第21卷 第2期 自 动 化 学 报 Vol. 21, No. 2
1995 年 3 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Mar., 1995

短 文

一类多变量系统的 H^∞ 控制的工程设计方法[1)]

陈振东 孙优贤
(浙江大学工业控制技术研究所 杭州 310027)

摘 要

从工程应用角度出发，提出一种用 H^∞ 控制理论设计一类多变量系统的次优敏感性控制器的工程设计方法，并证明了其可行性. 该方法通过将系统矩阵化为对角占优，利用单独通道设计思想将多变量系统转化为单变量系统的 H^∞ 最优敏感性控制器问题. 文末给出了仿真实例.

关键词: H^∞ 控制理论，最优敏感性，单独通道设计法.

1 引言

在有不确定性外干扰存在时，为削弱干扰的影响，希望闭环系统对这类干扰具有最小敏感性，H^∞ 控制理论正是基于最优敏感性来设计控制器. 但在多变量 H^∞ 设计中，有算法复杂、控制器阶次高、不可实现等缺点，工程设计人员难以接受. 很多学者已致力于研究 H^∞ 控制算法的简化，本文借助于文献[1,2]的单独通道设计思想，给出了一类多变量系统的 H^∞ 最优敏感性控制器的设计方法，利用较为简单成熟的 H^∞ 单变量理论解决多变量问题.

2 问题的提出

考虑如图 1 所示的二输入二输出控制问题，能否设计对角控制器 $K(s)=\operatorname{diag}\{k_1(s), k_2(s)\}$ 使得闭环系统稳定，且干扰 d_1, d_2 对输出 y_1, y_2 的影响达到最小，就是二输入二输出多变量 H^∞ 对角输出反馈控制问题.

考虑输入 r_1, r_2 及干扰 d_1 对输出 y_1 的传递函数，如图 2 所示.

定义 1. $h_1=\dfrac{k_1g_{11}}{1+k_1g_{11}}$, $h_2=\dfrac{k_2g_{22}}{1+k_2g_{22}}$, $v=\dfrac{g_{12}g_{21}}{g_{11}g_{22}}$ 为多变量结构函数. 于是

