



一种多变量连续时间预测控制方法¹⁾

吕剑虹 陈来九

(东南大学动力系 南京 210018)

摘 要

将积分作用自然引入单变量连续时间域预测控制规律,并通过结合多变量频域设计方法——特征轨迹法,将单变量预测控制推广到多变量情况。仿真结果表明,该多变量算法是有效的。

关键词: 多变量系统,预测控制,连续时间域。

1 引言

文[1]在连续时间域内提出了单变量预测控制方法 CGPC,将单变量 CGPC 推广到多变量系统是很自然的设想。

多变量频域法在理论和应用方面都取得了进展。其中,特征轨迹法将多变量系统分解为一组独立的 SISO 特征子系统,然后用单变量设计技术分别对各个特征子系统进行补偿。本文将特征轨迹法和单变量连续时间预测控制方法融合在一起,提出了一种连续时间域内的多变量预测控制方法。

2 多变量系统的连续时间预测控制

2.1 特征分解和特征子系统

设多变量系统的设计模型

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad (1)$$

式中 $Y(s)$ 和 $U(s)$ 分别为多变量对象的 m 维输出和输入。 $G(s)$ 为多变量被控对象的 $m \times m$ 维传递函数矩阵。对于复 s 平面上除分支点以外的所有复频率, $G(s)$ 可表示为^[2]

$$G(s) = W(s)\Lambda(s)V(s), \quad (2)$$

式中 $W(s)$ 为 $G(s)$ 的特征向量函数矩阵, $V(s)$ 为 $W(s)$ 的对偶矩阵, $\Lambda(s)$ 是 $G(s)$ 的特征传递函数矩阵。矩阵 $W(s)$ 和 $V(s)$ 存在如下关系:

$$W(s)V(s) = I. \quad (3)$$

本文于 1992 年 11 月 9 日收到

1) 国家自然科学基金资助项目。

(1)式中,两边同时左乘 $V(s)$ 得

$$\tilde{Y}(s) = \Lambda(s)\tilde{U}(s), \quad (4)$$

式中 $\tilde{Y}(s) = V(s)Y(s)$, $\tilde{U}(s) = V(s)U(s)$. $\tilde{Y}(s)$ 和 $\tilde{U}(s)$ 分别为相应信息量在特征结构下的投影. $\Lambda(s)$ 为对角阵. 因此,式(4)实际上是由 m 个特征子系统的数学模型所组成. 第 i 个特征子系统的数学模型为

$$\tilde{Y}_i(s) = \frac{B_i(s)}{A_i(s)} \tilde{U}_i(s), \quad (5)$$

式中, $\tilde{Y}_i(s)$, $\tilde{U}_i(s)$ 分别为第 i 个特征子系统的输出、输入, $\frac{B_i(s)}{A_i(s)}$ 为第 i 个特征子系统的特征函数. 式(5)为单变量特征子系统的数学描述,可以用单变量的预测控制方法进行设计.

2.2 特征子系统的单变量预测控制

文[1]提出了连续时间域中的广义预测控制规律 CGPC, 由于这种控制规律不具有积分作用,所以在用于工业过程的控制时,往往会引起系统输出的静态偏差. 本节在研究特征子系统的预测控制时将积分作用自然引入控制规律.

根据(5)式及文[3]中对系统干扰的解释,第 i 个特征子系统的设计模型可采用如下形式:

$$A_i(s)\tilde{Y}_i(s) = B_i(s)\tilde{U}_i(s) + \frac{C_i(s)}{s} \tilde{\phi}_i(s), \quad (6)$$

式中 $A_i(s), B_i(s), C_i(s)$ 是 Laplace 算子 s 的多项式, $\tilde{Y}_i(s), \tilde{U}_i(s)$ 和 $\tilde{\phi}_i(s)$ 分别为第 i 个子系统的输出、输入和干扰,在非自适应的情况下, $C_i(s)$ 为第 i 个特征系统的一个设计多项式,并非是系统的一部分^[1],假定 $\deg(C_i(s)) = \deg(A_i(s)) = n_i$.

