第21卷 第2期 自 动 化 学 报 Vol. 21, No. 2
1995年3月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 1995

一种改进的 H^∞ 鲁棒自校正控制[1)]

张 汉 全
(西南交通大学计算机学院 成都 610031)

摘 要

指出英国学者 Grimble 推出的 H^∞ 鲁棒自校正控制不能使系统所有闭环极点配置在预定区域的问题,介绍基于一种 w 变换的、具有预定闭环极点区域的 H^∞ 鲁棒自校正控制的设计方法,并给出了这种改进的 H^∞ 鲁棒控制的频域分析,最后给出了一个例子.

关键词: H^∞ 最优理论,鲁棒自校正控制,预定极点区域,频域分析.

1 引言

由于未建模高频特性与参数估计误差可能使自适应系统失稳,设计具有鲁棒稳定性的自适应控制便成为近年的一个研究热点[1]. 而 H^∞ 最优理论则为设计鲁棒控制器提供了一种有力手段. 1987年——1990年,英国学者 Grimble[2] 对 SISO 随机离散系统导出相当简便的 H^∞ 鲁棒控制器的解,进而给出了 H^∞ 鲁棒自校正控制的设计算法. 所得自校正控制系统虽有良好的干扰抑制能力与鲁棒稳定性,但却不能使所有闭环极点位于预定区域,因而难以保证具有良好的动态响应性能. 文[3,4]分别对连续系统与离散系统给出了具有预定闭环极点区域的 H^∞ 控制器的一般设计思想.

文[5]基于文[3,4]提出的基本思想,利用一种 w 变换,提出了具有预定闭环极点区域的 H^∞ 鲁棒自校正控制设计方法,但没有解决 w 变换以后 H^∞ 最优指标等频域性质将如何变化的问题. 本文将在介绍文[5]基础上给出这种改进方法的频域分析,说明这种改进方法不但具有良好的动态响应性能,而且抗干扰性与鲁棒稳定性也能满足要求.

符号说明.

$A(z^{-1})$: z^{-1} 的多项式,简记为 A. 当 A 的所有零点均位于 z 平面单位圆内时,称之为"严格 Hurwitz 的";当 A 的所有零点均位于单位圆外时,则称之为"严格非 Hurwitz 的". $A^*(z^{-1})$: $A(z^{-1})$ 的伴随, $A^*(z^{-1})=A(z)$, 简记为 A^*.

H^∞ 空间: 在 z 平面单位圆域外具有解析连续性的有界复函数 $G(z^{-1})$ 所在空间,满足

$$\sup_{r\in(0,1)}\max_{\theta\in[0,2\pi]}|G(re^{i\theta})|=\|G(z^{-1})\|_\infty<\infty,$$

1) 西南交通大学科研基金资助项目.
本文于1992年8月3日收到

式中，$\|G\|_\infty$ 是 $G(z^{-1})$ 的 $\mathbf{H}^\infty$ 范数，在标量情况

$$\|G\|_\infty \triangleq \{\sup_{|z|>1}[G^*G]\}^{1/2} = \sup_{|z|=1}|G(z^{-1})|,$$

即 $G(z^{-1})$ 幅频特性的最大值。

2 H∞ 鲁棒自校正控制存在的问题

设 SISO 离散随机控制系统如图 1 所示，其中对象与噪声模型用 ARMAX 模型描述，即

$$Ay(t) = Bu(t) + C_d\varepsilon(t), \tag{2.1}$$

式中 A 为首一多项式；B 包含时延 k，$B = B_kz^{-1}$；$\varepsilon(t)$ 为零均值单位方差白噪声。且设对象 $P = B/A$ 没有不稳定潜模态。P 可以是不稳定的或非最小相位的。

