第21卷 第2期 自动化学报 Vol.21, No. 2
1995年3月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 1995

离散时间系统的变结构控制[1)]

高为炳

(北京航空航天大学七研 100083)

摘　　要

研究离散时间系统的变结构控制问题. 首先定义准滑动模态,给出详细的物理解释. 然后讨论已有的到达条件,给出新的更一般的条件,即离散趋近律. 对新定义的准滑动模态,解决了其稳定性并给出了切换函数. 利用趋近律方法,给出了变结构控制的一般的设计方法,它既适用于单输入系统,也适用于多输入系统.

关键词: 变结构控制,滑动模态控制,离散时间系统,准滑动模态.

1 前言

变结构控制是50年代在前苏联发展起来的[1-3]. 由于人们认识到变结构系统中的滑动模态具有不变性,即它和系统的摄动性和外干扰无关,这种理想的鲁棒性引起了控制界的极大关注,吸引着国内外学者针对不同的动力学系统,不同的控制任务展开了对变结构控制的研究. 不仅建立起较完整的理论体系,而且在机器人、电机、电网、航空航天、化工等工程领域的应用研究也取得了丰硕成果[4,5].

本文将仅研究线性离散系统的变结构控制. 文[6]研究了单输入离散系统,提出了准滑动模态的概念,并给出了到达条件

$$\lim_{s(k)\to 0^+}\Delta s(k)\leqslant 0,\quad \lim_{s(k)\to 0^-}\Delta s(k)\geqslant 0,\tag{1}$$

其中 $s(k)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k)$ 是切换函数, $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{c}$ 的转置. $\Delta s(k)=s(k+1)-s(k)$. 这个到达条件并没有反映准滑动模态的现象,也不能保证有限时间到达. 文[7]认为,把 $\dot{s}_i s_i<0$ 这种连续时间系统的到达条件推广到离散时间系统为

$$[s(k+1)-s(k)]s(k)<0\tag{2}$$

并不充分. 它提出了比较苛刻的条件,即

$$|s(k+1)|<|s(k)|,\tag{3}$$

或等价形式

$$[s(k+1)-s(k)]\mathrm{sgn}s(k)<0,\ [s(k+1)+s(k)]\mathrm{sgn}s(k)>0.\tag{4}$$

这种形式上复杂的充分条件，使得求解变结构控制十分困难，求得的控制形式也相当复

---

1) 本文得到国家自然科学基金资助.
本文于1992年7月13日收到

杂,而且甚至求不出来. 文 [8] 对标量输入离散系统提出了新的到达条件

$$v(k+1)-v(k)<0, \tag{5}$$

其中 v 是李亚普诺夫函数: $v=\frac{1}{2}s^2$, 但是所给出的变结构控制却比较复杂, 难于推广到多输入情况.

所有以往的研究都有以下不足: (a) 对准滑动模态没有建立数学模型. (b) 没有研究准滑动模态的稳定性; (c) 有些到达条件过于严格,要求的太多而实际上不必要, 这就导致了求控制的困难,得到的控制过于复杂; (d) 没有给出简单的也适合于多输入离散系统变结构控制的设计方法.

本文对上述问题加以探讨,并给出了较系统、完善、简单的结果,形成了一种通用的设计方法. 此方法也适用于研究非线性离散系统,以及其它和连续系统对应的问题.

研究离散时间系统

$$\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)+B\boldsymbol{u}(k), \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n,\boldsymbol{u}\in R^m$, (A,B) 可控. 对系统 (6) 建立变结构控制

$$\boldsymbol{u}=\begin{cases}\boldsymbol{u}^+(x), & \text{当 } s(\boldsymbol{x})>0,\\ \boldsymbol{u}^-(x), & \text{当 } s(\boldsymbol{x})<0.\end{cases}$$

其中 $s(\boldsymbol{x})$ 是 m 维切换函数.

