第21卷 第1期 自动化学报 Vol. 21, No. 1
1995年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1995

短文

广义系统的能控、能观性判别条件

唐万生 李光泉
（天津大学系统工程研究所 300072）

摘 要

该文讨论广义系统能控、能观性问题，给出了广义系统能控和能观性一种新的判别条件.

关键词： 广义系统，能控性，能观性.

1 引言

在广义系统研究中，许多结果是针对能控与能观性进行讨论的[1-3]. 其中文[3]讨论了广义系统能控能观性几种代数判别条件. 但现有的广义系统能控能观性判别方法均有不足之处，不便计算判别. 因此有必要探讨新的判别条件.

2 主要结果

考虑如下广义系统

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $x \in \mathbb{C}^n, u \in \mathbb{C}^m, y \in \mathbb{C}^p, E, A \in \mathbb{C}^{n\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times m}, C \in \mathbb{C}^{p\times n}$，并且 $\det E = 0$，$\det(\lambda E - A) \not\equiv 0$.

由于系统(2.1)是正则的，由文[3]可知存在非奇异矩阵 $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$，使得系统(2.1)限制等价于

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u, \\ N\dot{x}_2 = x_2 + B_2u, \\ y = C_1x_1 + C_2x_2. \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $x = P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，$x_1 \in \mathbb{C}^{n_1}$，$x_2 \in \mathbb{C}^{n_2}$，$n_1 + n_2 = n$，$QEP = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$，$QAP = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$，$QB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$，$CP = (C_1, C_2)$，$N \in \mathbb{C}^{n_2\times n_2}$ 为幂零阵.

本文于1992年5月14日收到

如果存在 α,使得 $\det(\alpha E + A) \neq 0$,取 $Q = (\alpha E + A)^{-1}, P = I$, 则系统(2.1) 限制等价于下列系统:

$$\begin{cases} \hat{E}\dot{x} = (I - \alpha\hat{E})x + \hat{B}u, \\ y = Cx. \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $\hat{E} = (\alpha E + A)^{-1}E$, $QA = I - \alpha\hat{E}$, $\hat{B} = (\alpha E + A)^{-1}B$.

关于广义系统能控性有下列结论.

定理 2.1[2,3]. (1)广义系统(2.1)能控的充要条件是: (A_1, B_1)和(N, B_2)均能控.

(2) 广义系统(2.1)能控的充要条件是: $(\hat{E}, \hat{B})$ 能控.

(3) 广义系统(2.1)能控的充要条件是:

$$\operatorname{rank}(\lambda E - A, B) = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^1, \ |\lambda| < +\infty$$

且 $$\operatorname{rank}(E, B) = n.$$

关于能观性有相应的对偶形式.

上述三个等价的判别条件是经常使用的,但是,判别条件(1)建立在广义系统快、慢子系统分解基础上,涉及到正则矩阵束的 Kronecker 标准分解,其中 Q, P 的选取是件复杂的工作,因此判别条件(1)使用起来很不方便;在判别条件(2)中,需要预先确定 α, 使得 $\det(\alpha E + A) \neq 0$,尽管满足条件的 α 有无穷多个,但选取适当的 α 也是件麻烦事, 即使 α 确定了,还需计算逆矩阵 $(\alpha E + A)^{-1}$, 矩阵求逆运算不应视为简单的工作; 判别条件(3)要计算变参数矩阵 $(\lambda E - A, B)$ 的秩,虽然只需对 $\lambda \in \sigma(E, A)$进行计算,但广义特征根的计算尚无有效的方法,可见判别条件(3)也不好用.

本文试图给出易于计算的判别条件,为此需要下列

引理[4]. 正则系统 $\dot{x} = Ax + Bu$ 能控的充要条件是下列矩阵方程:

$$\begin{cases} AX - XA = 0, \\ XB = 0, \end{cases}$$

只有零解.

利用上述引理可得广义系统能控的判别条件.

定理 2.2. 广义系统(2.1)能控的充要条件是下列矩阵方程:

$$\begin{cases} EYA - AYE = 0, \\ YB = 0, \end{cases}$$

只有零解.

证明. 由定理 2.1 中的条件(2),广义系统(2.1)能控的充要条件是 $(\hat{E}, \hat{B})$ 能控, 根据引理可知系统(2.1)能控的充要条件是下列矩阵方程

$$\begin{cases} \hat{E}X - X\hat{E} = 0, \\ X\hat{B} = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

只有零解.