为了表达简洁,下面的推导将略写表达式中的下标“ i ”. 由(6)式得

$$\tilde{Y}(s) = \frac{B(s)}{A(s)s} s\tilde{U}(s) + \frac{C(s)}{A(s)s} \tilde{\phi}(s), \quad (7)$$

定义 $\tilde{A}(s) = sA(s)$, $\tilde{U}^*(s) = s\tilde{U}(s)$, $\tilde{U}^*(s)$ 称为辅助控制变量 $\tilde{u}^*(t)$ 的 Laplace 变换. 将以上定义式代入方程(7)得

$$\tilde{Y}(s) = \frac{B(s)}{\tilde{A}(s)} \tilde{U}^*(s) + \frac{C(s)}{\tilde{A}(s)} \tilde{\phi}(s). \quad (8)$$

由于上式和文[1]中所假定的模型在形式上是相同的,因此,可采用与文[1]相类似的方法来推导控制规律. 基于方程(8),特征子系统在未来 T 时刻的输出预测 $\tilde{y}^*(t+T)$ 可以表示为^[1]

$$\tilde{y}^*(t+T) = T_{Ny}\tilde{H} \cdot \tilde{u}^* + T_{Ny}\tilde{Y}^0 + \tilde{y}(t), \quad (9)$$

上式中, \tilde{H} 是由多项式 $\tilde{H}_k(s)$ 的系数所组成的 $(Ny+1) \times (Nu+1)$ 维系数矩阵, $\tilde{u}^* = [\tilde{u}^*(t), \tilde{u}_1^*(t), \dots, \tilde{u}_{Nu}^*(t)]^T$, 其中 $\tilde{u}_i^*(t)$ 是辅助控制变量 $\tilde{u}^*(t)$ 对时间的 i 阶导数, Nu 为 $\tilde{u}^*(t)$ 的控制阶次,即当 $k > Nu$ 时,有 $\tilde{u}_k^*(t) = 0$, $T_{Ny} = \left[1, T, \frac{T^2}{2!}, \dots, \frac{T^{Ny}}{Ny!}\right]$, Ny 是预测器的阶次, $\tilde{Y}^0 = [0, \tilde{y}_1^0(t), \dots, \tilde{y}_{Ny}^0(t)]^T$, 其中 $\tilde{y}_k^0(t)$ 是 s 多项式

$\tilde{Y}_k^{\circ}(s)$ 的反拉氏变换. 进一步, $\tilde{Y}_k^{\circ}(s)$ 可通过下列方程决定:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Y}_k^{\circ}(s) &= \frac{\tilde{G}_k(s)}{C(s)} \tilde{U}^*(s) + \frac{\tilde{F}_k(s)}{C(s)} \tilde{Y}(s), \\ \frac{s^k C(s)}{\tilde{A}(s)} &= \tilde{E}_k(s) + \frac{\tilde{F}_k(s)}{\tilde{A}(s)} \\ \frac{\tilde{E}_k(s) B(s)}{C(s)} &= \tilde{H}_k(s) + \frac{\tilde{G}_k(s)}{C(s)}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

由方程(9)可知, 特征子系统在未来时间 T 内的输出预测除与现时刻可估计的信息分量有关外, 仅取决于辅助控制变量 $\tilde{u}^*(t)$ 及其相应的各阶导数 $\tilde{u}_k^*(t)$. 预测控制的目的是通过选择这组辅助控制变量来使特征子系统的输出预测最优地跟踪选定的特征结构下的参考轨迹.