---

1) 国家自然科学基金资助项目.
本文于 1993 年 5 月 5 日收到

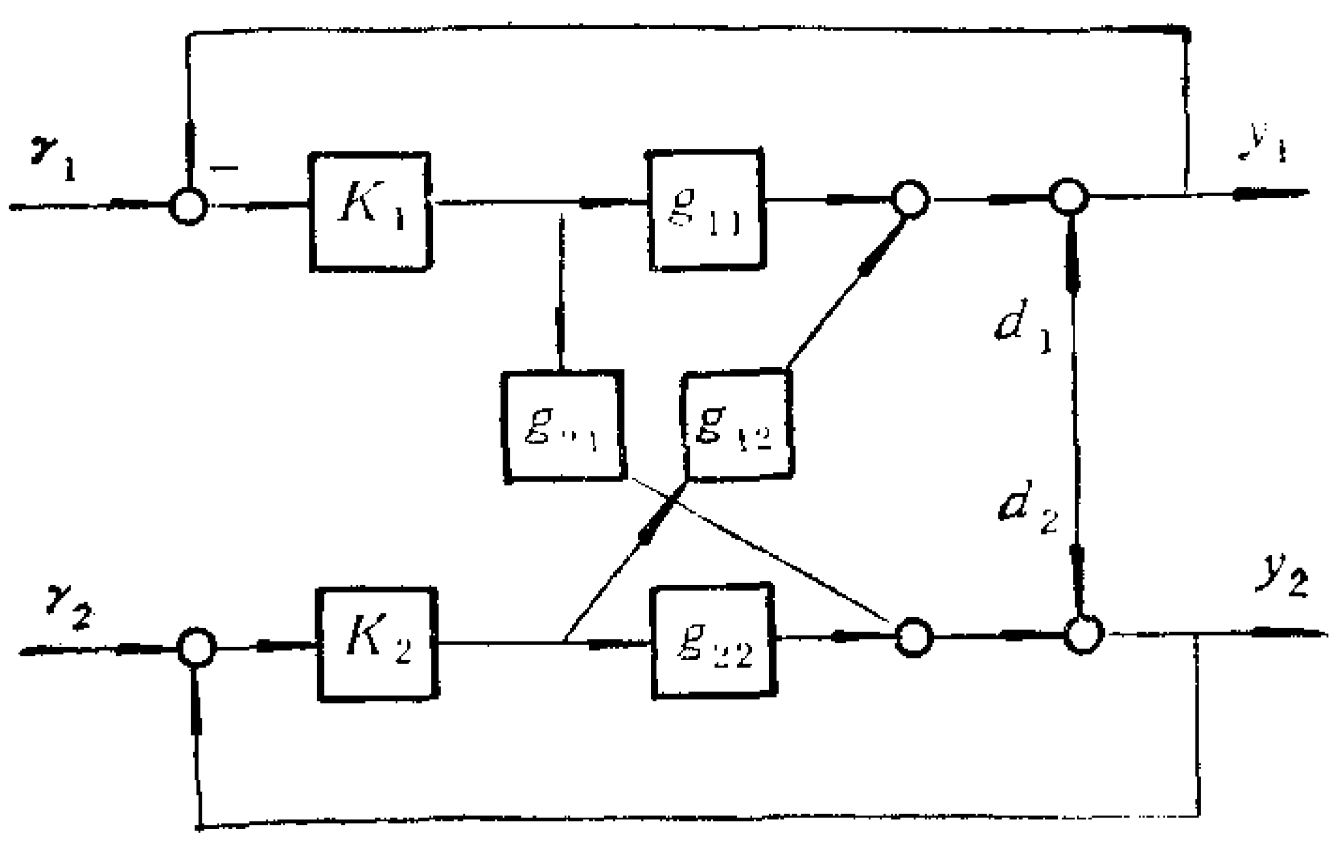

图 1 二输入二输出 H^∞ 对角反馈控制系统

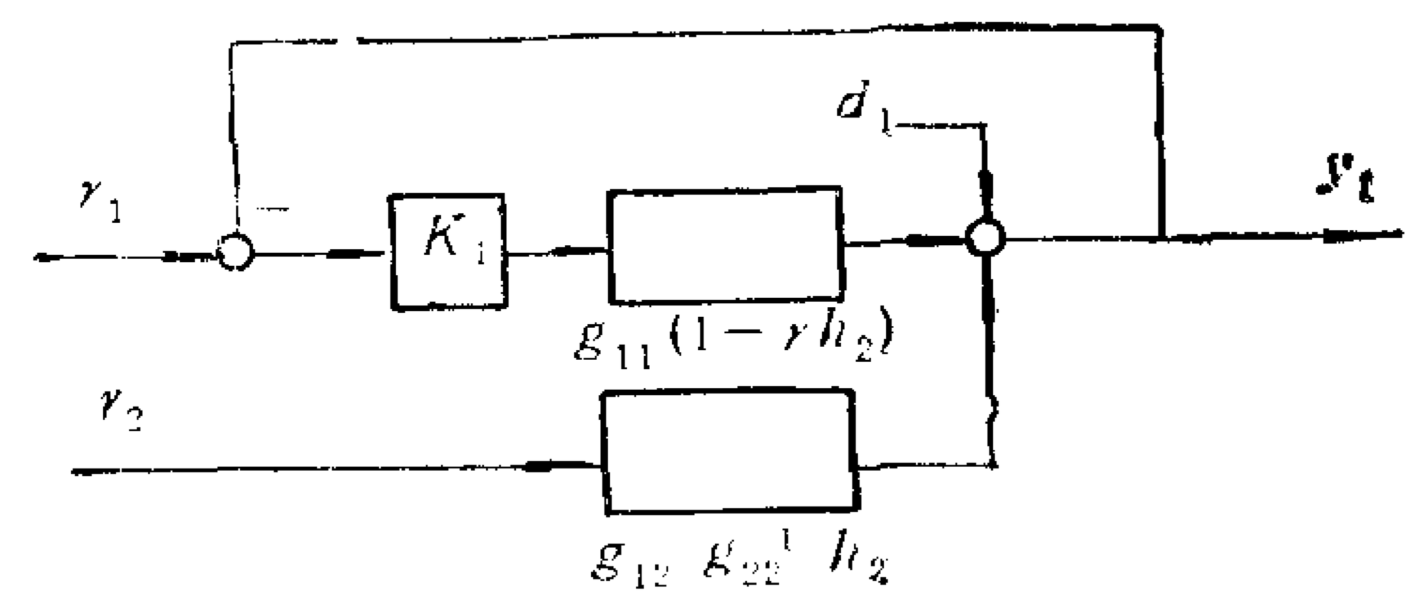

图 2 单通道 C_1

$$y_1=\frac{k_1g_{11}(1-vh_2)}{1+k_1g_{11}(1-vh_2)}r_1+\frac{g_{12}g_{22}^{-1}h_2}{1+k_1g_{11}(1-vh_2)}r_2+\frac{1}{1+k_1g_{11}(1-vh_2)}d_1,$$

