第 21 卷 第 1 期 自 动 化 学 报 Vol. 21, No. 1
1995 年 1 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1995

短 文

递推计算灵敏度的极大似然估计算法实现[1)]

崔 平 远
(哈尔滨工业大学航天工程与力学系 哈尔滨 150001)

摘 要

对非线性连续-离散系统的极大似然参数估计方法导出了一种递推计算灵敏度的新算式. 该算式借助二水平正交表的性质，避免了原灵敏度递推算式中的矩阵求逆运算. 仿真实例验证了该算法的实用性和有效性.

关键词: 非线性连续-离散系统，极大似然估计，灵敏度，正交试验.

1 引言

采用极大似然法对非线性连续-离散系统进行参数估计，似然函数的优化计算是其核心问题[1]. 为避免解析求导法和有限差分法在计算灵敏度方面所存在的困难，Murphy 在文献[2]中给出了一种递推计算灵敏度算法，避免了已有算法所存在的不足. 文献[3]、[4]进一步给出了基于正交表计算灵敏度初值的方法和灵敏度的非求逆递推算式. 然而，文献[2]给出的递推算法中的信息矩阵初值求逆运算尚未解决. 本文导出了一种新的递推计算灵敏度算法，避免了已有递推计算灵敏度算法中的全部矩阵求逆运算，并通过实例仿真对其有效性进行了验证.

2 递推计算灵敏度算法

考虑下述非线性连续-离散系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\theta}),\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\theta}), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{z}(i) = \boldsymbol{y}(i) + \boldsymbol{v}(i),\ i = 1,2,\cdots,N. \tag{3}$$

$$E\{\boldsymbol{v}(i)\} = 0, E\{\boldsymbol{v}(i)\ \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(j)\} = R\delta_{ij}.$$

1) 国家自然科学基金资助项目.

本文于 1993 年 3 月 11 日收到

各变量定义见文献[4]. 极大似然校正估计是[4]:

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \Delta\boldsymbol{\theta}_k, \tag{4}$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_k = \left[\sum_{i=1}^{N} G_i^T \hat{R}^{-1} G_i\right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{N} G_i^T \hat{R}^{-1} (\boldsymbol{z}(i) - \hat{\boldsymbol{y}}(i))\right]\Bigg|_{\theta=\theta_k}. \tag{5}$$

各变量定义见文献[4]. 递推计算灵敏度算法是[4]:

$$\boldsymbol{s}_{r+1} = \boldsymbol{s}_r - P_{r+1}\{(\boldsymbol{\varphi}_r^0)^{\mathrm{T}} y_r^0 - \boldsymbol{\varphi}_r^{\mathrm{T}} y_r + [\boldsymbol{\varphi}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_r - (\boldsymbol{\varphi}_r^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_r^0]\boldsymbol{s}_r\}, \tag{6}$$

$$P_{r+1} = [P_r^{-1} + \boldsymbol{\varphi}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_r - (\boldsymbol{\varphi}_r^0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_r^0]^{-1}, \tag{7}$$

$$P_r = [X_r^{\mathrm{T}} X_r]^{-1}, \quad (\boldsymbol{s}_{ki})_0 = [\Delta X]^{-1}\Delta \boldsymbol{y}_{ki},$$

式中，r 是迭代次数,其余各变量定义见文献[4]. 要实现(6)、(7)两式构成的递推算法，首先需获得灵敏度初值 s_0 和协方差矩阵初值 P_0. 已有算法没有给出初始参数的选择方法,也就难以保证计算 P_0 和 S_0 过程中的矩阵逆运算的数值稳定性. 文献[3]借助二水平正交表选择参数初始摄动值,解决了灵敏度初值的计算问题; 本文进一步解决了 P_0 的计算问题.