通过类似于文[1]的推导后, 可求得辅助控制变量 $\tilde{u}^*(t)$ 为

$$\tilde{u}^*(t) = \tilde{\mathbf{k}}(\tilde{\mathbf{y}}_r - \tilde{Y}^{\circ}), \quad (11)$$

式中 $\tilde{\mathbf{k}}$ 是由矩阵 $[\tilde{H}^r T_y \tilde{H} + \lambda T_u]^{-1} \tilde{H}^r T_y$ 的第一行所组成的行向量, λ 为辅助控制变量的权系数, T_y , T_u 分别为

$$\left. \begin{aligned} T_y &= \int_{T_1}^{T_2} T_{N_y}^r T_{N_y} dT, \\ T_u &= \int_0^{T_2 - T_1} T_{N_u}^r T_{N_u} dT, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中 T_1 为最小预测界限, T_2 为最大预测界限. $\tilde{\mathbf{y}}_r$ 为特征结构下的参考轨迹向量, 即有

$$\tilde{\mathbf{y}}_r = \mathbf{r}[\tilde{\mathbf{y}}_r(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t)], \quad (13)$$

式中 $\tilde{\mathbf{y}}_r(t)$ 为 t 时刻的参考输入在特征结构下的分量, \mathbf{r} 为如下列向量:

$$\mathbf{r} = [r_0, r_1, \dots, r_{N_y}]^r, \quad (14)$$

其中 $r_{i;s}(i = 0, 1, \dots, N_y)$ 为特征子系统参考轨迹模型 $\frac{Rn(s)}{Rd(s)}$ 的 Markov 参数, 即有

$$\frac{Rn(s)}{Rd(s)} \approx \sum_{i=0}^{N_y} r_i s^{-i}. \quad (15)$$

式(11)两边同时取拉氏变换, 并将式(10), (13)代入得辅助控制变量 $\tilde{u}^*(t)$ 在 Laplace 域内的表达式为

$$\tilde{U}^*(s) = \tilde{g} \cdot [L_r(s) - \tilde{Y}(s)] - \tilde{Y} \frac{\tilde{G}_0}{C} \tilde{U}^*(s) - \frac{\tilde{F}_0}{C} \tilde{Y}(s), \quad (16)$$

式中标量 \tilde{g} 和多项式 \tilde{G}_0, \tilde{F}_0 分别为

$$\tilde{g} = \tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}, \quad \tilde{G}_0 = \tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{S}_G, \quad \tilde{F}_0 = \tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{S}_F, \quad (17)$$

式中 $\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{F}}$ 分别为由多项式 \tilde{G}_k, \tilde{F}_k 的系数所组成的 $(N_y + 1) \times n, (N_y + 1) \times (n + 1)$ 维系数矩阵(首行由零元素组成), $\mathbf{S}_G, \mathbf{S}_F$ 分别为

$$\mathbf{S}_G = [s^{n-1}, s^{n-2}, \dots, s, 1]^r, \quad \mathbf{S}_F = [s^n, s^{n-1}, \dots, s, 1]^r. \quad (18)$$

$\tilde{U}^*(s)$ 获得后, 控制变量 $\tilde{u}(t)$ 的 Laplace 变换 $\tilde{U}(s)$ 为

$$\tilde{U}(s) = \frac{1}{s} \tilde{U}^*(s), \quad (19)$$

式(16),(19)就是特征子系统的预测控制规律,为区分各个特征子系统,记第 i 个特征子系统的控制作用为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}_i^*(s) &= \tilde{g}^{(i)}[\tilde{Y}_{r,i}(s) - \tilde{Y}_i(s)] - \frac{\tilde{G}_0^{(i)}}{C_i} \tilde{U}_i^*(s) - \frac{\tilde{F}_0^{(i)}}{C_i} \tilde{Y}_i(s), \\ \tilde{U}_i(s) &= \frac{1}{s} \tilde{U}_i^*(s). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

2.3 多变量连续时间预测控制规律

在方程(20)的第一式中,令 $i = 1, 2, \dots, m$, 可获得 m 维向量方程

$$\tilde{U}^*(s) = G_g[\tilde{Y}_r(s) - \tilde{Y}(s)] - G_u(s)\tilde{U}^*(s) - G_y(s)\tilde{Y}(s). \quad (21)$$