将 $\hat{E} = (\alpha E + A)^{-1}E$, $\hat{B} = (\alpha E + A)^{-1}B$ 代入(2.4)得

$$\begin{cases} (\alpha E + A)^{-1}EX - X(\alpha E + A)^{-1}E = 0, \\ X(\alpha E + A)^{-1}B = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

令 $Y = X(\alpha E + A)^{-1}$,(2.5) 可化成

$$\begin{cases}(\alpha E + A)^{-1}EY(\alpha E + A) - YE = 0, \\ YB = 0.\end{cases} \tag{2.6}$$

(2.6)中的第一式两边同时左乘 $(\alpha E + A)$ 得

$$\begin{cases}EY(\alpha E + A) - (\alpha E + A)YE = 0, \\ YB = 0.\end{cases} \tag{2.7}$$

化简可得

$$\begin{cases}EYA - AYE = 0, \\ YB = 0.\end{cases} \tag{2.8}$$

方程(2.4)与(2.5)是一样的，因为 $Y = X(\alpha E + A)^{-1}$ 所以方程(2.5)只有零解的充要条件是方程(2.6)只有零解，(2.6)与(2.7)同解，(2.7)与(2.8)是一样的，因此(2.4)只有零解的充要条件是方程(2.8)只有零解，即广义系统(2.1)能控的充要条件是方程(2.8)只有零解。证毕。

注：当 $E = I$ 时，本定理即为引理。

根据定理 2.2 可以给出广义系统能控的判别秩条件。

定理 2.3. 广义系统(2.1)能控的充要条件是下列矩阵M列满秩。

$$M = \begin{pmatrix} E\otimes A^{T} - A\otimes E^{T} \\ I\otimes B^{T} \end{pmatrix},$$

其中$\otimes$表示矩阵的 Kronecker 积。

证明。将矩阵方程(2.8)按行拉直有

$$\begin{pmatrix} E\otimes A^{T} - A\otimes E^{T} \\ I\otimes B^{T} \end{pmatrix}\vec{Y} = 0, \tag{2.9}$$

其中“$\rightharpoonup$”表示矩阵的按行拉直。

方程(2.9)与方程(2.8)的含意相同，所以方程(2.9)只有零解等价于方程(2.8)只有零解，方程(2.9)只有零解的充要条件是 $\mathrm{rank}M = n^2$。因此广义系统能控的充要条件是M列满秩。

可见，通过计算M的秩即可判别广义系统是否能控，从而避开了对广义系统(2.1)做限制等价变换，也不需计算广义特征根，可直接判别广义系统能控性。

关于广义系统的能观性有：

定理 2.4. 对于广义系统(2.1)下列条件等价

(1) 广义系统(2.1)能观

(2) 矩阵方程

$$\begin{cases}AYE - EYA = 0, \\ CY = 0,\end{cases} \tag{2.10}$$

只有零解。

(3) 下列矩阵N列满秩

$$N = \begin{pmatrix} A\otimes E^{T} - E\otimes A^{T} \\ C\otimes I \end{pmatrix}.$$

证明。略。

关于广义系统既能控又能观有下列

推论. 如果矩阵方程
$$\begin{cases} AXE - EXA = 0, \\ CXB = 0, \end{cases} \tag{2.11}$$
只有零解,则广义系统(2.1)既能控又能观.

或等价地: 矩阵 $R = \begin{pmatrix} A\otimes E^{\mathrm{T}} - E\otimes A^{\mathrm{T}} \\ C\otimes B^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$ 列满秩，则广义系统 (2.1) 既能控又能观.

证明. 反设广义系统(2.1)不是能控且能观的,则系统(2.1)或不能控或不能观，或者既不能控也不能观. 不妨设系统(2.1)不能控，由定理 2.2 可知存在非零矩阵 $X_0 \in \mathbf{C}^{n\times n}$，使得
$$\begin{cases} EX_0A - AX_0E = 0, \\ X_0B = 0. \end{cases}$$
此时显然有: $CX_0B = 0$,可见 X_0 为方程(2.11)的非零解,矛盾. 因此可知广义系统(2.1)是能控且能观的.

广义系统的能控性和能观性可以不经等价变换直接判别，只需判别由广义系统的系数矩阵构成的分块阵是否满秩.

参 考 文 献

[1] Cobb D. Controllability, observability and duality in singular systems *IEEE Trans.*, 1984, **AC-29** (12):1076—1082.
[2] Yip E L and Sincovec R F Solvability controllability and observability of continuous descriptor systems. *IEEE Trans.*, 1981,**AC-26**: 702—706.
[3] 戴立意. 广义系统的受限等价和能控、能观性. 中国科学技术大学研究生院学报,1987,4(1): 42—50.
[4] Hermann R and Martin C. Applications of algebraic geometry to systems theory. Part I,*IEEE Trans.*, 1977, **AC-22**(1):19—25.

THE CRITERION FOR CONTROLLABILITY AND OBSERVABILITY OF SINGULAR SYSTEMS

Tang Wansheng Li Guangquan
(Institute of Systems Engineering, Tianjin University 300072)

Abstract

In this paper, controllability and observability of singular systems are investigated. Some new criterions for controllability and observability of singular systems are proposed.

Key words: Singular Systems, Controllability, Observability.