

证明. 证明对于  $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$  存在正定阵  $Z$ , 满足

$$(\tilde{A} + \tilde{E}\Sigma'\tilde{F})^T Z + Z(\tilde{A} + \tilde{E}\Sigma'\tilde{F}) + \frac{1}{(\gamma + \varepsilon)^2} Z \tilde{B} \tilde{B}^T Z + \tilde{C}^T \tilde{C} < 0, \quad \forall \Sigma' \in \mathcal{Q}' \quad (28)$$

即可. 将  $\Sigma' = \frac{\gamma}{\gamma + \varepsilon} \Sigma$  代入上式, 得

$$\begin{aligned} \tilde{A}^T Z + Z \tilde{A} + \frac{1}{(\gamma + \varepsilon)^2} Z \tilde{B} \tilde{B}^T Z + \tilde{C}^T \tilde{C} + \left( \frac{\gamma}{\gamma + \varepsilon} \tilde{E} \Sigma \tilde{F} \right)^T Z \\ + \frac{\gamma}{\gamma + \varepsilon} Z \tilde{E} \Sigma \tilde{F} < 0. \end{aligned} \quad (29)$$

由引理 1 可知, (29) 式对于任意  $\Sigma \in \mathcal{Q}$  成立的充分必要条件是存在一个标量  $\lambda > 0$ , 使得

$$\tilde{A}^T Z + Z \tilde{A} + \frac{1}{(\gamma + \varepsilon)^2} Z \tilde{B} \tilde{B}^T Z + \tilde{C}^T \tilde{C} + \frac{\lambda^2 \gamma^2}{(\gamma + \varepsilon)^2} Z \tilde{E} \tilde{E}^T Z + \frac{1}{\lambda^2} \tilde{F}^T \tilde{F} < 0 \quad (30)$$

成立. 对定理 1 给定的  $\lambda > 0$  存在满足(30)式的  $Z > 0$ . 定义  $\hat{B} = [\tilde{B} \ \lambda \gamma \tilde{E}]$ ,  $\hat{B}_\sigma = [\tilde{B}_\sigma \ \lambda \gamma \tilde{E}_\sigma]$ ,  $\hat{C}^T = \left[ \tilde{C}^T \ \frac{1}{\lambda} \tilde{F}^T \right]$ , 则根据引理 2 有  $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \hat{B}_\sigma = \hat{B}$ . 再由引理 4, 对于  $\sigma \geq q_3$  存在  $l_\sigma$  使得

$$\tilde{A}^T P_\sigma + P_\sigma \tilde{A} + \frac{1}{\gamma^2} P_\sigma \hat{B}_\sigma \hat{B}_\sigma^T P_\sigma + \hat{C}^T \hat{C} < 0 \quad (31)$$

成立. 因此, 根据文献[5]的引理 2.2 得  $\tilde{A}$  为稳定阵, 且有

$$\hat{C}(sI - \tilde{A})^{-1} \hat{B}_\sigma \hat{B}_\sigma^T (-sI - \tilde{A}^T)^{-1} \hat{C}^T < \gamma^2 I, \quad \forall s = j\omega. \quad (32)$$

令  $\hat{B} \hat{B}^T = \hat{B}_\sigma \hat{B}_\sigma^T + \Delta(\sigma)$ , 则当  $\sigma \rightarrow \infty$  时  $\Delta(\sigma) \rightarrow 0$ . 故对于任意给定  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\sigma_\varepsilon \geq q_3 > 0$ , 使

$$\sigma_{\max}\{\Delta(\sigma)\} < \frac{(\gamma + \varepsilon)^2 - \gamma^2}{\|\hat{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\|_\infty}, \quad \forall \sigma \geq \sigma_\varepsilon \quad (33)$$

成立. 由(32)及(33)式, 得

$$\begin{aligned} \hat{C}(sI - \tilde{A})^{-1} \hat{B} \hat{B}^T (-sI - \tilde{A}^T)^{-1} \hat{C}^T &\leq \gamma^2 I + \sigma_{\max}\{\Delta(\sigma)\} \|\hat{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\|_\infty \\ &\cdot I < (\gamma + \varepsilon)^2 I. \end{aligned} \quad (34)$$

根据上式及文献[5]的引理 2.2, 存在正定阵  $Z$  满足黎卡堤不等式

$$\tilde{A}^T Z + Z \tilde{A} + \frac{1}{(\gamma + \varepsilon)^2} Z \hat{B} \hat{B}^T Z + \hat{C}^T \hat{C} < 0. \quad (35)$$

由  $\hat{B}$  和  $\hat{C}$  的定义, (35)式等价于(30)式. (26)和(27)式由  $\mathcal{Q}'$  的定义及(33)式显然成立. 证毕.

