第 21 卷 第 1 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 21, No. 1
1995 年 1 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1995

短 文

一类有效的固定点平滑方法及其应用

史 忠 科
（西北工业大学自控系　西安　710072）

摘　　要

根据 Meditch 和 Rauch 固定点平滑公式，给出了一种有效的固定点平滑新算法。在该算法中，减少了增益阵中两个 $n \times n$ 矩阵之积，并且大幅度减少了平滑所需滤波计算量。结果分析表明，新方法虽然与 Meditch、Rauch 方法在代数上等价，但计算效率为 Meditch 方法的两倍以上.

关键词： Kalman 滤波、固定点平滑、飞行试验。

1　引言

固定点平滑技术有着广泛地应用．由于 Rauch 算法的计算量大、使用起来不经济，本文给出一种有效的计算方法．

2　算法的新结构

设线性系统的状态方程为

$$x_{j+1} = \phi_{j+1,j} x_j + \Gamma_j w_j, \tag{1}$$

观测方程为

$$z_{j+1} = H_{j+1} x_{j+1} + v_{j+1}, \tag{2}$$

式中，$x \in R^n$，$w \in R^q$，$z \in R^m$；并假定

$$E\{v_j\} = 0, \quad E\{w_j\} = 0, \quad E\{v_j v_k^{\mathrm{T}}\} = \delta_{kj} R_j$$
$$E\{w_j w_k^{\mathrm{T}}\} = \delta_{kj} Q_j, \quad E\{w_j v_k^{\mathrm{T}}\} = 0.$$

Meditch 固定点平滑公式如下[1]：

$$\left.\begin{aligned} x_{N/j} &= x_{N/j-1} + B_{N/j} H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} [z_j - H_j x_{j/j-1}] \\ P_{N/j} &= P_{N/j-1} - B_{N/j} (H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} H_j P_{j/j-1} H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} H_j + H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} H_j) B_{N/j}^{\mathrm{T}} \\ B_{N/j} &= B_{N/j-1} \phi_{j,j-1}^{\mathrm{T}} (I - H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} H_j P_{j/j}) \quad j = N+1, N+2, \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

本文于 1992 年 10 月 26 日收到

初始条件为 $B_{N/N}=P_{N/N}$

在(3)式中,增益阵 $B_{N/j}$ 涉及两个 $n\times n$ 矩阵相乘运算,计算复杂度为 n^3,影响了整个平滑算法的计算效率。为此,我们对 Meditch 方法作如下改进。

设

$$\left.\begin{aligned}&B_{N/j}=A_{N/j}\phi_{j,N}^{T},\ B_{N/N}=A_{N/N}=P_{N/N}\\&M_j=H_j\phi_{j,N},\ P_{j/j}=\phi_{j,N}P_{j/j}^{*}\phi_{j,N}^{T}\ \ j=N+1,N+2,\cdots\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

而

$$H_j^TR^{-1}H_j=P_{j/j}^{-1}-P_{j/j-1}^{-1}\tag{5}$$

将(4)、(5)式代入(3)式中,可得

$$\begin{aligned}P_{N/j}&=P_{N/j-1}+B_{N/j}P_{j/j}^{-1}(P_{j/j}-P_{j/j-1})P_{j/j}^{-1}B_{N/j}^{T}\\&=P_{N/j-1}-B_{N/j-1}\phi_{j,j-1}^{T}H_j^T(R_j+H_jP_{j/j-1}H_j^T)^{-1}H_j\phi_{j,j-1}B_{N/j-1}^{T}\\&=P_{N/j-1}-A_{N/j-1}M_j^T(R_j+H_jP_{j/j-1}H_j^T)^{-1}M_jA_{N/j-1}^{T}\end{aligned}\tag{6}$$

利用矩阵反逆公式,可得

$$P_{N/j}=P_{N/j-1}-A_{N/j-1}M_j^TR_j^{-1}(R_j-M_jP_{j/j}^{*}M_j^T)R_j^{-1}M_jA_{N/j-1}^{T}\tag{7}$$

因此,可将新算法整理如下:

$$\left.\begin{aligned}&x_{N/j}=x_{N/j}+A_{N/j}M_j^TR_j^{-1}(z_j-M_jx_{j/j-1}^{*})\\&P_{N/j}=P_{N/j-1}-A_{N/j-1}M_j^TR_j^{-1}(R_j-M_jP_{j/j}^{*}M_j^T)R_j^{-1}M_jA_{N/j-1}^{T}\\&A_{N/j}=A_{N/j-1}(I-M_j^TR_j^{-1}M_jP_{j/j}^{*})\quad j=N+1,N+2,\cdots\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