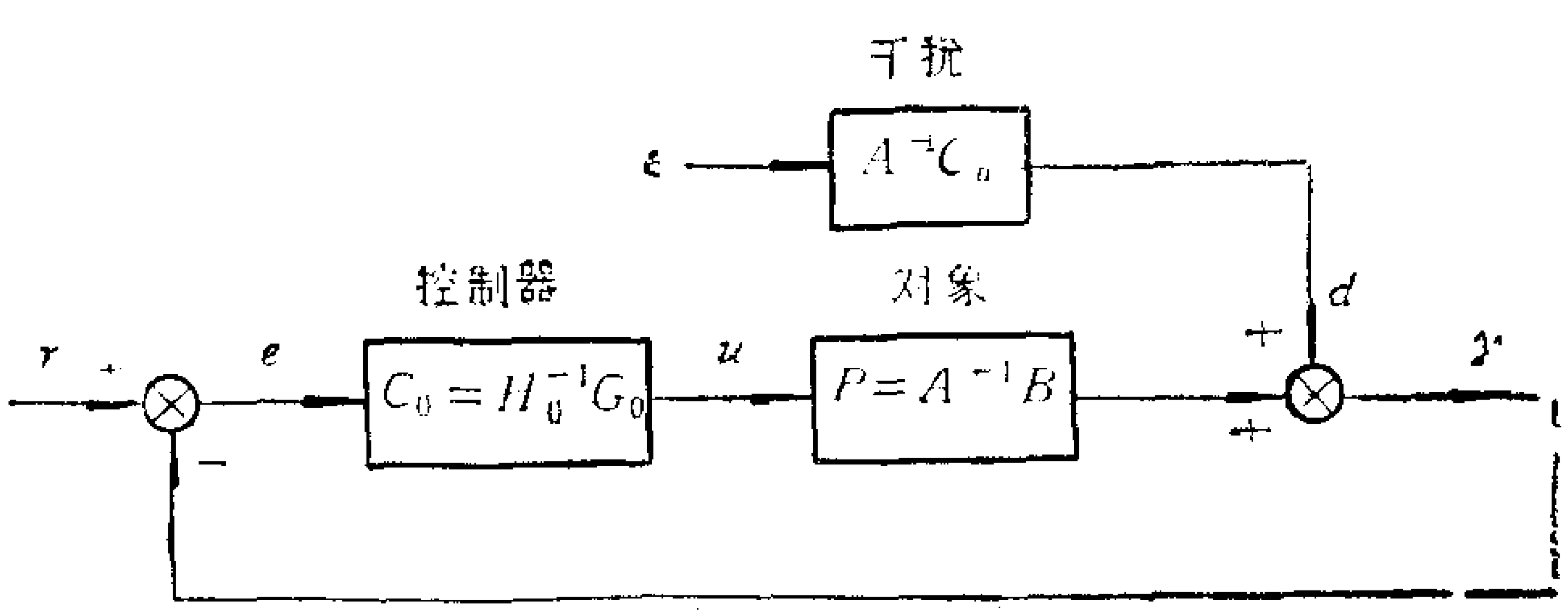

图 1　反馈控制系统

取最优指标为下列 $\mathbf{H}^\infty$ 范数：

$$J_\infty = \|\Phi_{\phi\phi}(z^{-1})\|_\infty = \sup_{|z|=1}|\Phi_{\phi\phi}(z^{-1})|, \tag{2.2}$$

式中 $\Phi_{\phi\phi}(z^{-1})$ 是下列加权信号的功率谱密度：

$$\phi(t) = P_c(z^{-1})e(t) + F_c(z^{-1})u(t), \tag{2.3}$$

其中 $e(t)$ 与 $u(t)$ 分别为跟踪误差与控制信号，而 $P_c(z^{-1})$ 与 $F_c(z^{-1})$ 为具有相同分母多项式的动态权因子

$$P_c(z^{-1}) = P_{cn}/P_{cd},\quad F_c(z^{-1}) = F_{cn}/P_{cd} = F_{ck}z^{-k}/P_{cd}, \tag{2.4}$$

k 为对象时延。在上述假定条件下，文[2]给出了以下结论：

引理 1. 对系统 (2.1) 极小化式 (2.2) 的 H^∞ 最优控制器 $C_o = G_o/H_o$ 可以用下列两个 diophantine 方程相应于 F_o^- 的最小阶次解 (G_o, H_o, F_o^-) 来计算。

$$F_o^-AP_{cd}\lambda + L_{2k}z^{-k}G_o = P_{cn}D_fF_{os}^-, \tag{2.5}$$

$$F_o^-B_kP_{cd}\lambda - L_{2k}H_o = F_{ck}D_fF_{os}^-, \tag{2.6}$$

式中 $L_k = P_{cn}B_k - F_{ck}A = L_{1k}L_{2k}$，$L_{1k}$ 为严格 Hurwitz 的，L_{2k}、F_o^- 为严格非 Hurwitz 的，$n_f = \deg F_o^- = \deg L_{2k} + k - 1$，$F_{os}^- = (F_o^-)^*z^{-n_f}$；$D_f$ 为 $C_dC_d^*$ 的谱因子，是严格 Hurwitz 的，满足 $D_fD_f^* = C_dC_d^*$。系统闭环特征多项式为

$$G_oB + H_oA = L_{1k}D_fF_{os}^-,$$

而极小化指标为 $J_\infty = \|\Phi_{\phi\phi}(z^{-1})\|_\infty = \lambda^2$，且 $\Phi_{\phi\phi}(z^{-1})$ 在 $|z| = 1$ 上是常数。