3 基于偏差量的递推算式

记

$$P_0 = [X_0^{\mathrm{T}} X_0]^{-1} \tag{8}$$

根据文献[3]给出的 $\theta_i^j (i = 1,2,\cdots,p; j = 0,1,2,\cdots,M; M = 2^u)$ 选择方法可得:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & \theta_1^0 & \theta_2^0 & \cdots & \theta_p^0 \\ 1 & \theta_1^0 + a_{11}\Delta\theta_1 & \theta_2^0 + a_{12}\Delta\theta_2 & \cdots & \theta_p^0 + a_{1p}\Delta\theta_p \\ 1 & \theta_1^0 + a_{21}\Delta\theta_1 & \theta_2^0 + a_{22}\Delta\theta_2 & \cdots & \theta_p^0 + a_{2p}\Delta\theta_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \theta_1^0 + a_{M1}\Delta\theta_1 & \theta_2^0 + a_{M2}\Delta\theta_2 & \cdots & \theta_p^0 + a_{Mp}\Delta\theta_p \end{bmatrix}. \tag{9}$$

由(9)式可见,信息矩阵不再具有正交性,要计算 P_0, 必须计算高维矩阵的求逆运算. 如果修正递推算式(6)和(7),保证 P_0 仍具有正交性, P_0 的计算即可解决.

基于文献[4]中公式(8)构造递推算式,对第 k 个输出分量,略去角标 i 有:

$$\Delta \boldsymbol{y}_k = \Delta X \boldsymbol{s}_k \tag{10}$$

则(10)式关于灵敏度向量的最小二乘解是

$$\boldsymbol{s}_k = [(\Delta X)^{\mathrm{T}}(\Delta X)]^{-1}(\Delta X)^{\mathrm{T}}(\Delta \boldsymbol{y}_k). \tag{11}$$

对于第 r 次迭代,定义

$$P_r = [(\Delta X_r)^{\mathrm{T}}(\Delta X_r)]^{-1}, \tag{12}$$

则省略角标 k,可得协方差矩阵的递推算式

$$P_{r+1} = [P_r^{-1} + (\Delta\boldsymbol{\varphi}_r)^T(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r) - (\Delta\boldsymbol{\varphi}_r^0)^T(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r^0)]^{-1}. \tag{13}$$

式中, $\Delta\boldsymbol{\varphi}_r$ 是对应于一组新的 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ 值而引入 ΔX_{r+1} 的行向量, $\Delta\boldsymbol{\varphi}_r^0$ 是对应于一组产生最大指标函数的 $\boldsymbol{\theta}$ 值而从 ΔX_{r+1} 中剔出的 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ 行向量. 与此相对应的灵敏度递推算式是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}_{r+1} = \boldsymbol{s}_r - P_{r+1}\{&(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r^0)^T(\Delta y_r^0) - (\Delta\boldsymbol{\varphi}_r)^T(\Delta y_r) \\ &+ [(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r)^T(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r) - (\Delta\boldsymbol{\varphi}_r^0)^T(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r^0)]\boldsymbol{s}_r\}. \end{aligned} \tag{14}$$

式中，Δy_r 和 Δy_r^0 分别是在第 $r+1$ 次迭代中引入 $\Delta \boldsymbol{y}_k$ 和从 $\Delta \boldsymbol{y}_k$ 中剔出的分量（与 $\Delta \boldsymbol{\varphi}_r$ 和 $\Delta \boldsymbol{\varphi}_r^0$ 相对应）。

由(13)、(14)两式构成的递推算式（证明过程可类似于(6)、(7)两式进行），协方差矩阵初值为

$$P_0=[(\Delta X_0)^T(\Delta X_0)]^{-1}. \tag{15}$$

根据文献[3]给出的 θ_i^j 选择方法可以推得（参考(9)式）：

$$P_0=\begin{bmatrix} M\Delta\theta_1^2 & & & 0 \\ & M\Delta\theta_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M\Delta\theta_p^2 \end{bmatrix}^{-1} \tag{16}$$

4 新的递推计算灵敏度算法

综合文献[3]、[4]和本文的工作，对由(1)—(3)式描述的系统，新算法的具体算式如下：

递推算式（综合文献[4]和本文的工作）：

$$Q_{r+1}=P_r-P_r(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r)^{\mathrm T}[1+(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r)P_r(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r)^{\mathrm T}]^{-1}(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r)P_r, \tag{17}$$

$$P_{r+1}=Q_{r+1}+Q_{r+1}(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r^0)^{\mathrm T}[1-(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r^0)Q_{r+1}(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r^0)^{\mathrm T}]^{-1}(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r^0)Q_{r+1}, \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s}_{r+1}=\boldsymbol{s}_r-P_{r+1}\{&(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r^0)^{\mathrm T}(\Delta y_r^0)-(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r)^{\mathrm T}(\Delta y_r)\\&+[(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r)^{\mathrm T}(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r)-(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r^0)^{\mathrm T}(\Delta\boldsymbol{\varphi}_r^0)]\boldsymbol{s}_r\}.\end{aligned} \tag{19}$$

