

利用 H^∞ 范数的最优异步自主学习 控制频域方法

邓志东 孙增圻

(清华大学计算机系 北京 100084)

摘 要

利用 H^∞ 范数对异步自主学习控制系统进行了深入的研究。基于用 H^∞ 语言重新改写的问题提法,给出了四个引理与一个定理的严格证明,得到了渐近稳定时控制器存在的一个充分条件,并给出了计算实例。

关键词: 学习控制,异步自主学习控制,重复控制, H^∞ 控制。

1 引言

文[1]研究了异步自主学习控制系统的频域理论,围绕稳定条件的逐步放宽及异步自主学习控制系统的频域综合这两大问题展开讨论,有效地利用时域法中的渐消记忆和D型学习的思想改善了稳定条件;从DNA法渐近稳定判据得到的结果拓广了多变量异步自主学习控制系统的稳定性理论,给出了一种建立在CAD基础上的频域综合方法。本文进一步从 H^∞ 范数的角度,对频域综合的一般化方法进行系统的研究。

2 预备知识

2.1 基本概念

图1为异步自主学习控制频域法的一般框图。如图所示,异步自主学习控制系统可视为在由直接通道与被控系统组成的闭环控制系统之上,增加如虚线所示的学习环节组成,其中 $L(s)$ 称为学习矩阵, $Q(s) = [I_m + G_p(s)G_c(s)]^{-1}G_p(s)G_c(s)$ 被假定为稳定且具有一定动态品质的广义被控系统。

所谓异步自主学习控制系统的频域综合法,就是对于给定广义被控系统 $Q(s)$ 及期望输出 $Y_d(s)$,设计一异步自主学习控制器,

$$U^{(l+1)}(s) = U^{(l)}(s) + L(s)E^{(l)}(s), \quad (1)$$

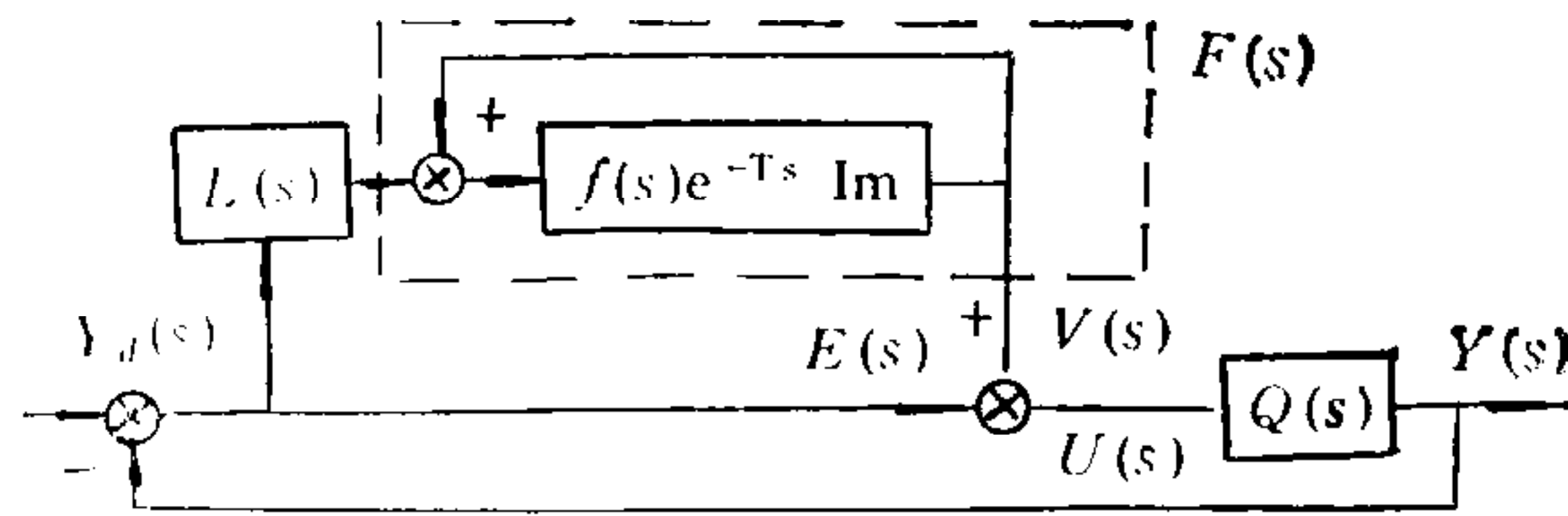


图 1 异步自学习控制频域法的一般框图

其中 $E^{(l)}(s) = Y_d(s) - Y^{(l)}(s)$ 为输出误差, $l = 0, 1, \dots$ 为学习迭代次数, 从而使 $E^{(l)}(s) \rightarrow 0, l \rightarrow \infty$.

