



# 广义随机 Petri 网在制造系统中的应用<sup>1)</sup>

曾宪强 吴智铭

(上海交通大学自动控制系 200030)

## 摘 要

介绍广义随机 Petri 网,通过把其状态分为隐状态和显状态并消去隐状态,使得计算复杂度降低,并将其应用在一个制造系统模型上,使用禁止弧来消除制造系统的冲突。

**关键词:** 广义随机 Petri 网,制造系统,马氏链。

## 1 引言

Petri 网是描述离散有序过程的重要工具。随机 Petri 网从统计意义上计算了网的状态树中各状态出现的概率和持续时间<sup>[1]</sup>。广义随机 Petri 网 (GSPN)<sup>[2]</sup> 则通过区分为具有一定延时分布的变迁和瞬时变迁,省略了网中可能出现的瞬态,从而使时间上有意义的 Petri 网的计算得以简化。

计入时间的 Petri 网能准确估计各状态的逗留时间和状态的转换时间,因此可由分析方法计算制造系统的运行指标<sup>[3]</sup>。例如零件在车间的流通时间,机床、小车和缓冲器的利用率,并由此核算制造成本,评估车间的设计及所安排任务的合理性。

## 2 广义随机 Petri 网——GSPN 简介

GSPN 是一个五元组,  $GSPN = (P, T, A, M_0, R)$  其中  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  是位置集合;  $T = T_i \cup T_j$  是变迁集合,由两个分离的子集组成;  $T_i = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  是定时变迁集合,由  $m$  个定时变迁组成;  $T_j = \{t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ik}\}$  是瞬时变迁,由  $K$  个瞬时变迁组成;  $A \subset \{P \times T\} \cup \{T \times P\}$  是弧段集合;  $M_0 = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  是起始标记,其中  $m_i$  是  $p_i$  中的标志数;  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$  是和定时变迁集合有关的发射速率集合,一旦使能,瞬时变迁以零时间发射,而定时变迁则由固定延时的负指数分布函数确定一个随机时间值后再发射。

1) 本文得到国家自然科学基金和 863 高技术项目资助。  
本文于 1991 年 3 月 23 日收到

### 3 广义随机 Petri 网的激发生规则

GSPN 的可达集或状态空间被分成两部分, 显状态和隐状态。在 GSPN 中, 对状态和标记不加区别, 认为是等同的。

**定义 1.** 只能使定时变迁使能的标记, 称之为显状态, 显状态要经过一段负指数分布时间延迟后才能变成另一个状态。

**定义 2.** 使瞬时变迁使能的标记, 称之为隐状态, 隐状态经过零时间延迟变成另一个状态。

GSPN 的激发生规则如下:

1) 对某一个标记  $M$ , 使得多个变迁使能, 如果有瞬时变迁时, 则只有瞬时变迁才能激发。根据定义 1, 此时的标记  $M$  为隐状态。

2) 对某一个标记  $M$ , 使得多个定时变迁使能发生冲突, 则应定义冲突概率, 令  $H$  为冲突变迁集合, 第  $i$  个变迁的发射速率为  $r_i$ , 则变迁  $t_i$  将以概率

$$P(t_i) = r_i / \sum_{K \in H} r_K, \quad (K \in H) \quad (1)$$

激发。根据定义 1, 此时的标记  $M$  为显状态。

3) 对某一标记  $M$ , 使得多个定时变迁和瞬时变迁使能, 则只有瞬时变迁激发, 如果瞬时变迁发生冲突时, 则给每一个变迁定义一个激发概率。根据定义 2, 此时的标记  $M$  为隐状态。

### 4 广义随机 Petri 网的稳定概率计算方法

下面对 GSPN 作如下假设:

1) 可达集是有限的。2) 激发速率不依赖于时间, 是非时变的, 3) 在可达集中, 任何标记都以非零概率可达初始标记, 且无标记存在吸收状态。4) 假定在隐状态中不存在环。

有两种方法可以解答 GSPN 的稳定概率。

第一种方法。令所有的瞬时变迁都用定时变迁代替, 其激发速率是很大的任意值  $x$ , 这样 GSPN 就变成标准的 SPN 了, 而 SPN 等价于相应的连续时间马氏链, 用随机过程的办法算出其稳定概率, 再令  $x \rightarrow \infty$  则得到 GSPN 的解, 在数值计算时, 则令  $x$  为一个很大的数。这种方法增大了转移矩阵的维数, 因而增加了计算上的复杂度。