2 准滑动模态

为了几何形象清楚,先考虑 $m=1$ 的情况. 从任意状态出发的运动,可能于某时刻到达切换面

$$S:\ s(\boldsymbol{x})=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k)=0. \tag{7}$$

可证明在等效控制下,运动将在切换面上进行,即

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k+1)=0,\ i=1,2,\cdots.$$

事实上,所谓等效控制正是在这个条件下建立的. 设运动位于切换面上,有

$$s(k+1)=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k+1)=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}(k)+\mathbf{c}^{\mathrm{T}}b\boldsymbol{u}(k)=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k),\ i=1,2,\cdots.$$

从此可解出等效控制

$$\boldsymbol{u}_e(k)=-(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}b)^{-1}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(A-I)\boldsymbol{x}(k). \tag{8}$$

这时运动方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=[A-b(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}b)^{-1}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(A-I)]\boldsymbol{x}(k), \tag{9}$$

上式两边同乘以 $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}$, 得

$$s(k+1)=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k+1)=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}A-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}b(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}b)^{-1}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(A-I)\boldsymbol{x}(k)=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k)=s(k),$$

这说明若 $\boldsymbol{x}(k)$ 位于切换面上,则 $\boldsymbol{x}(k+1)$ 也然.

但由任意的初始状态出发的运动, 一般不会恰好落到切换面上. 在到达条件的约束下, 可确信存在 k, 当 $\boldsymbol{x}(k)$ 到达 $s(\boldsymbol{x})=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 的 $s(\boldsymbol{x})>0$ 的一侧的近旁时, $\boldsymbol{x}(k+1)$ 将穿越 $s(\boldsymbol{x})=0$ 的 $s(\boldsymbol{x})<0$ 的一侧的近旁. 其后总是不断穿越切换面,成抖动的运动过程[6].

定义 2.1 在到达条件制约下,离散系统的运动首先趋近切换面,进入切换面的一个邻域后,或者不断地穿越切换面呈抖动的运动,或者转换成切换面上的运动,这两类运动的总体称为离散变结构控制的准滑动模态.在切换面上的运动,称之为理想准滑动模态,而另一类称之为非理想准滑动模态.

将准滑动模态分为理想与非理想两类,不单是因为其性质不同,尤其重要的是,它们的运动是由完全不同的差分方程所描述的,研究它们的稳定性也必须分别一一研究.

理想准滑动模态的运动是由(9)式所决定的,即(9)式是理想准滑动模态的运动方程.建立系统(6)的变结构控制

$$\boldsymbol{u}=\begin{cases}\boldsymbol{u}^{+}(\boldsymbol{x}(k)), & \text{当 } s(\boldsymbol{x}(k))>0,\\ \boldsymbol{u}^{-}(\boldsymbol{x}(k)), & \text{当 } s(\boldsymbol{x}(k))<0.\end{cases}$$

在变结构控制作用下,系统的运动方程为

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\begin{cases}A\boldsymbol{x}(k)+b\boldsymbol{u}^{+}(\boldsymbol{x}(k)), & \text{当 } s(\boldsymbol{x}(k))>0,\\ A\boldsymbol{x}(k)+b\boldsymbol{u}^{-}(\boldsymbol{x}(k)), & \text{当 } s(\boldsymbol{x}(k))<0.\end{cases} \tag{10}$$

这个方程在切换面 $s(\boldsymbol{x}(k))=0$ 上没有定义,而仅在 $s(\boldsymbol{x}(k))>0$ 及 $s(\boldsymbol{x}(k))<0$ 两个半空间内有定义,这并不妨碍对非理想准滑动模态的研究.因为本文的研究恰恰已排除了理想准滑动模态: $s(\boldsymbol{x}(k))=0$.

下面将证实,准滑动模态是一族离散时间运动,发生在切换面的一个邻域内,这个邻域可表为

$$S^{\Delta}=\{x \mid s(\boldsymbol{x}(k))=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k)| <\Delta\},$$

即两个与 S 平行的超平面的内部的带域,这两个超平面为

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k)=+\Delta,\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k)=-\Delta,$$

参数 Δ 可以通过系统的参数表达出来.以后将给出这个关系式.

