第21卷 第2期 自 动 化 学 报 Vol. 21, No. 2
1995年3月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 1995

短 文

一类时滞线性系统的变结构控制[1)]

郑 锋 程 勉 高为炳

(北京航空航天大学七研 100083)

摘 要

研究一类状态变量具有时滞的线性系统的变结构控制问题，指出传统的切换函数在时滞系统中应当是一个切换泛函，给出了在系统谱能控条件下具有稳定滑动模态的切换泛函的设计方法．并利用趋近律设计了相应的变结构控制器．得到了一般时滞系统能够变换为所需要的时滞系统的条件．

关键词: 时滞系统,变结构控制,切换泛函,滑动模态.

1 引言

文[1,2]研究了时滞系统的变结构控制问题,文[2]给出了滑动模态可逼近性条件,并利用趋近律[3]设计了变结构控制器．但文[1,2]均未给出切换函数的综合方法．本文试图初步解决这一问题．这里先研究一类较为简单的时滞系统的变结构控制问题，即只有状态变量具有时滞的线性系统的变结构控制问题．

2 一类时滞系统的变结构控制

考虑如下系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A^0\boldsymbol{x}(t) + A^1\boldsymbol{x}(t-h) + \boldsymbol{b}u(t), \tag{2.1}$$

这里 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 为系统的状态变量在 t 时刻的值，$u(t)\in R$ 为控制，$A^0, A^1, \boldsymbol{b}$ 分别为 $n\times n, n\times n, n\times 1$ 定常矩阵，$h>0$ 表示系统的时延．

首先介绍 Manitius 与 Olbrot[4] 关于系统(2.1)的有限谱配置方面的结果．

一般说来，系统(2.1)的谱 $\sigma(A_\lambda)=\{\lambda\in C;\det\Delta(\lambda)=0\}$ 是一个无限集[5]，这里 $\Delta(\lambda)=\lambda I-A_\lambda$，$A_\lambda=A^0+A^1e^{-\lambda h}$．但在一定条件下,采用如下形式的反馈:

$$u(t)=\int_{-h}^{0}[\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}^T(\theta)]\boldsymbol{x}(t+\theta), \tag{2.2}$$

1) 本文受国家自然科学基金及航空科学基金资助.
本文于1992年4月17日收到

则可使闭环系统的谱 $\sigma_c(A_\lambda,b,\eta)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\det\Delta_c(\lambda)=0\}$ 为有限集，且可任意配置，其中

$$\Delta_c(\lambda)=\lambda I-A_\lambda-bk(\lambda),$$
$$k(\lambda)=\int_{-H}^{0}[\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)]\mathrm{e}^{\lambda\theta}, \tag{2.3}$$

$\boldsymbol{\eta}(\theta)$ 为 $[-H,0]$ 上的有界变差函数，$\boldsymbol{\eta}(\theta)\in R^{n\times 1}$，$H\geqslant h>0$。

下面介绍反馈律(2.2)或 $k(\lambda)$ 的求法。将 $\det\Delta(\lambda)$ 表为

$$\det\Delta(\lambda)=\lambda^n-\sum_{i=1}^{n}\rho_i(\mathrm{e}^{-\lambda h})\lambda^{n-i},$$

其中 $\rho_i(\mathrm{e}^{-\lambda h})$ 为关于 $\mathrm{e}^{-\lambda h}$ 的 i 次多项式。设所期望的闭环系统(2.1)，(2.2)的特征多项式为

$$\phi(\lambda)=\lambda^n+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda^{n-i},$$

其中 α_i 为实数。若存在可以表为(2.3)式的 n 个 $n\times 1$ 向量值函数 $k_j(\lambda)$，$j=0,1,\cdots,n-1$，使得

$$k_j^{\mathrm{T}}(\lambda)\cdot adj\Delta(\lambda)\cdot b=\lambda^j,\ j=0,1,\cdots,n-1, \tag{2.4}$$

则令

$$k(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}[\alpha_i+\rho_i(\mathrm{e}^{-\lambda h})]k_{n-i}(\lambda), \tag{2.5}$$

即可使得 $\det\Delta_c(\lambda)=\phi(\lambda)$，且 $k(\lambda)$ 可表为(2.3)式的形式。把上述结果总结为下述引理。