定理 2 表明, 通过引入状态观测器可以使闭环系统的  $H_\infty$  鲁棒次优性能任意接近原状态反馈系统, 即性能指标  $\gamma + \varepsilon \rightarrow \gamma$ , 不确定性集  $\mathcal{Q}' \rightarrow \mathcal{Q}$ .

## 5 结束语

对于具有构造型不确定性的系统, 如果存在状态反馈阵使闭环系统满足  $H_\infty$  鲁棒次优性能准则  $\gamma$ , 则通过引入适当的状态观测器可使闭环系统的  $H_\infty$  鲁棒次优性能任意接近状态反馈系统.

## 附 录

引理 3 的证明. 设(10)式有正定解  $X$ , 且  $K$  由(11)式给定, 则

$$A_K^T X + X A_K + \frac{1}{\gamma^2} X B_\sigma B_\sigma^T X + C_K^T C_K + \lambda^2 X E_\sigma E_\sigma^T X + \frac{1}{\lambda^2} F_K^T F_K = -H_\sigma, \quad (36)$$

其中

$$H_\sigma = X \left\{ B_m B_m^T - \left( \frac{1}{\gamma^2} B_\sigma B_\sigma^T + \lambda^2 E_\sigma E_\sigma^T \right) + X^{-1} Q X^{-1} \right\} X.$$

由引理 2,  $\frac{1}{\gamma^2} B_\sigma B_\sigma^T + \lambda^2 E_\sigma E_\sigma^T \rightarrow B_m B_m^T (\sigma \rightarrow \infty)$ , 故对任意  $0 < \delta < \sigma_{\min}\{X^{-1} Q X^{-1}\}$  存在充分大的  $q_2 >$

0, 使得

$$\sigma_{\max} \left\{ B_m B_m^T - \left( \frac{1}{\gamma^2} B_\sigma B_\sigma^T + \lambda^2 E_\sigma E_\sigma^T \right) \right\} < \sigma_{\min} \{ X^{-1} Q X^{-1} \} - \delta, \quad (37)$$

即  $H_\sigma > \delta > 0, \forall \sigma > q_2$ .

证毕.

引理 4 的证明. 令  $q_3 = \max\{q_1, q_2\}$ , 其中  $q_1 > 0$  及  $q_2 > 0$  分别由引理 2 及引理 3 给定. 再令

$$\begin{aligned} S &= \tilde{A}^T P_\sigma + P_\sigma \tilde{A} + \frac{1}{\gamma^2} P_\sigma \tilde{B}_\sigma \tilde{B}_\sigma^T P_\sigma + \tilde{C}^T \tilde{C} + \lambda^2 P_\sigma \tilde{E}_\sigma \tilde{E}_\sigma^T P_\sigma + \frac{1}{\lambda^2} \tilde{F}^T \tilde{F} \\ &= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (38)$$

其中

$$S_{11} = A_K^T X + X A_K + \frac{1}{\gamma^2} X B_\sigma B_\sigma^T X + C_K^T C_K + \lambda^2 X E_\sigma E_\sigma^T X + \frac{1}{\lambda^2} F_K^T F_K, \quad (39)$$

$$S_{12} = X B_2 K + \frac{\sigma^2}{\gamma^2} X B_\sigma B_\sigma^T Y^{-1} - C_K^T D_1 K + \lambda^2 \sigma^2 X E_\sigma E_\sigma^T Y^{-1} + \frac{1}{\lambda^2} F_K^T F_b K, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} S_{22} &= \sigma^2 (A - L_\sigma C_2)^T Y^{-1} + \sigma^2 Y^{-1} (A - L_\sigma C_2) + K^T D_m^T D_m K \\ &\quad + \sigma^4 Y^{-1} \left\{ \frac{1}{\gamma^2} B_\sigma B_\sigma^T + \lambda^2 E_\sigma E_\sigma^T \right\} Y^{-1}. \end{aligned} \quad (41)$$

将(17)式代入(41)式, 并根据(10)式及  $B_\sigma, E_\sigma$  的定义整理, 得

$$S_{22} = -\sigma^2 \left\{ Y^{-1} (\sigma^2 B_m B_m^T + Q) Y^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} R \right\} - \sigma^2 C_2^T (I - N^T N) C_2 - 2\sigma^2 l_\sigma C_2^T C_2. \quad (42)$$