此时异步的含义即体现在 $U^{(l+1)}(s)$ 的记忆或存储上, 即第 $l + 1$ 个学习周期的控制量 $U^{(l+1)}(s)$ 可基于第 l 个学习周期的计算与记忆获得. 而这种从第 l 步到第 $l + 1$ 步的离线重复操作, 就是所谓异步.

引理 1^[1]. 图 1 中 $L(s) = I_m$ 的异步自学习控制系统渐近稳定的充分条件为

- 1) $[I_m + 2G(s)]^{-1}G(s) \in R_-$,
- 2) $\|f(s)[I_m + 2G(s)]^{-1}[I_m + G(s)]\|_\infty < 1$,

式中 R_- 表示稳定的真有理传递函数矩阵空间.

2.2 若干定义

为了叙述方便, 给出如下几个定义:

定义 1^[2-4]. Hardy 空间 H^∞ 是在 s 的右半开平面解析且有界的矩阵函数空间, 或者说, H^∞ 空间是稳定的真传递函数矩阵空间. 设 $G(s) \in H^\infty$, 则其 H^∞ 范数为

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)), \quad (2)$$

其中 $\bar{\sigma}(\cdot)$ 为最大奇异值.

定义 2^[2-4]. Hardy 空间 H^2 是在 s 的右半开平面解析且具有有限 H^2 范数的函数空间. 设 $X(s) \in H^2$, 则其 H^2 范数为

$$\|X(s)\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^H(j\omega)X(j\omega)d\omega \right)^{1/2}. \quad (3)$$

定义 3^[2-4]. 设 $\Gamma(s), K(s) \in H^\infty$, 则其 Hankel 范数为

$$\|\Gamma(s)\|_H = \inf_{K(s) \in H^\infty} \|\Gamma(s) - K(s)\|_\infty. \quad (4)$$

定义 4^[5]. 如果对一切 ω , 有 $G^H(j\omega)G(j\omega) = I_m$, 则称 $G(s)$ 为内的 (inner); 类似地, 如果 $G(j\omega)G^H(j\omega) = I_m$, 则称其为互内的 (co-inner), 这里 $G(s) \in H^\infty$.

定义 5^[5]. 如果对一切 $\text{Re}(s) > 0$, $G(s)$ 行满秩, 则称 $G(s)$ 为外的 (outer); 类似地, 如果 $G(s)$ 列满秩, 则称其为互外的 (co-outer), 这里 $G(s) \in H^\infty$.

3 主要理论结果

根据定义 1, 2, 引理 1 可以用 H^∞ 语言描述如下:

引理 2. 图 1 的异步自学习控制系统渐近稳定的充分条件为

$$1) [I_m + 2G(s)]^{-1}G(s) \in H^\infty,$$

$$2) \|f(s)[I_m + 2G(s)]^{-1}[I_m + G(s)]\|_\infty < 1,$$

这里 $G(s) = G_p(s)G_c(s) \in H^\infty$.

引理 3. 设被控对象 $G_p(s) \in H^\infty$ 的左、右互质分解为

$$G_p(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s), \quad G_p(s) = N(s)D^{-1}(s), \quad (5)$$

且假定相应的 Bezout 恒等式满足

$$U_1(s)V_1(s) = V_1(s)U_1(s) = I_m, \quad (6)$$

其中

$$U_1(s) = \begin{bmatrix} Y(s) & X(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{D}(s) \end{bmatrix}, \quad V_1(s) = \begin{bmatrix} D(s) & -\tilde{X}(s) \\ N(s) & \tilde{Y}(s) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

则图 1 的异步自学习控制系统渐近稳定的充分条件为

$$1) [I_m + 2G(s)]^{-1}G(s) \in H^\infty,$$

$$2) \|f(s)[\tilde{Y}(s)\tilde{D}(s) - N(s)K(s)]\|_\infty < 1,$$

其中 $K(s) \in H^\infty$ 为一个适当选择的自由参数.

证明. 见附录 A.

进一步地, 在式(46)中若令 $K = X$, 则条件 2) 可退化为 $\|f(s)\|_\infty < 1$. 因此只要通过使用接近于 1 的低通滤波器就能使图 1 的异步自学习控制系统渐近稳定.