灵敏度初值的计算[3]：

$$(\boldsymbol{s}_{ki})_0^*=[(\Delta X_0)^{\mathrm T}(\Delta X_0)]^{-1}(\Delta X_0)^{\mathrm T}(\Delta \boldsymbol{y}_{ki})_0, \tag{20}$$

$$(s_{ki})_{l0}^*=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}a_{jl}(y_{ki}^j-y_{ki}^0),\ l=1,2,\cdots,p \tag{21}$$

$$(\boldsymbol{s}_{ki})_0=[(s_{ki})_{10},(s_{ki})_{20},\cdots,(s_{ki})_{p0}]^{\mathrm T}, \tag{22}$$

$$(s_{ki})_{l0}=(s_{ki})_{l0}^*/\Delta\theta_l.\quad l=1,2,\cdots,p \tag{23}$$

协方差矩阵的初值计算见(16)式。

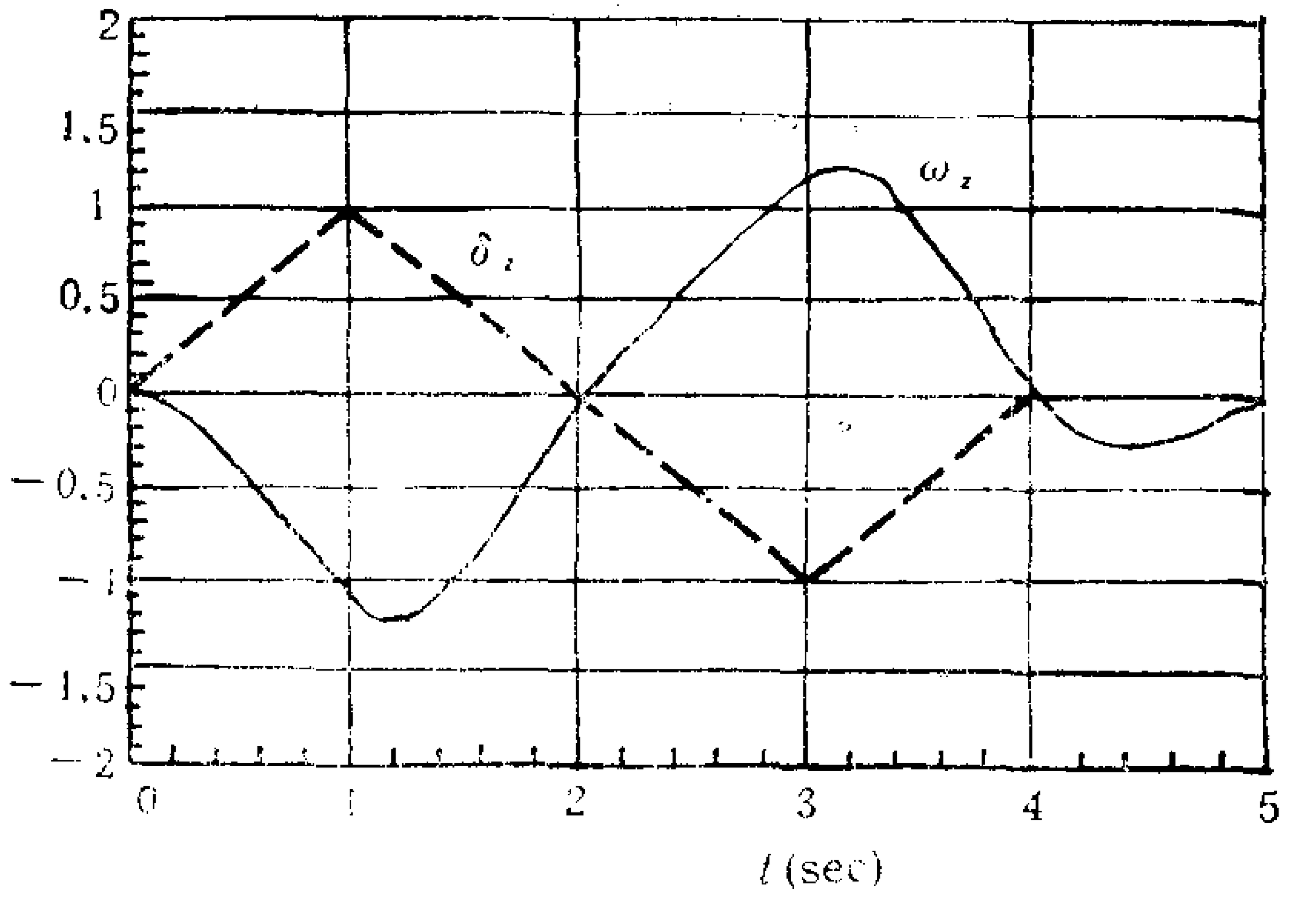

图 1 $\delta_z(t)$——控制输入信号 $\omega_z(t)$——仿真观测信号

5 仿真实例

简化的飞行器纵向运动状态方程和观测方程如下：

$$\dot\alpha=-2\alpha+\omega_z, \tag{24}$$

$$\dot\omega_z=M_\alpha\alpha+M_{\omega z}\omega_z+M_{\delta z}\delta_z, \tag{25}$$

$$\omega_{zm}=\omega_z+v. \tag{26}$$

式中，α、ω_z、δ_z 分别是飞行器的攻角、俯仰角速度、升降舵偏角，M_α、$M_{\omega z}$、$M_{\delta z}$ 是气动力矩系数，ω_{zm} 是 ω_z 的测量量，v 是零均值、方差为 0.01 的高斯白噪声。仿真值、仿真曲线和使用算法(16)—(23)式的估计结果分别见表 1 和图 1（本算例选用了 4

次 3 列二水平正交表($L_4(2^3)$)[1)]，基于(9)式构造矩阵 X_0 和正交矩阵 ΔX_0[3,4])。

表 1　力矩系数估计结果

力矩系数	仿真值	初值	初始摄动值	估计值	相对误差(%)
M_α	−5	−4.5	−0.35	−4.963	0.74
$M_{\omega z}$	−2	−1.5	−0.05	−1.997	0.15
$M_{\delta z}$	−5	−4.5	−0.10	−5.020	0.40

6　结束语

递推计算灵敏度算法是解决非线性连续-离散系统极大似然估计的灵敏度计算的有效途径之一。它的基本思想是：在 p 维参数空间选取最恰当的曲面拟合观测向量，同时选用好的拟合方法获得所需灵敏度。为简化计算，本文采用平面拟合，因而，当两次估计所得参数相差较大时，可能影响灵敏度的计算精度，但随着估计过程的收敛，其影响逐渐消失。本文给出的递推计算灵敏度算法避免了文献 [2] 所给算法在初值计算和递推计算中的矩阵求逆运算，同时也实现了初始参数摄动的最优选择。