文 [2] 还利用功率谱传递定理将最优指标 (2.2) 用灵敏度 S 与控制灵敏度 U 表达为

$$J_{\infty}=\sup_{|z|=1}|\Phi_{\phi\phi}(z^{-1})|=\sup_{|z|=1}|V|, \tag{2.7}$$

$$V=(P_cS+F_cU)\Phi_o(P_cS+F_cU)^*, \tag{2.8}$$

其中 $\Phi_o=(AA^*)^{-1}C_dC_d^*$; $S=(1+PC_o)^{-1}$; $U=(1+PC_o)^{-1}C_o$。于是，通过适当选择函数 P_c 和 F_c，可以使灵敏度和控制灵敏度在各自选定的频率范围内足够小，从而达到所需的干扰抑制能力与鲁棒稳定性。因此基于这种控制器的自校正控制被称为 H^{∞} 鲁棒自校正控制。

但是，上述 H^{∞} 鲁棒自校正控制系统的动态性能却不能保证。这是因为闭环系统特征多项式 $L_{1k}D_fF_{os}^-$ 中，尽管 L_{1k} 的零点可以通过选择权因子 P_c,F_c 来配置，但 P_c，F_c 的选择要受到所需灵敏度与控制灵敏度指标的制约；而 F_{os}^- 取决于方程(2.5)，(2.6)的解，难以任意改变；D_f 的零点则取决于噪声模型的分子多项式 C_d，也不能随意配置。当 $L_{1k}D_fF_{os}^-$ 的零点接近单位圆时，系统的瞬态响应衰减太慢，其它动态性能指标也会很差。例如，文[2]的油船模型中 $C_d=0.03(1-0.7782z^{-1})(1-1.021z^{-1})$，故 D_f 的一个因子是 $(1-0.979z^{-1})$，D_f 的一个零点(0.979)就是紧靠 z 平面单位圆周的。