这时把 r_1 作为参考输入，而把 r_2 和 d_1 都看成是输出 y_1 的干扰信号。则

$$y_1=\frac{k_1g_{11}(1-vh_2)}{1+k_1g_{11}(1-vh_2)}r_1+\frac{1}{1+k_1g_{11}(1-vh_2)}\left(d_1+\frac{g_{12}}{g_{22}}h_2r_2\right).$$

对此类问题，要求 $[g_{ij}]$ 是对角占优的；若可化为对角占优，也可归入此类问题。

设灵敏度函数为 $S_1=\dfrac{1}{1+k_1g_{11}(1-vh_2)}$，只要 $\|S_1\|_\infty$ 控制较小，则 r_2 对于输出 y_1 的影响就会受到抑制。从而设计问题可化为求稳定控制器 $k_1(s)$，使 $J_1=\min\limits_{k_1(s)}\|S_1\|_\infty$，且使单通道 C_1 稳定。

同理，对输出 y_2，如图 3 所示，有

$$y_2=\frac{k_2g_{22}(1-vh_1)}{1+k_2g_{22}(1-vh_1)}r_2+\frac{g_{21}g_{11}^{-1}h_1}{1+k_2g_{22}(1-vh_1)}r_1+\frac{1}{1+k_2g_{22}(1-vh_1)}d_2,$$

则设计问题可化为求稳定控制器 $k_2(s)$ 使单通道 C_2 稳定，且使 $J_2=\min\limits_{k_2(s)}\|S_2\|_\infty$，其中

$$S_2=\frac{1}{1+k_2g_{22}(1-vh_1)}.$$

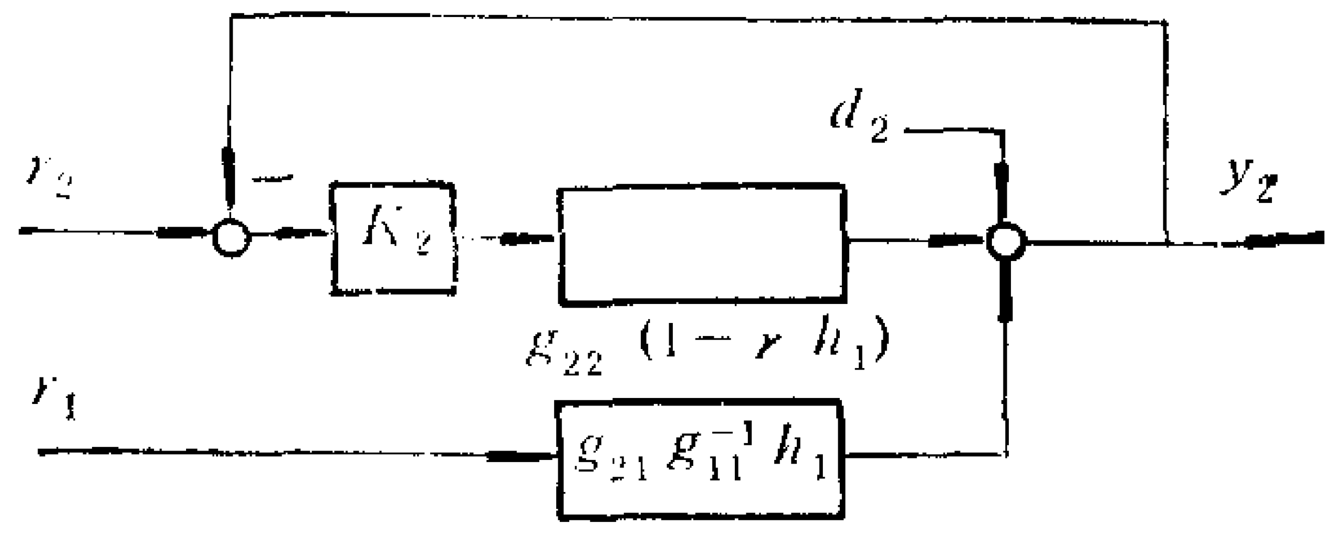

图 3 单通道 C_2

3 算法的提出及可行性证明

由文[1]的定理 1，如果给定系统 $[g_{ij}(s)]$ 没有右半平面和纯虚轴上的传递零点 (transmission zeros)，g_{ij} 是最小相的，且当 $s\to+\infty$ 时，$v(s)<1$，并有 $\lim\limits_{s\to\infty}g_{11}(s)=$

$q_1 s^{-m_1}$， $\lim\limits_{s\to\infty} g_{22}(s) = q_2 s^{-m_2}$， $\lim\limits_{s\to\infty} v(s) = q s^{-m}$，其中 m_1, m_2, m 均为整数，则一定存在稳定的最小相控制器 $k_1(s), k_2(s)$，使每个单通道 C_1, C_2 都是稳定的，且闭环系统是最小相的，而且 $h_1(s)$ 和 $h_2(s)$ 都是稳定的。其中 h_1, h_2 见定义 1。