参　考　文　献

[1] Maine R E, Iliff K W. Identification of Dynamic Systems. AGARD AG-300, Vol.2, Jan. 1985.

[2] Murphy PC, Klein V. Maximum Likelihood Algorithm Using an Efficient Scheme for Computing Sensitivities and Parameter Confidence Intervals. 1984: AIAA 84-2084, 131—139.

[3] 崔平远，吴瑶华，黄文虎，李乃宏。递推计算灵敏度的初值正交计算法。自动化学报，1992，18(5): 619—622.

[4] 崔平远，吴瑶华，黄文虎，李乃宏。极大似然估计的递推计算灵敏度算法。自动化学报，1994，20(1): 114—116.

1) 崔平远。非定常气动力识别与现场条件下的飞行器气动参数估计，哈尔滨工业大学博士论文，1990.

THE IMPLEMENTATION FOR MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION ALGORITHM OF RECURSIVE COMPUTING SENSITIVITIES

CUI PINGYUAN

(Dept. of Aerospace Engineering and Mechanics, Harbin Institute of Technology Harbin 150001)

ABSTRACT

A set of new formulas of recursive computing sensitivities is developed for maximum likelihood estimation method to the nonlinear continuous-discrete systems. The inverse operation of matrix in the algorithm of recursive computing sensitivities is avoided by the properties of orthogonal table with two sample points. The simulation example shows the effectiveness and practicality of the proposed formulas.

Key words: nonlinear continuous-discrete systems, maximum likelihood estimation, sensitivities, orthogonal test.