因此，有必要研究一种新的设计方法，使 H^{∞} 自校正控制系统不但具有良好的干扰抑制能力和鲁棒稳定性，而且使其闭环极点位于预定区域。

3 一种改进的 H^{∞} 鲁棒自校正控制设计方法

本节将基于 w 变换，介绍一种改进的 H^{∞} 鲁棒自校正控制的设计方法和一个有关定理[5]。

3.1 一种 w 变换的性质

下面，不加证明地给出一种 w 变换的几个性质。

引理 2. 设 $\sigma T>0$，则 w 变换

$$w=e^{\sigma T}z, \tag{3.1}$$

将集合 $\{z\in C\,|\,|z|<e^{-\sigma T}\}$ 变换为集合 $\{w\in C\,|\,|w|<1\}$。

可见，这种 w 变换将 z 平面上半径小于 1 的圆域变换为 w 平面上的单位圆域，如图 2 所示。

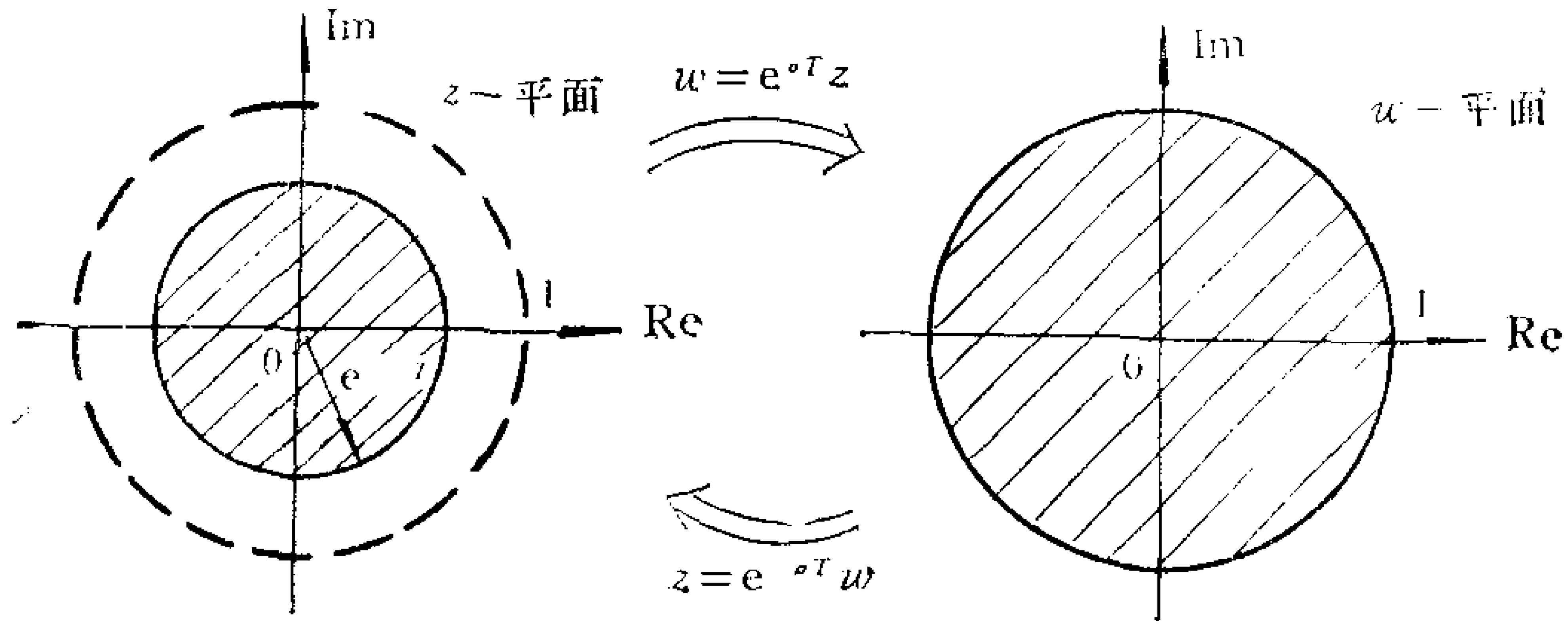

图 2 w 变换

反之，通过反 w 变换 $z=e^{-\sigma T}w$，则可以将 w 平面上单位圆域变换为 z 平面上半径

小于 1 的圆域．为简便计，以下记 $e^{\sigma T}=\mu$，即 w 变换为 $w=\mu z$，反 w 变换为 $z=w/\mu$．

引理 3. 多项式 $A(z^{-1})$ 经 w 变换变为 $\hat{A}(w^{-1})$ 后，$A(z^{-1})$ 在 z 平面的零点 z_i 变为 $\hat{A}(w^{-1})$ 在 w 平面上的零点 z_{wi}，其间关系为

$$z_{wi}=\mu z_i, \tag{3.2}$$

反之可以类推．

引理 4. 设对象模型 $P(z^{-1})$ 经 w 变换变为 $\hat{P}(w^{-1})$ 后，在 w 平面上设计的控制器为 $\hat{C}_o(w^{-1})$，而 w 平面上从 r 到 y 的闭环传递函数为

$$\hat{G}(w^{-1})=[1+\hat{P}(w^{-1})\hat{C}_o(w^{-1})]^{-1}\cdot\hat{P}(w^{-1})\hat{C}_o(w^{-1}).$$

如果 $\hat{G}(w^{-1})$ 和 $\hat{C}_o(w^{-1})$ 经反 w 变换分别变为 $G(z^{-1})$ 和 $C_o(z^{-1})$，那么 $G(z^{-1})$ 等于 z 平面上从 r 到 y 的闭环传递函数 $[1+P(z^{-1})C_0(z^{-1})]^{-1}P(z^{-1})C_0(z^{-1})$．