故, 对于任意  $\xi^T = [\xi_1^T \ \xi_2^T] (\neq 0) \in R^{2n}$ ,

$$\begin{aligned} \xi^T S \xi &= \xi_1^T S_{11} \xi_1 + 2\xi_1^T S_{12} \xi_2 + \xi_2^T S_{22} \xi_2 \\ &\leq \xi_1^T S_{12} \xi_1 + 2\xi_1^T M_{12} \xi_2 + 2\sigma \xi_1^T X \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} B_\sigma & \lambda E_\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} B_\sigma \\ \lambda E_\sigma \end{bmatrix} \sigma Y^{-1} \xi_2 \\ &\quad - \xi_2^T \{ R + \sigma^2 Y^{-1} Q Y^{-1} \} \xi_2 - 2\sigma^2 l_\sigma \xi_2^T C_2^T C_2 \xi_2. \end{aligned} \quad (43)$$

其中  $M_{12} = X B_2 K - C_K^T D_1 K - \frac{1}{\lambda^2} F_K^T F_b K$ . 由引理 3 可知, 对充分小的  $\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0 (\alpha_1 + \alpha_2 < \delta)$ , 有

$S_{11} < -(\alpha_1 + \alpha_2)I$ . 所以,

$$\begin{aligned} \xi^T S \xi &\leq -(\alpha_1 + \alpha_2) \|\xi_1\|^2 + 2\sigma_{\max}\{M_{12}\} \|\xi_1\| \cdot \|\xi_2\| - \beta \|\xi_2\|^2 \\ &\quad + 2\sigma_{\max} \left\{ X \begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma} B_\sigma & \lambda E_\sigma \end{bmatrix} N \right\} \|\xi_1\| \cdot \|C_2 \xi_2\| - 2\sigma^2 l_\sigma \|C_2 \xi_2\|^2, \end{aligned} \quad (44)$$

其中  $\beta = \sigma_{\min}\{R + \sigma^2 Y^{-1} Q Y^{-1}\}$ . 因此, 可以选取适当的  $R > 0$  及充分大的  $l_\sigma > 0$ , 使得  $\xi^T S \xi < 0, \forall \xi \in R^{2n} (\xi \neq 0)$ . 证毕.

## 参 考 文 献

- [1] Xie L, Carlos E. de Souza. Robust  $H_\infty$  control for linear timeinvariant systems with norm-bounded uncertainty in the input matrix. *System and Control Letters*, 1990, 14(5):398—396.
- [2] 申鉄龍, 田村捷利. 構造的不確かさを持つプラントに対する  $H_\infty$  ロバスト準最適補償器の構成法. 計測自動制御学会論文集, 1991, 27(9): 1058—1060.
- [3] Shen T, K Tamura. Properties of algebraic riccati inequalities and  $H_\infty$  robust sub-optimal controller design. Proceedings of IEEE 30th CDC, Brighton, 1991, 212—213.
- [4] Shen T. Analysis and synthesis of  $H_\infty$  robust sub-optimal control systems. Ph. D. Dissertation,

Sophia University, January 1992.

- [5] Zhou K, P P Khargonekar. An algebraic riccati equation approach to  $H_\infty$  optimization. *Systems and Control Letters*, 1988, 11(2):85—91.
- [6] Pertersen I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. *Systems and Control Letters*, 1987, 8(4):351—357.
- [7] Pertersen I R, C V Holot. High gain observer applied to problems in the stabilization of uncertain linear systems, disturbance attenuation and  $H_\infty$  optimization. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 1988, 2:347—369.

## A PERFORMANCE RECOVERY APPROACH TO $H_\infty$ ROBUST SUB-OPTIMAL CONTROL VIA OBSERVER

SHEN TIELONG

(Department of Automatic Control, Yanshan University, Qinhuangdao 066004)

### ABSTRACT

This paper proposes a performance recovery approach to  $H_\infty$  robust sub-optimal controller design problem for plant with structured uncertainty. It is shown that if there exists such a state feedback gain matrix that the closed loop system satisfies  $H_\infty$  robust sub-optimal performance and the state is not measurable, then, one can introduce a high gain observer such that  $H_\infty$  robust sub-optimal performance of the closed loop system arbitrarily approaches to the performance achieved by the state feedback.

**Key words:** Robust control,  $H_\infty$  sub-optimal system, structured uncertainty.