式中

$$\begin{aligned} G_g &= \text{diag}\{\tilde{g}^{(i)}\}_{1 \leq i \leq m}, \quad G_u(s) = \text{diag}\left\{\frac{\tilde{G}_0^{(i)}}{C_i(s)}\right\}_{1 \leq i \leq m}, \\ G_y(s) &= \text{diag}\left\{\frac{\tilde{F}_0^{(i)}}{C_i(s)}\right\}_{1 \leq i \leq m}, \quad \tilde{U}^*(s) = [\tilde{U}_1^*(s), \tilde{U}_2^*(s), \dots, \tilde{U}_m^*(s)]^T, \\ \tilde{Y}(s) &= [\tilde{Y}_1(s), \tilde{Y}_2(s), \dots, \tilde{Y}_m(s)]^T. \end{aligned}$$

$\tilde{Y}_r(s)$ 为特征结构下参考输入向量的拉氏变换,可通过下式确定:

$$\tilde{Y}_r(s) = V(s)Y_r(s), \quad (22)$$

式中 $Y_r(s)$ 为对象结构下参考输入向量的拉氏变换.

将式(22)代入式(21)得

$$[I + G_u(s)]\tilde{U}^* = G_g V(s)[Y_r(s) - Y(s)] - G_y(s)V(s)Y(s). \quad (23)$$

由方程(20)的第二式得

$$\tilde{U}(s) = \frac{1}{s} I \tilde{U}^*(s). \quad (24)$$

式(23),(24)构成了多变量系统的预测控制规律,由此可获得多变量控制系统的闭环反馈结构如图 1 所示.