3.2 具有预定闭环极点区域的 H^∞ 鲁棒控制器

半径小于 1 的圆域是一种简单而实用的预定极点区域．基于上述 w 变换，便可利用引理 1 的结果设计闭环极点位于该区域的 H^∞ 鲁棒控制器．

设系统模型多项式 $A(z^{-1})$，$B(z^{-1})$ 与 $C_d(z^{-1})$ 经 $w=\mu z$ 变换变为 $\hat{A}(w^{-1})$，$\hat{B}(w^{-1})$ 与 $\hat{C}_d(w^{-1})$ 后，引理 1 对系统模型的假设条件在 w 平面上仍成立，即

$$\hat{P}(w^{-1})=\hat{B}(w^{-1})/\hat{A}(w^{-1})$$

在 w 平面上没有“不稳定”潜模态(此即可相消零极点位于 w 平面单位圆内)．这一点要特别注意，因为 $B(z^{-1})/A(z^{-1})$ 在 z 平面上稳定潜模态经 w 变换后有可能变为 w 平面上“不稳定”潜模态．

在上述假定条件下，在 w 平面对系统模型 $\hat{A}(w^{-1})$，$\hat{B}(w^{-1})$ 与 $\hat{C}_d(w^{-1})$ 应用引理 1，得到在 w 平面上使 $\hat{J}_\infty=\|\Phi_{\phi\phi}(w^{-1})\|_\infty$ 极小值的最优化控制器

$$\hat{C}_o(w^{-1})=\hat{G}_o(w^{-1})/\hat{H}_o(w^{-1}), \tag{3.3}$$

而极小化指标

$$\hat{J}_\infty=\|\hat{V}(w^{-1})\|_\infty=\lambda^2, \tag{3.4}$$

式中

$$\hat{V}=(\hat{P}_c\hat{S}+\hat{F}_c\hat{U})\hat{\Phi}_o(\hat{P}_c\hat{S}+\hat{F}_c\hat{U})^*, \tag{3.5}$$

其中 $\hat{\Phi}_o=(\hat{A}\hat{A}^*)^{-1}\hat{C}_d\hat{C}_d^*$，$\hat{S}=(1+\hat{P}\hat{C}_o)^{-1}$；$\hat{U}=(1+\hat{P}\hat{C}_o)^{-1}\hat{C}_o$．

对 $\hat{C}_o(w^{-1})$ 作反 w 变换后，得 z 平面上控制器

$$C_o(z^{-1})=G_o(z^{-1})/H_o(z^{-1}). \tag{3.6}$$

定理 1. 按上述过程设计的控制系统所有闭环极点位于 z 平面上 $|z|<\mu^{-1}$ 圆域内．

证明．由引理 1 知，w 平面上闭环特征方程为

$$\hat{G}_o(w^{-1})\hat{B}(w^{-1})+\hat{H}_o(w^{-1})\hat{A}(w^{-1})=\hat{L}_{1k}(w^{-1})\hat{D}_f(w^{-1})\hat{F}_{os}(w^{-1}), \tag{3.7}$$

且上式所有零点位于 w 平面开单位圆内，即 $|z_{wi}|<1$，对所有 i．由引理 4，z 平面上闭环特征多项式为

$$G_o(z^{-1})B(z^{-1})+H_o(z^{-1})A(z^{-1}), \tag{3.8}$$

它是 $\hat{G}_o(w^{-1})\hat{B}(w^{-1})+\hat{H}_o(w^{-1})\hat{A}(w^{-1})$ 的反 w 变换．因此由引理 3 可知，式(3.8)的

所有零点位于 z 平面上 $|z|<\mu^{-1}$ 圆域内。 证毕

3.3 自校正控制算法

基于上述 H^∞ 控制器，可以得到具有预定闭环极点区域的 H^∞ 鲁棒自校正控制算法。

由于改进的 H^∞ 鲁棒自校正控制可以使系统闭环极点配置在 z 平面预定区域，系统的动态响应性能便可得到保证。仿真结果[5]也证明了这一点。

但是，改进的 H^∞ 鲁棒控制的 H^∞ 范数指标以及灵敏度、控制灵敏度等频域性质有什么变化，还需进一步探讨。

4 改进的 H^∞ 鲁棒控制的频域分析

4.1 w 变换下的 H^∞ 范数

定理 2. 如果 w 平面上传递函数 $\hat{T}(w^{-1})\in \mathbf{H}^\infty$ 经反 w 变换变为 $T(z^{-1})$，那么 z 平面上 $T(z^{-1})\in H^\infty$。且有

$$\|T(z^{-1})\|_\infty \leqslant \|\hat{T}(w^{-1})\|_\infty \tag{4.1}$$

这个定理表明，反 w 变换只能使 H^∞ 范数变小或不变，而不会使 $\mathbf{H}^\infty$ 范数增大。

证明。(1)如果 $\hat{T}(w^{-1})\in \mathbf{H}^\infty$，其极点必位于 w 平面开单位圆内。由引理 3，其反 w 变换 $T(z^{-1})$ 的极点必位于 z 平面上半径小于 1 的开圆域内，因而有 $T(z^{-1})\in \mathbf{H}^\infty$。