引理 2.1[4]. 若方程(2.4)存在形为(2.3)式的解，则反馈律(2.2)可将闭环系统(2.1)，(2.2)的谱配置为复平面一基为 n 的有限集。

由文[4]，$adj\Delta(\lambda)\cdot b$ 可表为

$$adj\Delta(\lambda)\cdot b=P(\lambda)\cdot v(\mathrm{e}^{-\lambda h})=M(\mathrm{e}^{-\lambda h})v(\lambda), \tag{2.6}$$

这里 $P(\lambda)=[P_{n-1}(\lambda),\cdots,P_1(\lambda),\ P_0(\lambda)]$，$M(\mu)=[M_{n-1}(\mu),\cdots,M_1(\mu),M_0(\mu)]$，$P_i(\lambda),M_i(\mu)$ 分别为关于 λ,μ 的次数至多为 i 的 $n\times 1$ 多项式，$v(\mu)=[1,\mu,\cdots,\mu^{n-1}]^{\mathrm{T}}$。

引理 2.2[6]. 若 $\det M(\mu)=\mathrm{const}\neq 0$，则方程(2.4)必定有解，且解为

$$[k_0(\lambda),k_1(\lambda),\cdots,k_{n-1}(\lambda)]=[M^{-1}(\mathrm{e}^{-\lambda h})]^{\mathrm{T}}.$$

引理 2.3[4,7]. 若系统(2.1)谱能控，即 $P(\lambda)v(\mathrm{e}^{-\lambda h})\neq 0$，$\forall\lambda\in\mathbf{C}$，则方程(2.4)有解等价于下述方程有解：

$$P^{\mathrm{T}}(\lambda)k_j(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^j\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{j,n-2}(\lambda)\\\vdots\\p_{j,0}(\lambda)\\0\end{bmatrix}\mathrm{e}^{-\lambda h}-\begin{bmatrix}0\\p_{j,n-2}(\lambda)\\\vdots\\p_{j,0}(\lambda)\end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

这里 $p_{j,i}(\lambda)$ 为关于 λ 的次数至多为 i 的多项式，系数待定。

下面利用上述结果来设计一类状态变量具有时滞的线性系统的变结构控制器。

考虑系统(2.1)，若存在状态变换 T

$$y = Tx = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

其中 $y_1 \in R^{n-1}$, $y_2 \in R$, 使得

$$Tb = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}^1 = TA^1T^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^1 & 0 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

则(2.1)式化为

$$\dot{y}_1(t) = A_{11}^0 y_1(t) + A_{11}^1 y_1(t-h) + A_{12}^0 y_2(t), \tag{2.10a}$$

$$\dot{y}_2(t) = A_{21}^0 y_1(t) + A_{21}^1 y_1(t-h) + A_{22}^0 y_2(t) + A_{22}^1 y_2(t-h) + u(t), \tag{2.10b}$$

其中

$$\bar{A}^0 = TA^0T^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^0 & A_{12}^0 \\ A_{21}^0 & A_{22}^0 \end{bmatrix}.$$

对子系统 (2.10a)，若下述方程有解：

$$\bar{k}_j^{\mathrm{T}}(\lambda) \cdot adj\bar{\Delta}(\lambda) \cdot A_{12}^0 = \lambda^j, j = 0,1,\cdots,n-2, \tag{2.11}$$

其中 $\bar{\Delta}(\lambda) = \lambda I_{n-1} - A_{11}^0 - A_{11}^1 e^{-\lambda h}$, I_{n-1} 表示 $n-1$ 阶单位阵,则可构造反馈

$$y_2(t) = \int_{-H}^{0} [\mathrm{d}\bar{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)] y_1(t+\theta), \tag{2.12}$$

使得闭环子系统 (2.10a),(2.12) 渐近稳定,并具有所期望的有限谱,这里 $\bar{\eta}(\theta) \in R^{(n-1)\times 1}$ 为 $[-H,0]$ 上的有界变差函数,它由下述二式决定:

$$\bar{k}(\lambda) = \int_{-H}^{0} \mathrm{e}^{-\lambda h} \mathrm{d}\bar{\eta}(\theta), \tag{2.13}$$

$$\bar{k}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} [\bar{\alpha}_i + \bar{\rho}_i(\mathrm{e}^{-\lambda h})] \bar{k}_{n-1-i}(\lambda), \tag{2.14}$$

$\bar{\alpha}_i, \bar{\rho}_i$ 分别由闭环子系统 (2.10a)、(2.12) 及开环子系统 (2.10a) 的特征多项式确定.