第二种方法。因为隐状态用零时间变成另一个状态, 因而其稳定概率为零, 这样只需计算显状态之间的稳定概率。令  $s$  为可达状态集合,  $T$  为显状态集合,  $V$  为隐状态集合, 且  $s = T \cup V$ ,  $T \cap V = \emptyset$ ,  $K_s = K_t + K_v$ , 其中  $K_s$  为可达状态数目,  $K_t$  为显状态数目,  $K_v$  为隐状态数目。令  $i, j$  分别为任意两个显状态, 则可以得到强度转移矩阵的元素

$$q_{ij} = f_{ij} + \sum_{r \in V} e_{ir} \cdot P_r(r \rightarrow j), \quad i, j \in T, \quad r \in V,$$



$$q_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{K_i} q_{ij}, \quad i, j \in T. \tag{2}$$

其中  $f_{ij}$  为显状态  $i$  到显状态  $j$  的一步转移速率,  $e_{ir}$  为显状态  $i$  到隐状态  $r$  的一步转移速率,  $P_r(r \rightarrow j)$  为隐状态  $r$  在隐状态空间内转移多步以后到达显状态  $j$  的转移概率. 可以证明, 消去隐状态后的显状态之间的速率转移关系等价于连续时间马氏链. 令  $Q$  为强度转移矩阵,  $\pi$  为显状态的稳定概率分布, 则

$$\pi Q = 0, \quad \sum \pi_i = 1. \tag{3}$$

通过解线性方程则可以得到稳定概率. 这种方法的好处是, 使状态空间减少, 计算的复杂度从  $O(K_s^3)$  减少到  $O(K_i^3)$ , 其中  $K_s = K_i + K_v$ .

### 5 实例

某一制造系统由两台机床  $M_1$  和  $M_2$  组成, 每一台机床都有一个输入缓冲器和输出缓冲器, 小车负责运送零件. 假设系统输入缓冲器有充足的零件等待加工, 小车运送时间以及机床加工时间都服从负指数分布, 则制造系统的 GSPN 模型如图 1 所示.