(2) 由 $\mathbf{H}^\infty$ 范数的定义以及 w 变换关系，有

$$\|\hat{T}(w^{-1})\|_\infty=\sup_{|w|>1}|\hat{T}(w^{-1})|=\sup_{|\mu z|>1}|T(z^{-1})|. \tag{4.2}$$

又由于

$$\{z\in C\,|\,|\mu z|>1\}\supset\{z\in C\,|\,|z|>1\},$$

利用文[4]引理 3，便有

$$\sup_{|z|>1}|T(z^{-1})|\leqslant\sup_{|\mu z|>1}|T(z^{-1})|=\sup_{|w|>1}|\hat{T}(w^{-1})|, \tag{4.3}$$

这样就证明了式(4.1)。 证毕

利用定理 2，便可得到有关 $\mathbf{H}^\infty$ 范数指标等频域性质方面的结论。

定理 3. 改进的 H_∞ 鲁棒控制器设计过程中，反 w 变换后系统的 $\mathbf{H}_\infty$ 范数指标以及灵敏度、控制灵敏度的 $\mathbf{H}^\infty$ 范数均不大于反变换前的数值，即

$$\|V(z^{-1})\|_\infty\leqslant\|\hat{V}(w^{-1})\|_\infty=\lambda^2, \tag{4.4}$$

$$\|S(z^{-1})\|_\infty\leqslant\|\hat{S}(w^{-1})\|_\infty, \tag{4.5}$$

$$\|U(z^{-1})\|_\infty\leqslant\|\hat{U}(w^{-1})\|_\infty, \tag{4.6}$$

式中 $V(z^{-1})$，$S(z^{-1})$ 和 $U(z^{-1})$ 分别是 $\hat{V}(w^{-1})$，$\hat{S}(w^{-1})$ 和 $\hat{U}(w^{-1})$ 的反 w 变换。

式(4.4)给出了 z 平面上信号 $\psi(t)=P_c(z^{-1})e(t)+F_c(z^{-1})u(t)$ 的功率谱的 $\mathbf{H}^\infty$ 范数 $\|\Phi_{\psi\psi}(z^{-1})\|_\infty$ 的上界，而式(4.5)，(4.6)分别给出了灵敏度与控制灵敏度 $\mathbf{H}^\infty$ 范数的上界。当然，实际上更关心的是灵敏度控制灵敏度是否各自在一定频段上足够小。为此，可适当选择权因子 $\hat{P}(w^{-1})$ 与 $\hat{F}(w^{-1})$ 使 $|S(z^{-1})|_{|z|=1}$ 与 $|U(z^{-1})|_{|z|=1}$ 各自在一定的频段足够小，从而使改进的 H^∞ 控制系统仍能达到所需的抗干扰能力与鲁棒稳定

性。

4.2 例子

设系统模型为

$$y(t)=\frac{(1-0.9z^{-1})z^{-1}}{(1-0.4z^{-1})(1-1.02z^{-1})}u(t)+\frac{1-1.02z^{-1}}{(1-0.4z^{-1})(1-1.02z^{-1})}\gamma\omega(t). \quad (4.7)$$

1）如果利用引理 1 的设计方法，选择 L_k 为 Hurwitz 且零点在 0.4 与 0.2（此即期望的闭环极点在 0.4 与 0.2），取 $P_{cd}=1-z^{-1}$，那么得控制器

$$C_0(z^{-1})=H_0^{-1}(z^{-1})G_0(z^{-1})=\frac{7.1040-9.8116z^{-1}+2.7880z^{-2}}{1-7.2644z^{-1}+6.1500z^{-2}},$$