引理 4. 在与引理 3 相同的条件下, 条件 2) 可写为

$$\|f_o N_i^H \tilde{Y} \tilde{D} - S\|_\infty < 1, \quad (8)$$

其中

$$S(s) = f_o(s)N_o(s)K(s) \in H^\infty, \quad (9)$$

这里 $N_i(N_o)$ 分别为互内(外)的, $f_i(f_o)$ 分别为内(外)的, 其内外分解为 $N = N_i N_o$, $f = f_i f_o$, 且 $N_i^H(s)N_i(s) = I_m$, $N_i^H(s) = N_i^H(-s)$ 也是互内的.

证明. 只需将引理 3 的条件 2) 重写即可, 在此从略.

$K(s)$ 可由式(8)求得

$$K(s) = f_o^{-1}(s)N_o^+(s)S(s), \quad (10)$$

式中 $N_o^+(s)$ 为外矩阵 $N_o(s)$ 的伪逆矩阵.

不过由上式求得的 $K(s)$ 虽可满足稳定但一般并不为真有理传递函数矩阵, 为此可令

$$K'(s) = f_o^{-1}(s)N_o^+(s)S(s)/(1 + \alpha s)^n \in H^\infty, \quad (11)$$

其中 α 为充分小的正数, n 为充分大的整数.

除了用 S 代替 K 以外, 上述两个引理完全相同.

(8)式实际是一种典型的 H^∞ 最优问题, 因此可考虑应用 Hankel 范数逼近算法求解.

定理 1. 在与上述引理相同的假设下, 满足条件 1), 2) 的 $G_c(s) \in H^\infty$ 存在的充要条件为

$$\|\Gamma_\mu\|_H < 1, \quad (12)$$

其中 Γ_μ 为 $\Gamma = f_o N_o^H \tilde{Y} \tilde{D}$ 的不稳定部分.

证明. 见附录 B.

上述定理表明, 对于最小相位系统, 满足稳定性条件的 $G_c(s)$ 总可以对任意低通滤波器进行构造^[1], 而对于非最小相位系统, 则由于其不稳定零点(即 $\Phi(s) = \det[N_i(s)]$ 的零点)就是 N_i^H 的不稳定极点, 因此这时须通过对 $G_p(s)$ 的部分分式展开, 得到稳定与不稳定部分.

此外, 当 $f(s)$ 满足上述定理的条件时, $S(s)$ 可进一步利用适当的严格有界的实矩阵 $z \in H^\infty$ 来参数化.

4 计算举例

考虑由非最小相位被控对象

$$G_p(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$$

组成的异步自学习控制系统(如图 1)的渐近稳定条件.

由于

$$N = \tilde{N} = \frac{s-1}{(s+1)^2}, \quad D = \tilde{D} = \frac{s-2}{s+1}, \quad X = \tilde{X} = 9, \quad Y = \tilde{Y} = \frac{s-5}{s+1},$$

因而

$$N_i = \Phi = \frac{s-1}{s+1}, \quad N_i^\# = \frac{s+1}{s-1}, \quad \tilde{D}_{c_0} = \frac{s+2}{s+1}, \quad \mu = 1, \quad \lambda_i = 1,$$

故有

$$\Gamma_1 = f_o(s) \frac{(s-2)(s-5)}{(s-1)(s+1)} = \frac{-9f_o(-1)}{s+1} + \frac{f_o(1)}{s-1},$$

$$\Gamma_2 = f_o(s) \frac{(s-5)(s+2)}{(s-1)(s+1)} = \frac{3f_o(-1)}{s+1} + \frac{-6f_o(1)}{s-1}.$$

考虑到 $\left\| \frac{\beta}{s-\alpha} \right\|_H = \left| \frac{\beta}{2\alpha} \right|$, $\alpha > 0$, 于是

$$\|\Gamma_{1*}\|_H = \left\| \frac{2f_o(1)}{s-1} \right\|_H = |f_o(1)|, \quad \|\Gamma_{2*}\|_H = \left\| \frac{-6f_o(1)}{s-1} \right\|_H = 3|f_o(1)|.$$

因此由定理 1 可知, 相应的渐近稳定条件为 $|f_o(1)| < 1/3$. 进一步地, 若取 $f(s) = 1/(1+Ts)$, 则必有 $T > 2$.