3 到达条件

在引言中已提到关于到达条件的形式及对它们的评述.实际上到达条件包含两个要求: (a) 趋近切换面;(b) 有限时间到达.这样连续系统及其在离散时间系统的对应形式

$$\begin{aligned}&\dot{s}<0,\ \text{当 } s>0,\ \rightarrow s(k+1)-s(k)<0,\ \text{当 } s(k)>0,\\ &\dot{s}>0,\ \text{当 } s<0,\ \rightarrow s(k+1)-s(k)>0,\ \text{当 } s(k)<0,\end{aligned} \tag{11}$$

都不充分,因为它们不能排除渐近稳定,从而不能保证有限时间到达. 如连续情况下,$s(t)=\mathrm{e}^{-t}\mathrm{sgn}s$ 虽满足到达条件,但它只是随 $t\rightarrow\infty$ 趋近切换面 $s=0$.对离散情况,若 $s(k+1)=as(k)$, $0<a<1$,则有 $k\rightarrow\infty$ 时, $s(k)\rightarrow 0$.所以严格地说,“<0”应为“$<-\gamma$”; “>0” 应为 “$>+\gamma$”,这里 γ 为某一正数. 同样情况也发生于李亚普诺夫型到达条件

$$\dot{v}<0,\ \rightarrow v(k+1)-v(k)<0, \tag{12}$$

其中 $v=\dfrac{1}{2}s^{2}$.

另外,到达条件有不等式和等式两种,变结构控制也呈相应的不等式和等式. 以等式出现的到达条件有趋近律

$$\dot{s} = -\varepsilon \operatorname{sgn} s - \delta s \tag{13}$$

及其他几种类似的形式[5,9]. 趋近律方法有一系列的优点[10]. (13) 式对应的离散形式为

$$s(k+1) - s(k) = -T\varepsilon \operatorname{sgn} s(k) - T\delta s(k), \tag{14}$$

其中 T, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ 分别表示采样周期、到达速度、趋近速度指数. 这些常数都是待选的,以下将给出它们应满足的一些条件.

趋近律(14)可改写为

$$s(k+1) = -(T\delta - 1)s(k) - \varepsilon T \operatorname{sgn} s(k). \tag{15}$$

这里要求

$$T\delta < 1, \tag{16}$$

以保证任一运动首先趋近于切换面,然后转为准滑动模态,趋近过程中不穿越切换面.

现在可以求出切换带的厚度. 设 $s(k) > 0$, 但非常靠近切换面,不妨设 $s(k) = 0^+$, 于是有 $s(k+1) = -\varepsilon T$ 就是说, 所有由 $s(\boldsymbol{x}) > 0$ 穿越切换面 $s(\boldsymbol{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$ 后, 应落在两个平行超平面 $s(\boldsymbol{x}) = -T\varepsilon$, $s(\boldsymbol{x}) = 0$ 之间. 同样,运动从 $s(\boldsymbol{x}) < 0$ 穿越切换面 $s(\boldsymbol{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$ 之后落在两个平行超平面 $s(\boldsymbol{x}) = 0$, $s(\boldsymbol{x}) = T\varepsilon$ 之间. 总之,得到准滑动模态区,即切换带

$$S^{\Delta} = \{x \mid s(\boldsymbol{x}) > -\Delta,\ s(\boldsymbol{x}) < \Delta\}, \tag{17}$$

其中带的厚度为 $2\Delta = 2T\varepsilon$.

至此, 利用趋近律 (15) 得到以下结论: (a) 趋近律 (15) 保证单调趋近的条件是 (16) 式; (b) 准滑动模态位于切换带内, 带厚为 $\Delta = T\varepsilon$. 这两个条件的物理含义是直观的. 如当 $T\delta$ 大时, 每一步都可能从切换面的一边如 $s(\boldsymbol{x}) < 0$ 穿越切换面到达 $s(\boldsymbol{x}) > 0$. 又如, T 越小,到达切换面时的趋近速度

$$\left|\frac{s(k+1) - s(k)}{T}\right|_{s(k) \doteq 0} = |-\varepsilon \operatorname{sgn} s(k)| = \varepsilon$$

越小,切换带的厚度就越小.

4 变结构控制

利用"趋近律方法"[9,10]求解系统(6)单输入情况下的变结构控制. 由于

$$s(k+1) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k+1) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}(k) + \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}u(k),$$

代入趋近律(15)得

$$-(T\delta - 1)s(k) - \varepsilon T \operatorname{sgn} s(k) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}(k) + \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}u(k),$$

假设变结构可控性条件 $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}b \neq 0$ 成立,从上式就可求出变结构控制

$$u = u^{\pm}(k) = -(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}b)^{-1}[-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}(k) + (T\delta - 1)s(k) + \varepsilon T \operatorname{sgn} s(k)]. \tag{18}$$

显然,用"趋近律方法"求变结构控制, 可以最简单地得到变结构控制,控制的形式也是最简单的.