于是对系统(2.10),可以构造切换函数

$$s = y_2(t) - \int_{-H}^{0} [\mathrm{d}\bar{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)] y_1(t+\theta), \tag{2.15}$$

则由此得到的滑动模态是渐近稳定的.

注 2.1. 将(2.8)式代入(2.9)式可得

$$s = T_2 x(t) - \int_{-H}^{0} [\mathrm{d}\bar{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)] T_1 x(t+\theta). \tag{2.16}$$

由(2.16)式可见,系统(2.1)的切换流形是 $C([-H,0],R^n)$ 中的子流形,因而切换函数实质上是一个切换泛函,这是时滞变结构系统的本质特点.

注意到 $T_2 b = 0$, $T_1 b = 1$, 由(2.16),(2.1)式可得

$$\begin{aligned} \dot{s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= T_2[A^0 x(t) + A^1 x(t-h)] \\ &\quad - \int_{-H}^{0} [\mathrm{d}\bar{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)] T_1 [A^0 x(t+\theta) + A^1 x(t-h+\theta)] + u(t), \end{aligned} \tag{2.17}$$

取等速趋近律[3],可得变结构控制器

$$u(t)=\begin{cases}-T_2[A^0x(t)+A^1x(t-h)]+\int_{-H}^{0}[\mathrm{d}\bar{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)]T_1[A^0x(t+\theta)\\ \quad +A^1x(t-h+\theta)]-\varepsilon,\ s>0,\\ -T_2[A^0x(t)+A^1x(t-h)]+\int_{-H}^{0}[\mathrm{d}\bar{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)]T_1[A^0x(t+\theta)\\ \quad +A^1x(t-h+\theta)]+\varepsilon,\quad s<0,\end{cases}\tag{2.18}$$

其中常数 $\varepsilon>0$。

在(2.17)式中令 $\dot{s}=0$，可得等价控制

$$u_{eq}(t)=-T_2[A^0x(t)+A^1x(t-h)]+\int_{-H}^{0}[\mathrm{d}\bar{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)]T_1[A^0x(t+\theta)\\ +A^1x(t-h+\theta)],\tag{2.19}$$

代入(2.1)式得滑动模态的运动方程为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=[I-bT_2]A^0x(t)+[I-bT_2]A^1x(t-h)\\ \qquad +b\int_{-H}^{0}[\mathrm{d}\bar{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)]T_1[A^0x(t+\theta)+A^1x(t-h+\theta)],\\ T_2x(t)-\int_{-H}^{0}[\mathrm{d}\bar{\eta}^{\mathrm{T}}(\theta)]T_1x(t+\theta)=0.\end{cases}\tag{2.20}$$

定理 2.1. 对系统(2.1)，若满足条件(2.9)的变换 T 存在，方程(2.11)有解，且多项式 $\phi(\lambda)=\lambda^{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1}\bar{\alpha}_i\lambda^{n-1-i}$ 为稳定多项式，则采用变结构控制器(2.18)式可使系统(2.1)渐近稳定，特别地，其滑动模态(2.20)是具有有限谱的渐近稳定系统.

注 2.2. 闭环系统(2.1),(2.18)的状态空间是 $C([-h-H,0],R^n)$，切换流形是其中的一个子流形. 当系统未到达切换流形时，系统的运动是定义好的，即任给 $\varphi\in C([-h,-H,0],R^n)$，方程(2.1),(2.18)有满足初始条件 $x(\theta)=\varphi(\theta),-H-h\leqslant\theta\leqslant 0$ 的唯一解. 设系统于 t_1 时刻到达切换流形，当 $t>t_1$ 时，则系统运动的微分方程按照(2.20)式来定义，而以系统(2.1),(2.18)在 $[t_1-H-h,t_1]$ 上的运动作为其初始条件. 由文[5],该系统在 $t\geqslant t_1$ 后的解是存在且唯一的,除去可能在 t_1 时刻不可微外，当 $t>t_1$ 时 $x(t)$ 处处可微. 因此,整个系统在 $t\geqslant 0$ 之后的运动只是在时刻 t_1 不可微,但仍是处处连续的. 这同无时滞变结构系统中的"止点"[8]类似.