初值为 $A_{N/N}=P_{N/N}$, $x_{j/j-1}^{*}=\phi_{j,N}x_{j/j-1}$

(8)式就给出了新的固定点平滑计算公式。平滑所需滤波计算可按下式进行。

$$\left.\begin{aligned}&P_{j+1/j}^{*}=P_{j/j}^{*}+E_jQ_jE_j^T\\&x_{j+1/j+1}^{*}=x_{j/j}^{*}+K_{j+1}^{*}(z_{j+1}-M_{j+1}x_{j/j}^{*})\\&K_{j+1}^{*}=P_{j+1/j+1}^{*}M_{j+1}^{T}R_{j+1}^{-1}\\&P_{j+1/j+1}^{*}=P_{j+1/j}^{*}-P_{j+1/j}^{*}M_{j+1}^{T}(R_{j+1}+M_{j+1}P_{j+1}^{*}M_{j+1}^{T})^{-1}M_{j+1}P_{j+1/j}^{*}\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

式中, $E_j=\phi_{N,j+1}\Gamma_j$

3 计算效率分析

假定本文的方法和 Meditch 方法均使用 U-D 分解,滤波计算的时间更新采用 Thorton-Jacobson 方法,测量更新使用 Bierman 方法,则两种算法所需滤波计算量如表 1 所示。

表 1　一步平滑所需滤波计算量的比较

算法	加　法	乘　法	除法
本文[2]方法	$n^2q+n(n-1)q+nm(n-1)+(1.5n^2+1.5n)m$	$(n^2+2n-1)q+n^2(m+q)+(1.5n^2+5.5n)m$	$2(n-1)q+nm$
Meditch[2]方法	$1.5n^3-0.5n^2+n+n^2q+(1.5n^2+1.5n)m$	$1.5n^3+n^2-0.5n+1.5n^2m+(n^2+2n-1)q+5.5nm$	$2(n-1)q+nm$

在平滑计算式中, Meditch 方法在计算 $B_{N/j}$ 时,比本文方法多两个 $n\times n$ 矩阵之积

运算,在计算 $P_{N/i}$ 时,还需多算 $B_{N/i}H_i^T$;其余计算量与本文方法相同。平滑计算量的比较如表 2 所示。

表 2 一步平滑所需计算量的比较

算法	加法	乘法	除法
本文方法	$2n^2(m+1)+nm(m+3)$	$n^2(2m+1)+0.5nm(m+11)$	nm
Meditch 方法	$n^3+n^2(3m+1)+nm(m+2)$	$n^3+n^2(3m+1)+0.5nm(m+11)$	nm

为了进一步说明算法的有效性,表 3 给出了数值例子,其计算量为滤波与平滑计算量的总和。

表 3 一步平滑所需总计算量的比较

算法	$n=15,\ q=3,\ m=4$				$n=30,\ q=m=6$			
	加法	乘法	除法	折合	加法	乘法	除法	折合
SP	6255	6642	204	7441	38430	38874	708	42692
MP	13740	14802	204	16069	99390	101859	708	109487
RP	21150	22935	204	24665	169620	176550	708	188567

表 3 中,SP 为本文方法,MP 为 Meditch 方法,Rp 为 Rauch 方法。折合计算量指在 16 位机上将加法按 1/16、乘法按 1、除法按 2 的比例折合成乘法计算量。由表 1—表 3 可知,本文方法比其它方法有效得多。

固定点平滑方法是一种在线估计方法,不需存贮整个滤波结果,一般不考虑存贮量问题。Rauch、Meditch 及本文方法在线处理所占内存是相同的(同时考虑了滤波计算和平滑计算)。

4 飞行器纵向运动特定状态估计问题

飞行器纵向运动方程为[2]

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\Phi_{k+1,k}\boldsymbol{x}_k+B_k\boldsymbol{b}+\varphi(\boldsymbol{u}_m)+\Gamma_k\boldsymbol{\xi}_k \tag{10}$$

观测方程为

$$\boldsymbol{y}_k=H_k\boldsymbol{x}_k+D_k\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\eta} \tag{11}$$

式中,$\boldsymbol{b}$ 为偏差向量。

令

$$\boldsymbol{b}_{k+1}=\boldsymbol{b}_k$$

$$\boldsymbol{z}=[\boldsymbol{x}^T,\boldsymbol{b}^T]^T$$

根据(10)、(11)式及本文的算法(8)、(9)式,就可估计飞行状态的特定值。

参　考　文　献

[1] Meditch J S. Stochastic Optimal linear Estimation and Control. McGraw-Hill Co., 1969.
[2] Shi Zhongke. A New Fixed-Interval-Smoother Algorithm and Its Application to Flight Test. *Chinese Journal of Automation*, Allerton Press Inc, 1991, **3**: 209—216.

A EFFICIENT FIXED-POINT SMOOTHER AND ITS APPLICATIONS

SHI ZHONGKE
(*Department of Control, Northwestern Polytechnical University Xi'an* 710072)

ABSTRACT

An efficient fixed-point smoothing method is presented in this paper, which is based on Miditch's and Rauch's fixed-point formulae. In the new algorithm, the multiplications of two n × n matrices are avoided and the computations of the filter for present smoother is simplified greatly. The results of computation analysis show that the efficiency of present method is more than 2 times as fast as that of Midtch's method. For its application, a new aircraft motion equation is given and accuracy of aerodymamic coefficient identification can be obtained by using the outputs carried out by the present algorithm.

Key words: Kalman filter, fixed-point smoothing, flight test.