而极小指标

$$J_\infty=\|V(z^{-1})\|_\infty=6.79^2=48.57,$$

闭环特征方程

$$G_0B+H_0A=(1-0.4z^{-1})(1-0.2z^{-1})(1-0.98z^{-1}),$$

其中闭环极点 0.98 紧靠 z 平面单位圆周。

2）如果利用改进的设计方法，选择期望闭环极点在 0.4 与 0.2，取 $\hat{P}_{cd}=1-w^{-1}$，又选择预定极点区域在 $|z|<0.5$（即 $\mu=2$），那么在 w 平面上得到

$$\hat{P}_c(w^{-1})=\frac{3.4167-2.7333w^{-1}}{1-w^{-1}},\quad \hat{F}_c(w^{-1})=\frac{5.8333w^{-1}}{1-w^{-1}},$$

$$\hat{C}_0(w^{-1})=\frac{8.7118-13.9395w^{-1}+5.5760w^{-2}}{1-16.2739w^{-1}+12.3000w^{-2}},$$

$$\hat{J}_\infty=\|\hat{V}(w^{-1})\|_\infty=6.79^2=48.57.$$

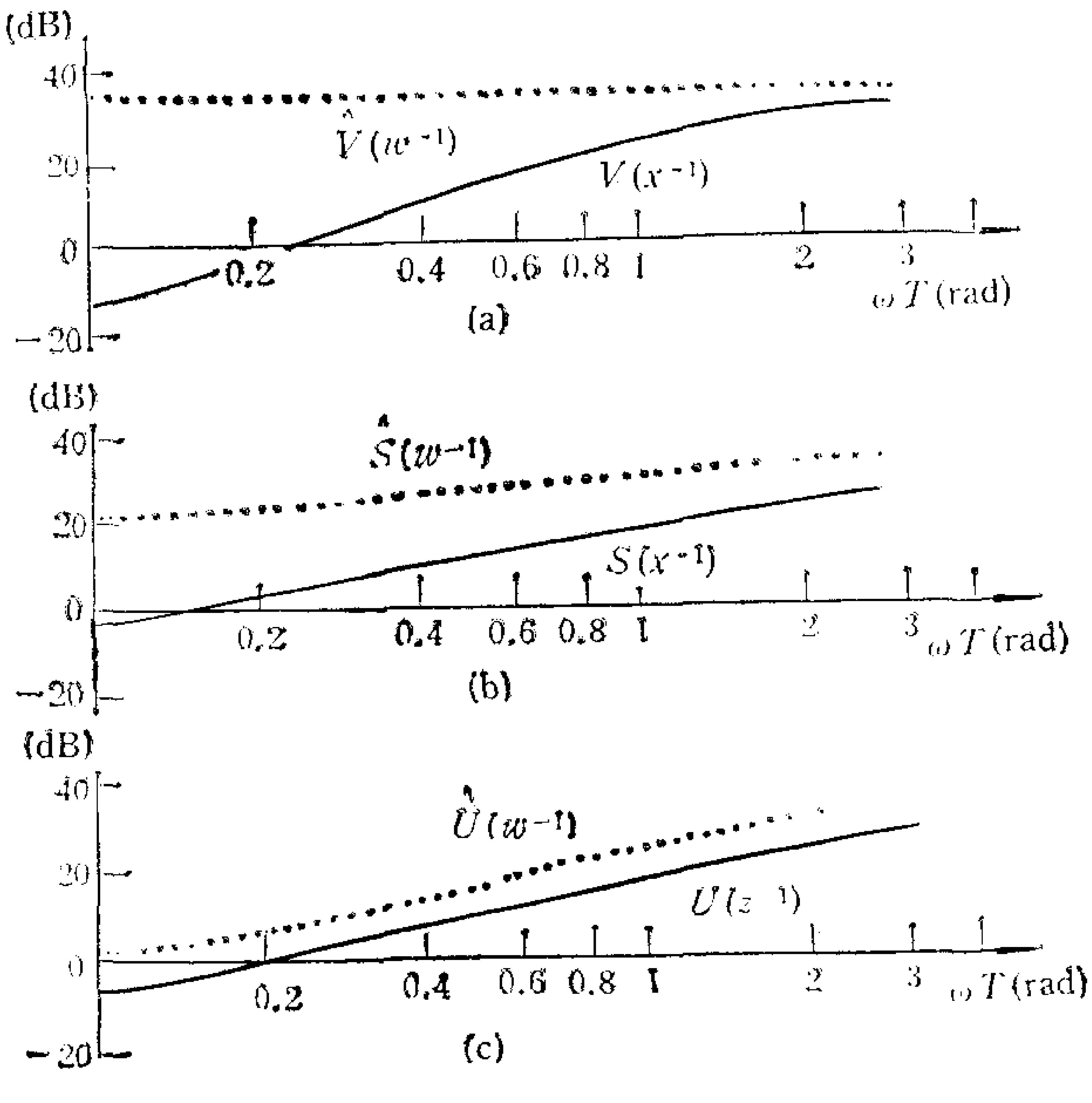

图 3　幅频特性图

注意这里极小 $\hat{J}_\infty$ 恰好等于情况(1)的极小 J_∞. 可以证明，这是一个一般结论而非偶然. 通过反 w 变换,得 z 平面上控制器

$$C_0(z^{-1}) = \frac{8.7118 - 6.9647z^{-1} + 1.3940z^{-2}}{1 - 8.1369z^{-1} + 3.0750z^{-2}},$$