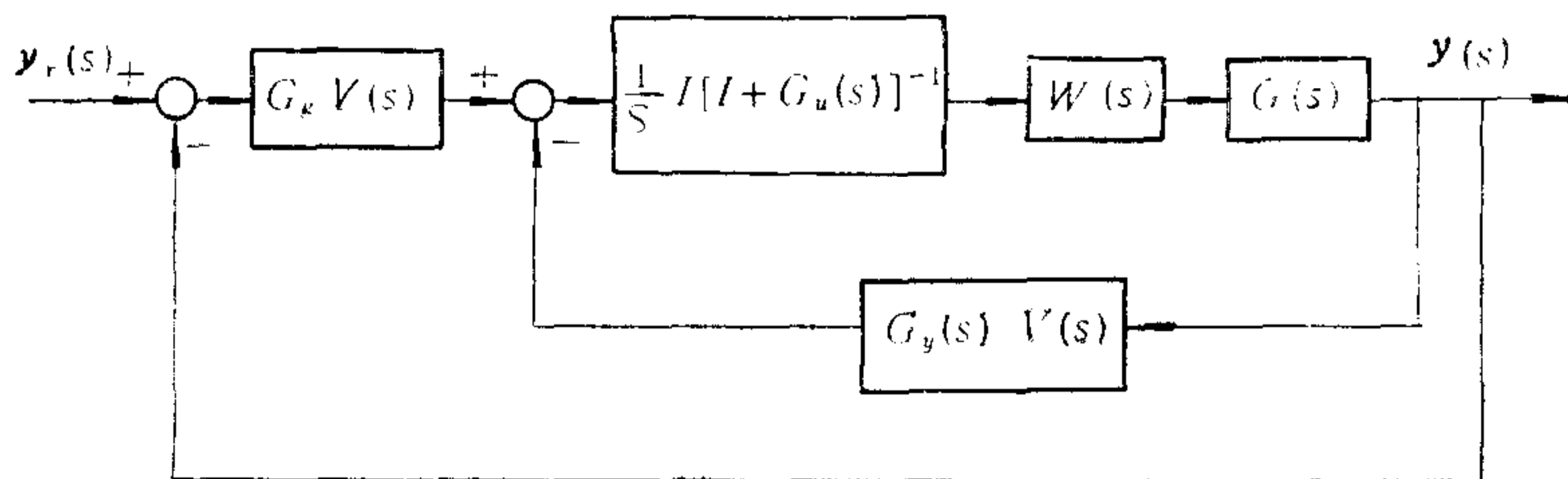


图 1 多变量预测控制系统的闭环结构

图 1 中的特征向量函数 $W(s), V(s)$ 有可能是 s 的无理函数,从而使控制系统难于实现. 这个问题在特征轨迹设计方法中同样存在. Kouvaritakis 在处理这个问题时,利用他所提出的 ALIGN 算法在一个或几个特定的频率点上用实数矩阵 $A(B)$ 分别近似特征向量函数 $W(s)(V(s))$,从而使导出的控制器能够物理实现. 这种处理方法同样适用于本文的算法.

3 仿真研究

为验证上面算法的有效性,对如下多变量对象进行预测控制:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + s + 1)} \begin{bmatrix} s^2 + 3.67s + 1 & -1.33s \\ 7.33s & s^2 - 2.67s + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

上式中,传递函数矩阵 $G(s)$ 可以特征分解为

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 1 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2 + s + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.33 & -2.67 \\ -6.67 & 3.33 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

利用本文的方法,对两特征子系统进行控制,选择设计多项式 $C_1(s) = C_2(s) = 0.2s^2 + s + 1$, 控制器的可调参数为 $Ny_1 = Ny_2 = 6, Nu_1 = Nu_2 = 3, T_1^{(1)} = T_1^{(2)} = 0, T_2^{(1)} = 1, T_2^{(2)} = 2, \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 参考轨迹模型为 $\frac{Rn_1}{Rd_1} = \frac{Rn_2}{Rd_2} = \frac{1}{s + 1}$, 则所获得的控制器参数矩阵为