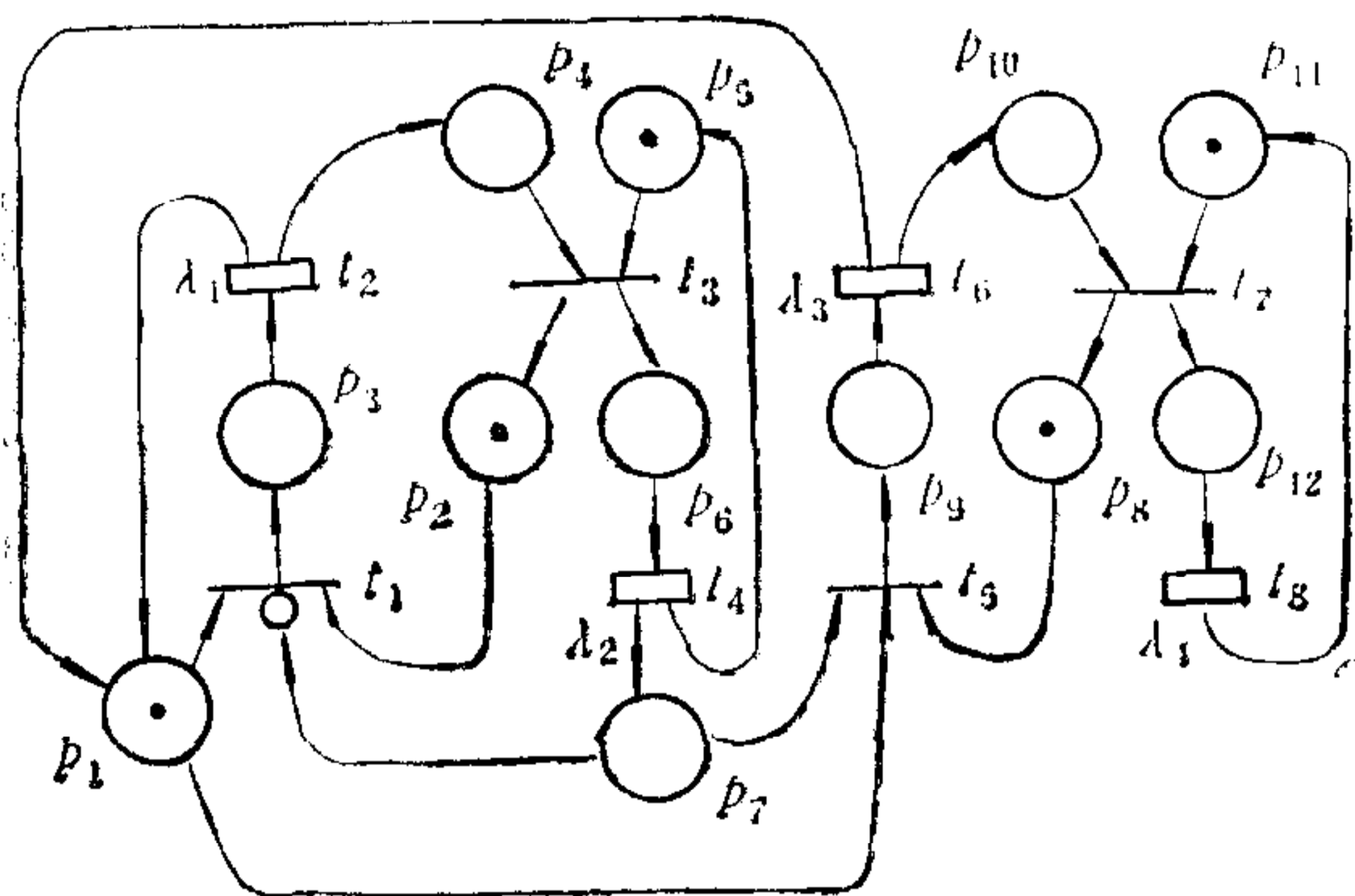


图 1 制造系统的 GSPN 模型

图 1 的 GSPN 是由 12 个位置和 8 个变迁组成, 其中  $t_2, t_4, t_6, t_8$  为定时变迁, 速率分别为  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ;  $t_1, t_3, t_5, t_7$  为瞬时变迁. 各位置和变迁的意义说明如下:

$p_1$ : 小车空闲,  $p_2$ : 机床 1 请求小车送零件,  $p_3$ : 小车正在给机床 1 送零件,  $p_4$ : 机床 1 输入缓冲器,  $p_5$ : 机床 1 空闲,  $p_6$ : 机床 1 加工零件,  $p_7$ : 机床 1 的输入缓冲器,  $p_8$ : 机床 2 请求小车送零件,  $p_9$ : 小车正在给机床 2 送零件,  $p_{10}$ : 机床 2 的输入缓冲器,  $p_{11}$ : 机床 2 空闲,  $p_{12}$ : 机床 2 加工零件.

$t_1$ : 机床 1 请求运送零件,  $t_2$ : 小车给机床 1 运零件,  $t_3$ : 零件装上机床 1,  $t_4$ : 机床 1 加工完零件,  $t_5$ : 机床 2 请求送零件,  $t_6$ : 小车送零件给机床 2,  $t_7$ : 零件装上机床 1,  $t_8$ : 机床 2 加工完零件.

当  $p_7$  有标志时,  $t_1, t_5$  两个变迁将发生冲突, 同时争夺一辆小车. 利用禁止弧就可以避免冲突, 规定  $t_5$  级别比  $t_1$  高,  $p_7$  到  $t_1$  有一条禁止弧, 表示只要  $p_7$  有标志, 则变迁  $t_1$  就不能发射, 没有标志时,  $t_1$  才能发射.

我们编制了一个广义随机 Petri 网分析器的程序(GSPNA), GSPNA 可以分析可达树和不变量, 并可求出显状态和隐状态集合, 还可以算出显状态的稳定概率. 利用 GSPNA 对图 1 所示的 GSPN 模型进行分析, 令  $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4, \lambda_4 = 1$ . 下面给出显状态集合(见表 1) 和显状态的稳定概率.

表 1 图 1 所示 GSPN 的显状态集合

$M$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$p_7$	$p_8$	$p_9$	$p_{10}$	$p_{11}$	$p_{12}$
$M_1$	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
$M_2$	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
$M_3$	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
$M_4$	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0
$M_5$	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1
$M_6$	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
$M_7$	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
$M_8$	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1
$M_9$	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
$M_{10}$	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
$M_{11}$	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
$M_{12}$	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1
$M_{13}$	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
$M_{14}$	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
$M_{15}$	1	1	0	0	1	0	2	0	0	1	0	1
$M_{16}$	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
$M_{17}$	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1
$M_{18}$	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0
$M_{19}$	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
$M_{20}$	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0
$M_{21}$	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