在定理 2.1 中,判定方程(2.11)是否有解及解的求法可由引理 2.2 及引理 2.3 解决,而变换 T 的存在性及解法可由下述命题解决.

定理 2.2. 满足(2.9)式的变换 T 存在的充分必要条件是 b 为 A^1 的一个特征向量.

证明. 必要性. 令 $T^{-1}=[q_1,\cdots,q_{n-1},q_n]$，其中 $q_i\in R^{n\times 1},i=1,2,\cdots,n$. 由式(2.9)的第二式不难得到

$$A^1q_n=A_{22}^1q_n,$$

因而 A_{22}^1 为 A^1 的一个特征值，q_n 为 A^1 对应于 A_{22}^1 的一个特征向量. 而由(2.9)的第一式得

$$b=T^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=[q_1,q_2,\cdots,q_n]\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=q_n.$$

因而 $\boldsymbol{b}$ 为 A^1 的对应于特征值 A_{22}^1 的一个特征向量。

充分性。设 $\boldsymbol{b}$ 为 A^1 对应于特征值 λ_b 的一个特征向量，即 $A^1\boldsymbol{b} = \lambda_b \cdot \boldsymbol{b}$，构造矩阵

$$Q = [\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_{n-1}, \boldsymbol{b}],$$

其中 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_{n-1}$ 是任意使得 Q 可逆的列向量，令

$$T = Q^{-1}. \tag{2.21}$$

因 T 可逆，故(2.9)式等价于

$$\begin{cases} \boldsymbol{b} = T^{-1}[0, \cdots, 0, 1]^{\mathrm{T}}, \\ A^1\boldsymbol{b} = A_{22}^1\boldsymbol{b}. \end{cases} \tag{2.22}$$

由上述事实不难推知(2.22)式成立，其中 $A_{22}^1 = \lambda_b$。证毕。

3 设计步骤

状态变量具有时滞的变结构控制系统的设计可分为如下步骤：

1）根据定理 2.2 (式(2.21))求变换 T。

2）根据引理 2.2 或引理 2.3 求解方程(2.11)，并据(2.13)，(2.14)式求 $\xi(\theta)$。

3）根据(2.16)式构造切换泛函。

4）根据(2.18)式设计变结构控制器。

参　考　文　献

[1] Jafarov E.M. Analysis and Synthesis of Multidimensional SVS with delays in Sliding Modes. in Proc. 11th IFAC World Congress, Tallinn, 1990, **6**:46—49.

[2] 胡跃明，周其节，带有滞后影响的控制系统的变结构控制，自动化学报，1991，**17**(5): 587—591.

[3] 高为炳，程勉，变结构控制的品质控制．控制与决策，1989，**4**(4)．1—6.

[4] Manitius A Z and Olbrot A W. Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1979, **24**(4):541—553.

[5] Hale J K. Theory of Functional Differential Equation. Springer-Verlag. New York, 1977.

[6] Morse A. S. Ring Models for Delay-differential Systems. *Automatica*, 1976, **12**: 529—531.

[7] Manitius, A and Triggiani R. Function Space Controllability of Linear Retarded Systems: A Derivation from Abstract Operator Conditions, *SIAMJ* Control and Optimization, 1978,**16**. (4): 599—645,

[8] 高为炳．变结构控制理论基础．中国科技出版社，1990.

VARIABLE STRUCTURE CONTROL FOR A CLASS OF TIME-LAG LINEAR SYSTEMS

ZHENG FENG CHENG MIAN GAO WEIBING
(*The 7th Research Division, Beijing University of Aeronautics and Astronautics* 100083)

ABSTRACT

The variable structure control for a class of linear systems with delays in state variables is studied in this paper. It is shown that switching functional should be used for variable structure control systems with delays occuring in state variables, while it is well known that switching function is usually used for systems in which there is no delays in states or in control. The design method for the switching functional which leads to stable sliding modes is presented if the system is spectrally controllable. The variable structure controller is obtained by the use of asymptotic law. The sufficient and necessary condition for the existence of the transformation which can be used to transform a general time-lag linear system into the class of systems discussed in this paper is given.

Key words: Time-lag systems, variable structure control, switching functional, sliding modes.