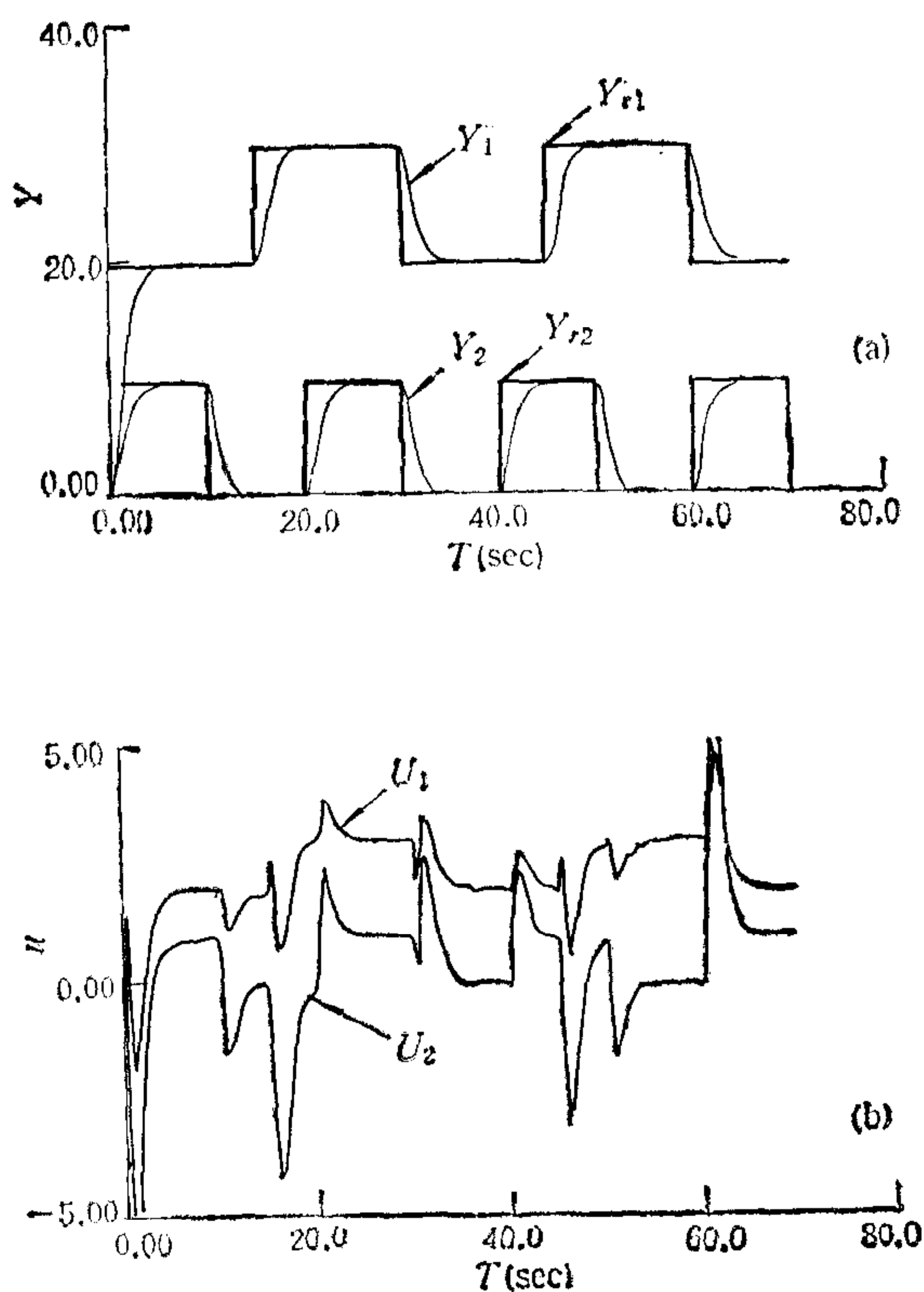


图 2 多变量预测控制系统的仿真曲线

- (a) 参考输入和系统输出的响应曲线
- (b) 控制作用的响应曲线

$$G_g = \text{diag}\{8.1535, 8.1546\},$$

$$G_u = \text{diag}\left\{\frac{1.0558s + 7.5656}{0.2s^2 + s + 1}, \frac{0.8558s + 5.7099}{0.2s^2 + s + 1}\right\},$$

$$G_y = \text{diag}\left\{\frac{15.6566s^2 + 3.8678s}{0.2s^2 + s + 1}, \frac{9.1468s^2 + 5.727s}{0.2s^2 + s + 1}\right\}.$$

用高级连续系统仿真语言 ACSL 对所设计的系统进行仿真 (仿真系统参见图 1)。假定两参考输入 $Y_{r1}(s)$ 和 $Y_{r2}(s)$ 同时作波形不同的阶跃变化, 则控制系统的仿真曲线参见图 2。

仿真曲线表明, 用本文控制方法所设计的多变量系统, 不仅具有较好的跟踪能力, 而且输出变量之间的互作用很小。

参 考 文 献

- [1] Demircioglu H and Gawthrop P J. Continuous-time generalized predictive control (CGPC). *Automatica*, 1991, 27(1):55—73.
- [2] MacFarlane A G J and Kouvaritakis B. A design technique for linear multivariable feedback systems. *Int. J. Control*, 1977, 25(6):837—874.
- [3] Clarke D W, Mohtadi C and Toffs P S. Generalized predictive control—part I: the basic algorithm. *Automatica*, 1987, 23(2): 137—148.

A METHOD FOR MULTIVARIABLE CONTINUOUS-TIME PREDICTIVE CONTROL

LÜ JIANHONG CHEN LAIJU

(Dept. of Power Engineering, Southeast University Nanjing 210018)

ABSTRACT

This paper presents a modified CGPC algorithm, which has inherent integration function. Furthermore, in association with multivariable frequency techniques—characteristic locus technique, proposes a framework for the multivariable generalization of continuous-time generalized predictive control. The simulation clearly shows that the multivariable algorithm is valid.

Key words: Multivariable system, predictive control, continuous-time domain.