5 准滑动模态的稳定性

设计变结构控制的目标是使系统在变结构控制下是全局渐近稳定的，即由任意初始状态出发的运动均趋向原点的一个邻域。按趋近律方法设计的变结构控制已保证了从任意状态出发的运动单调地趋向切换面，且于有限步内到达切换面带，转换成准滑动模态。至此还需证明准滑动模态是稳定的，并最终确定出切换函数，即向量 $\mathbf{c}$，这里，$s(\boldsymbol{x})=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

前面已定义了准滑动模态有两种类型，分别由不同的运动方程描述。

1) 理想准滑动模态的稳定性问题

为了研究理想准滑动模态的稳定性，并同时求出切换函数 $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 中的向量 $\mathbf{c}$，假设系统已变换成简约型

$$\boldsymbol{x}_1(k+1)=A_{11}\boldsymbol{x}_1(k)+A_{12}x_2(k), \tag{19}$$

$$x_2(k+1)=A_{21}\boldsymbol{x}_1(k)+A_{22}x_2(k)+b_2\boldsymbol{u}(k), \tag{20}$$

其中 b_2 为正常数，$\boldsymbol{x}_1$ 为 $(n-1)$ 维向量，x_2 为标量。设切换函数为

$$s(k)=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k)=\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1(k)+x_2(k).$$

不失一般性取了 $\mathbf{c}^{\mathrm{T}}=[\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}},1]$. 式(19)即为滑动模态运动方程。由于滑动模态位于切换面上，有

$$\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1(k)+x_2(k)=0. \tag{21}$$

将(20)式中的 $x_2(k)$ 代入(19)式，得

$$\boldsymbol{x}_1(k+1)=(A_{11}-A_{12}\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}_1(k). \tag{22}$$

已知若 (A,b) 可控，则 (A_{11}, A_{12}) 也可控[4,10]，因此可以选择 $\mathbf{c}_1$ 使得(22)式渐近稳定。这样就确定了切换函数 $s(\boldsymbol{x})=[\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}},1]\boldsymbol{x}=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，它保证理想准滑动模态渐近稳定。

2) 非理想准滑动模态的稳定性问题

利用(20)式得

$$\begin{aligned}s(k+1)&=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(k+1)=\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1(k+1)+x_2(k+1)\\&=\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}(A_{11}\boldsymbol{x}_1(k)+A_{12}x_2(k))+A_{21}\boldsymbol{x}_1(k)+A_{22}x_2(k)+b_2\boldsymbol{u}(k).\end{aligned}$$

令其等于趋近律(15)，可得出变结构控制

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(k)=-b_2^{-1}[&\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}(A_{11}\boldsymbol{x}_1(k)+A_{12}x_2(k))+A_{21}\boldsymbol{x}_1(k)+A_{22}x_2(k)\\&+(T\delta-1)s(k)+T\,\varepsilon\mathrm{sgn}\,s(k)],\end{aligned} \tag{23}$$

以及描述变结构控制系统中所有运动的运动方程。当然理想准滑动模态除外，因为当 $s(k)\equiv 0$ 时方程(24)无定义。变结构控制系统的方程为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}_1(k+1)=A_{11}\boldsymbol{x}_1(k)+A_{12}x_2(k),\\&x_2(k+1)=A_{21}\boldsymbol{x}_1(k)+A_{22}x_2(k)-[\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}(A_{11}\boldsymbol{x}_1(k)+A_{12}x_2(k))\\&\qquad+A_{21}\boldsymbol{x}_1(k)+A_{22}x_2(k)+(T\delta-1)s(k)+T\varepsilon\mathrm{sgn}\,s(k)],\end{aligned} \tag{24}$$

其中 $s(k)=\mathbf{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1(k)+x_2(k)$ 但不等于零。

现在证明准滑动模态是“渐近稳定”的。显然，不能期待 $x=0$ 是渐近稳定的，象连续系统那样，只能期待原点的某个邻域是渐近稳定的。

系统(24)是一非线性系统，其稳定性研究无疑是困难的，而且也只有李亚普诺夫方法最有可能。为此先做状态变换

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1(k) \\ s(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \boldsymbol{c}_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}, \tag{25}$$

其中 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}},\ c_2^{\mathrm{T}}]$，$c_2 = 1$。