利用 H^∞ 空间理论处理异步自学习控制的频域问题, 是一种十分有效的方法. 能否利用这个有力工具, 解决诸如学习动态特性的模型匹配、鲁棒学习稳定及自适应异步自学习控制的频域法等问题, 尚待进一步探索.

参 考 文 献

- [1] 邓志东, 孙增圻. 异步自学习控制的频域稳定性分析. 信息与控制, 1994, 23(1): 1-7.
- [2] (日)木村英纪. 从 LQG 到 H_∞ . 邓志东, 姚一新译. 自动化技术与应用, 1990, 9(4): 7-15.
- [3] Chen B S and Kung C C. The robustness optimization of a multivariable feedback system in hankel norm space. *Int J Contr.* 1984, 39(6): 1211-1228.

- [4] Francis B A, Helton J W and Zames G. H^∞ optimal feedback controllers for linear multivariable systems. *IEEE Trans Automatic Control*, 1984, 29(4):888—900.
- [5] Hara S and Yamamoto Y. Stability of repetitive control systems. Proc 24th CDC, 1985, 326—327.

附 录 A

引理 3 的证明. 由

$$\begin{aligned} G &= G_p G_c = G_p (Y - X G_p - 2K G_p)^{-1} (X + K) \\ &= (Y G_p^{-1} - X - 2K)^{-1} (X + K) = (Y D N^{-1} - X - 2K)^{-1} (X + K), \end{aligned} \quad (A1)$$

有

$$I_m + 2G = I_m + 2(Y D N^{-1} - X - 2K)^{-1} (X + K) = (Y D N^{-1} - X - 2K)^{-1} (Y D N^{-1} + X), \quad (A2)$$

又

$$I_m + G = I_m + (Y D N^{-1} - X - 2K)^{-1} (X + K) = (Y D N^{-1} - X - 2K)^{-1} (Y D N^{-1} - K). \quad (A3)$$

由上述两式可得

$$\begin{aligned} (I_m + 2G)^{-1} (I_m + G) &= (Y D N^{-1} + X)^{-1} (Y D N^{-1} - X - 2K) (Y D N^{-1} - X - 2K)^{-1} (Y D N^{-1} - K) \\ &= (Y D N^{-1} + X)^{-1} (Y D N^{-1} - K). \end{aligned} \quad (A4)$$

由式(6)的 Bezout 恒等式可得

$$Y D N^{-1} + X = N^{-1}, \quad \tilde{Y} \tilde{D} = I_m - N X \quad (A5)$$

故式(A4)可写为

$$\begin{aligned} (I_m + 2G)^{-1} (I_m + G) &= N(N^{-1} - X - K) = I_m - N X - N K \\ &= \tilde{Y} \tilde{D} - N K. \end{aligned} \quad (A6)$$

从而由引理 2 即可得到条件 2), 证毕.

附 录 B

定理 1 的证明. 令

$$\Gamma = f_0 N_i^H \tilde{Y} \tilde{D} = \Gamma_s + \Gamma_u, \quad (B1)$$

其中 Γ_s 和 Γ_u 分别为 Γ 的稳定和不稳定部分, 即 $\Gamma_s(s)$ 和 $\Gamma_u(-s)$ 均属于 H^∞ 空间.

由引理 4 可得

$$\begin{aligned} \inf_{S \in H^\infty} \|f_0 N_i^H \tilde{Y} \tilde{D} - S\|_\infty &= \inf_{S \in H^\infty} \|\Gamma - S\|_\infty = \inf_{S \in H^\infty} \|\Gamma_u - (S - \Gamma_s)\|_\infty \\ &= \inf_{\bar{S} \in H^\infty} \|\Gamma_u - \bar{S}\|_\infty < 1. \end{aligned} \quad (B2)$$

这里将稳定部分 $S, \Gamma_s \in H^\infty$ 合并为 \bar{S} , 从而由定义 3 可知 $\|\Gamma_u\|_H < 1$, 证毕.

ON H^∞ FREQUENCY-DOMAIN METHOD OF OPTIMAL ASYNCHRONOUS LEARNING CONTROL SYSTEM

DENG ZHIDONG SUN ZENGQI

(Dept. of Computer, Tsinghua Univ. Beijing 100084)

ABSTRACT

In this paper the asynchronous learning control system is deeply discussed by means of H^∞ norm. Four lemmas and one theorem, based on problem descriptions rewritten by H^∞ , are strictly proved and the sufficient condition that asynchronous learning controller with asymptotic stability exists is derived. A numerical example is given.

Key words: Learning control, asynchronous learning control, repetitive control, H^∞ control.