而闭环特征多项式

$$G_0B + H_0A = (1 - 0.4z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.25z^{-1}),$$

可见所有闭环极点位于 $|z| < 0.5$ 圆域.

利用离散系统 Bode 图 CAD 程序，得到 $\hat{V}(w^{-1})$ 和 $V(z^{-1})$、$\hat{S}(w^{-1})$ 和 $S(z^{-1})$ 以及 $\hat{U}(w^{-1})$ 和 $U(z^{-1})$ 的幅频特性,如图 3 所示. 由图 3(a) 可见，$\hat{V}(w^{-1})$ 的幅频特性几乎是常数,且$\|V(z^{-1})\|_\infty < \|\hat{V}(w^{-1})\|_\infty = 48.57$. 图 3(b) 与图 3(c)则证明了式(4.5),(4.6)的正确性.

注意到图 3 中的 ωT 的范围只取 0.1—π(rad)，这是因为离散系统 Bode 图具有周期性与对称性所致.

5 结语

本文给出的一种改进的 H^∞ 鲁棒自校正控制方法，其频域分析表明,这种控制方法不但可以使所有闭环极点位于预定区域,从而保证系统具有良好的动态响应能力,而且可以保证 $\mathbf{H}^\infty$ 范数指标不致变大. 通过适当选择权因子 $\hat{P}(w^{-1})$ 和 $\hat{F}(w^{-1})$，还能保证系统抗干扰性能与鲁棒稳定性满足要求.

但本法对于对象的条件略有加强;而且,如何选择权因子以得到所需灵敏度与控制灵敏度,还有待通过解析方法或 CAD 方法进一步研究.

致谢. 在本课题研究中,余勇生硕士与张宇舒学士做了不少有益工作,谨致谢意.

参 考 文 献

[1] 袁著祉等. 鲁棒自校正控制器的某些进展. 控制理论与应用，1992，**9**(1)：2—8.

[2] Grimble M J. H∞ robust controller for self-tuning control applications. Part 1, Controller design. Int. J. Contr., 1987, **46**(4): 1429—1444; Part 2, Self-tuning and robustness. *Int. J. Contr.*, **46**(5): 1819—1840; Part 3, Self-tuning controller implementation. *Int. J. Contr.*, 1990, **52**(1): 15—16.

[3] 范玉顺，吴麒，王恩平. 具有预期闭环极点区域的稳定控制器的 H∞ 优化设计方法. 自动化学 报，1991，**17**(1)：10—15.

[4] Saeki M. H∞ control with pole assignment in a specified disc. *Int. J. Contr.*, 1992, **56**(3):725—731.

[5] 张汉全，余勇生. 具有预定闭环极点区域的 H∞ 鲁棒自校正控制. 西南交通大学学报，1993，**92**(4)：1—6.

AN IMPROVED SCHEME FOR H^∞ ROBUST SELF-TUNING CONTROL

ZHANG HANQUAN
(*College of Computer, Southwest Jiaotong University Chengdu* 610031)

ABSTRACT

In this paper, a problem of the H^∞ robust self-tuning control developed by Grimble is stated. Such a control cannot assign all colsed-loop poles in expected region. To solve this problem, a method of the H^∞ robust self-tuning control with expected closedloop poles region is introduced, and the frequency-domain analysis of this improved H^∞ robust control is presented. An example is given for illustration.

Key words: H^∞ optimization theory, robust self-tuning control, expected poles region, frequency-domain analysis.

张汉全　1938 年生于广西．1961 年西安交通大学本科毕业，1981 年西安交通大学研究生毕业．1987—1988 年在美国 The University of Michigan 访问进修．现任西南交通大学自控教研室教授、副主任．当前研究领域：系统辨识，自适应控制，随机离散系统的 H^∞ 最优控制．