由(25)式可得到简单的代数关系而不必进行阵运算。求出 $x_2(k)$ 后代入(24)式得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1(k+1) &= (A_{11} - A_{12}\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}_1(k) + A_{12}s(k), \\ s(k+1) &= \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1(k+1) + x_2(k+1) \\ &= \boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}(A_{11}\boldsymbol{x}_1(k) + A_{12}x_2(k)) + A_{21}\boldsymbol{x}_1(k) + A_{22}x_2(k) - [\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}(A_{11}\boldsymbol{x}_1(k) \\ &\quad + A_{12}x_2(k)) + A_{21}\boldsymbol{x}_1(k) + A_{22}x_2(k) + (T\delta - 1)s(k) + T\varepsilon \operatorname{sgn} s(k)] \\ &= -(T\delta - 1)s(k) - T\varepsilon \operatorname{sgn} s(k). \end{aligned}$$

引入记号 $A_0 = A_{11} - A_{12}\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}$，$b_0 = A_{12}$，可将上式写成

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1(k+1) &= A_0\boldsymbol{x}_1(k) + b_0(k), \\ s(k+1) &= s(k) - T\delta s(k) - T\varepsilon \operatorname{sgn} s(k). \end{aligned} \tag{26}$$

构造李亚普诺夫函数

$$v(k) = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(k)P\boldsymbol{x}_1(k) + s^2(k),$$

并求 $v(k)$ 沿式(26)的变化差分，得

$$\begin{aligned} v(k+1) - v(k) &= \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(k+1)P\boldsymbol{x}_1(k+1) - \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(k)P\boldsymbol{x}_1(k) + s^2(k+1) - s^2(k) \\ &= [b_0^{\mathrm{T}}s(k) + \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(k)A_0^{\mathrm{T}}]P[A_0\boldsymbol{x}_1(k) + b_0s(k)] - \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(k)P\boldsymbol{x}_1(k) \\ &\quad + (s(k) - T\varepsilon \operatorname{sgn} s(k) - T\delta s(k))^2 - s^2(k) \\ &= b_0^{\mathrm{T}}Pb_0s^2(k) + \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(k)(A_0^{\mathrm{T}}PA_0 - P)\boldsymbol{x}_1(k) + 2b_0^{\mathrm{T}}s(k)PA_0\boldsymbol{x}_1(k) \\ &\quad - 2T\delta s^2(k) - 2T\delta s(k)\operatorname{sgn} s(k) \\ &\quad + 2T^2\delta\varepsilon\, s(k)\operatorname{sgn} s(k) + T^2\varepsilon^2. \end{aligned} \tag{27}$$

引入记号

$$A_0^{\mathrm{T}}PA_0 - P = -Q. \tag{28}$$

由于 A_0 是 Schur 稳定阵，则任取一正定阵 Q，熟知，李亚普诺夫矩阵方程(28)存在唯一的正定阵解 P，因而 $\bar{v}(k) = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(k)P\boldsymbol{x}_1(k)$ 是正定的。式(27)可整理为

$$\begin{aligned} v(k+1) - v(k) &= -\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(k)Q\boldsymbol{x}_1(k) + 2s(k)b_0^{\mathrm{T}}PA_0\boldsymbol{x}_1(k) + s^2(k)b_0^{\mathrm{T}}Pb_0 - 2T\delta s^2(k) \\ &\quad - 2T\delta s(k)\operatorname{sgn} s(k) + 2T^2\delta\varepsilon\, s(k)\operatorname{sgn} s(k) + T^2\varepsilon^2 \\ &= -\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(k)Q\boldsymbol{x}_1(k) + s(k)[2b_0^{\mathrm{T}}PA_0\boldsymbol{x}_1(k) - 2T\delta \operatorname{sgn} s(k) \\ &\quad + T^2\delta\varepsilon \operatorname{sgn} s(k)] + s^2(k)[b_0^{\mathrm{T}}Pb_0 - 2T\delta] + T^2\varepsilon^2, \end{aligned}$$