显状态的稳定概率为

$$\begin{aligned}
 P(M_1) &= 5.08E-03, & P(M_2) &= 9.43E-03, & P(M_3) &= 5.39E-02, \\
 P(M_4) &= 3.09E-02, & P(M_5) &= 3.63E-02, & P(M_6) &= 7.01E-02, \\
 P(M_7) &= 4.05E-02, & P(M_8) &= 4.40E-02, & P(M_9) &= 1.76E-01, \\
 P(M_{10}) &= 5.64E-02, & P(M_{11}) &= 4.51E-02, & P(M_{12}) &= 4.89E-02, \\
 P(M_{13}) &= 6.52E-02, & P(M_{14}) &= 6.96E-02, & P(M_{15}) &= 1.39E-01, \\
 P(M_{16}) &= 1.95E-02, & P(M_{17}) &= 1.84E-02, & P(M_{18}) &= 9.32E-03, \\
 P(M_{19}) &= 2.03E-02, & P(M_{20}) &= 1.41E-02, & P(M_{21}) &= 2.65E-02.
 \end{aligned}$$

当  $p_6$  有标志时表示机床 1 正在加工零件,  $p_{12}$  有标志时表示机床 2 正在加工零件,  $p_1$  有标志时表示小车正空闲,  $p_3$  有标志时表示小车正运送零件到机床 1,  $p_9$  有标志时表示小车正送零件到机床 2. 令  $A_1$  表示机床 1 忙集合,  $A_2$  为机床 2 忙集合,  $A_3$  表示小车空闲集合,  $A_4$  表示小车运零件到机床 1 集合,  $A_5$  表示小车送零件到机床 2 集合. 从 GSPN 显状态集合可以得到

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \{M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_{12}, M_{13}, M_{14}\}, \\
 A_2 &= \{M_5, M_6, M_7, M_8, M_9, M_{10}, M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{15}, M_{16}, M_{17}, M_{19}\}, \\
 A_3 &= \{M_3, M_6, M_9, M_{13}, M_{14}, M_{15}\}, \\
 A_4 &= \{M_1, M_2, M_5, M_{11}, M_{12}, M_{16}, M_{17}, M_{18}, M_{19}\}, \\
 A_5 &= \{M_4, M_7, M_8, M_{10}, M_{20}, M_{21}\}.
 \end{aligned}$$



$$P(A_1) = \sum_{i=2}^7 P(M_i) + \sum_{j=12}^{14} P(M_j) = 0.425,$$

$$P(A_2) = \sum_{i=5}^{17} P(M_i) + P(M_{19}) = 0.767,$$

$$P(A_3) = 0.575, \quad P(A_4) = 0.212, \quad P(A_5) = 0.213.$$

机床 1 的利用率  $\mu_1 = P(A_1) = 42.5\%$ ; 机床 2 的利用率  $\mu_2 = P(A_2) = 76.7\%$ ; 小车的空闲率  $c_c = 57.5\%$ ; 小车给机床 1 运零件的概率  $c_1 = 21.2\%$ ; 小车给机床 2 运零件的概率  $c_2 = 21.3\%$ .

GSPN 是 FMS 建模与仿真的一种简洁工具,既可以分析系统的静态特性,也可以分析动态特性,但随着标志数的增加和网的增大,状态数目呈指数增加,给分析带来困难,把 GSPN 和排队网络结合起来<sup>[4]</sup>是一种有吸引力的方法。

### 参 考 文 献

- [1] Marsan M A, Balbo G and Conte G. Performance model of multiprocessor system. The MIT Press, 1986, 73—98.
- [2] Ammas H H and Liu R W. Analysis of the generalized stochastic Petri nets by state aggregation. Proc. int. workshop on Timed Petri nets, Torino, Italy, 1985, 88—95.
- [3] Dubois D and Steck K E. Using Petri nets to represent production process. Proc. 22nd IEEE Conf. on Decision & Control. 1983, 1062—1067.
- [4] Balbo G, Bruell S C and Ghanta S. Combining queueing networks and generalized stochastic Petri nets for the solution of complex models. *IEEE Tran. on Computer*. 1988, C-37(10): 1251—1268.

## APPLICATION OF GENERALIZED STOCHASTIC PETRI NETS TO MANUFACTURING SYSTEM

ZENG XIANQIANG      WU ZHIMING

(Department of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University 200030)

### ABSTRACT

A brief description of generalized stochastic Petri nets (GSPN) is introduced in this paper. By distinguishing the markings of GSPN into vanishing markings and tangible markings and eliminating vanishing markings, the computational complexity is reduced. An example of application of GSPN to a manufacturing system model is presented. An inhibitor arc is used to eliminate the conflict of the manufacturing system model.

**Key words:** Generalized stochastic Petri nets, manufacturing system, Markovian chain.