上式右端第一项为负，第二项有因子 $s(k)$，第三项有因子 $s^2(k)$，第四项为正数。

给定一个有限区域 N_0: $\bar{v} = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}_1 \leqslant l$，其中 l 为任给的正数，则在 N_0 之外部有 $\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{x}_1 \geqslant m$，其中 m 是一个下确界：$\inf\limits_{x \in N_0} \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{x}_1 = m$，由于 Q 正定，这个下确界存在。在切换带 S^{Δ} 内部和 N_0 外部

$$S^{\Delta} = \{\boldsymbol{x} \mid |s(x) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}x| \leqslant \Delta\},\ \bar{v} > l$$

来考查 $\Delta v = v(k+1) - v(k)$ 的符号。当 $s(k)$ 甚小时，即切换带原 2Δ 甚小时，总可以选 l 足够大，T 足够小，使得 $\Delta v(k) = v(k+1) - v(k) < 0$。这表明，系统的任意运

动均将进入切换带而不会再出来，且一旦进入切换带它将从 v 等于常数的曲面的外部进入其内部，这就保证了所有准滑动模态（以及所有运动）均将趋向原点的一个邻域 D_0: $D_0 = N_0 \cap S^{\Delta}$，它是邻域 N_0 与切换带之交。

邻域 D_0 的大小是确定的,其大小也可以通过调节设计中的参数的取值来改变。

6 多输入离散系统的变结构控制

对于多输入系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),$$

其中 $\boldsymbol{u} \in R^m$，$m > 1$，切换函数为 $\boldsymbol{s}(x) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$，此时 $\boldsymbol{s}$ 也是 m 维向量。 重复上面对单输入的全部推导与讨论,得到多输入系统的变结构控制。当然,这时必须采用“趋近律”方法。这样的结果是过去的研究中所未解决的，这里也可说明“趋近律方法”的普遍性与优越性。

因为解决离散时间系统的变结构控制,首先必须建立一些新概念,澄清一些误解与失真，所以本文主要推导了单输入离散时间系统的变结构控制。多输入变结构控制的详细过程,请参看文[10]。

7 结论

离散时间系统变结构控制,和连续时间情况相比,有一些新的特点。本文对离散时间系统的变结构控制做了系统的研究。在变结构控制的几个基本概念上的新结果有：对准滑动模态给出了严格的定义及数学模型,对到达条件进行了评述并给出新的条件,研究并证明了准滑动模态的稳定性。此外,建立了设计变结构控制的一般方法,即离散趋近律方法,解决了多输入离散时间系统的变结构控制。

参 考 文 献

[1] С В Емелъянов. Системы автоматического управления с переменной структ урой. М.: Наука, 1976.

[2] Уткин В И Скольэящие режимы и их применения в системах с переменной структ урой. М.: Наука, 1974.

[3] Itkis U. Control systems of variable structure. Jeruslam, Keter, 1976.

[4] Utkin V I. Discontinuous control systems: state of the art in theory and applications. 10th IFAC, Munich, 1987.

[5] 高为炳,变结构控制理论基础. 中国科学技术出版社，1990.

[6] Ч Мидосавдевич, Общие условиясущест овавиия кваэискольэящего режима относитедьно гиперплоскост и переключения в дискретных СПС, АиТ, 1985, (3).

[7] Surpturk S Z, Istefanopulos Y, Kaynak O, On the stability of discrete-time sliding mode control systems. *IEEE Trans*. 1987, **AC-32** (10).

[8] Furuta K sliding mode control of discrete systems. *Sys. Contr. Lett*. 1990, **14**: 145—152.

[9] 高为炳,程勉. 变结构控制的品质控制. 控制与决策，1989，4(4).

[10] 高为炳. 变结构控制理论与设计方法. 科学出版社. 待出版.

VARIABLE STRUCTURE CONTROL OF DISCRETE-T ME SYSTEMS

GAO WEIBING

(The 7th Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics 100083)

ABSTRACT

The variable structure control (VSC) of discrete time systems is studied in this paper. First of all, the quasi-sliding mode is defined and a detailed physical explanation to it is given. Previously established versions of reaching conditions are briefly reviewed and a new and more general version is given: the discrete reaching law. For this new definition of quasi-sliding mode its stability problem is proved meanwhile the linear switching function is determined.

The VSC is obtained straightforward by the reaching law method, which is a general design method applicable both to single input and multiple input cases in a simple way.

Key words: Variable structure control, sliding mode control, discrete time systems, quasi-sliding mode, reaching law method.

高为炳 照片、简介见本刊第17卷第6期.