由文 [2] 的定理 2，如果给定系统 $[g_{ij}(s)]$ 没有右半平面和纯虚轴上的传递零点，$g_{11}(s)$ 和 $g_{22}(s)$ 没有纯虚轴上的零点，当 $s\to+\infty$ 时，有 $v(s)<1$，且有 $\lim\limits_{s\to\infty} g_{11}(s) = q_1 s^{-m_1}$， $\lim\limits_{s\to\infty} g_{22}(s) = q_2 s^{-m_2}$， $\lim\limits_{s\to\infty} v(s) = q s^{-m}$，其中 m_1, m_2, m 均为整数，则一定存在稳定最小相控制器 $k_1(s)$ 和 $k_2(s)$，使单通道 C_1, C_2 都是稳定的，且闭环系统是最小相的，而且如果 $g_{11}(s)$ 和 $g_{22}(s)$ 有几个右半平面零点，则 $h_1(s)$ 和 $h_2(s)$ 就有几个右半平面极点。其中 h_1, h_2 见定义 1。

由以上两个定理知，对于此类系统，即无右半平面和纯虚轴上传递零点、g_{ii} 无纯虚轴上零点、且是对角占优或可化为对角占优的系统，设计单通道反馈控制器即 $K(s) = \mathrm{diag}\{k_1(s), k_2(s)\}$ 是可行的。

此类系统的 H^∞ 优化设计问题可化为

求解稳定控制器 $k_1(s)$ 和 $k_2(s)$，使单通道 C_1 和 C_2 都稳定，且使 $J_1 = \min\limits_{k_1}\|S_1\|_\infty$，$J_2 = \min\limits_{k_2}\|S_2\|_\infty$，其中 S_1 和 S_2 如上所述。

由于 S_1, S_2 与 k_1, k_2 都有关，设计问题还要进一步化简，下面提出一种渐近逼近法求得次优解，具体步骤如下：

1）将给定系统 $G(s) = [g_{ij}(s)]$ 化为对角占优阵，即 $\tilde{G}(s) = G(s)C(s)$，其中 $C(s)$，$C^{-1}(s) \in RH^\infty$。

2）求稳定控制器 k_1 和 k_2，使得 h_1 和 h_2 稳定，且使 $J_1 = \min\limits_{k_1}\left\|\dfrac{1}{1+k_1 g_{11}}\right\|_\infty$，$J_2 = \min\limits_{k_2}\left\|\dfrac{1}{1+k_2 g_{22}}\right\|_\infty$。

3）将 k_1 和 k_2 代入 $h_1 = \dfrac{k_1 g_{11}}{1+k_1 g_{11}}$，$h_2 = \dfrac{k_2 g_{22}}{1+k_2 g_{22}}$，$J_1' = J_1$，$J_2' = J_2$，$k_1' = k_1$，$k_2' = k_2$。

4）将 h_2 代入 $S_1 = \dfrac{1}{1+k_1 g_{11}(1-v h_2)}$，求解稳定控制器 k_1 使单通道 C_1 稳定，且使 $J_1 = \min\limits_{k_1}\|S_1\|_\infty$，将 h_1 代入 $S_2 = \dfrac{1}{1+k_2 g_{22}(1-v h_1)}$，求解稳定控制器 k_2 使单通道 C_2 稳定，且使 $J_2 = \min\limits_{k_2}\|S_2\|_\infty$。

5）给定 $\varepsilon > 0$，若 $|J_1 - J_1'| < \varepsilon$ 且 $|J_2 - J_2'| < \varepsilon$，则 k_1 和 k_2 即为所求控制器，否则转入 3）继续。

注意：此方法要防止控制器阶次过高，可对控制器阶数限制进行寻优。

当 $v = 0$ 时，问题大大简化，这和 H^∞ 解耦控制器相类似。一般情况下，上述逼近步骤的性能，由如下分析保证：

$$S_1 = \frac{1}{1+k_1 g_{11}(1-v h_2)} = \frac{1}{1+k_1 g_{11} - v k_1 g_{11} h_2}$$

$$= \frac{1}{1+k_1g_{11}} \frac{1}{1-vh_1h_2} = \frac{1}{1+k_1g_{11}} \left\{1 + \sum_{i=1}^{\infty} (vh_1h_2)^i\right\},$$

由于系统对角占优，即 $\|v\|_\infty < 1$，又设计的 k_1 和 k_2，使 $\|h_1\|_\infty < 1$，$\|h_2\|_\infty < 1$，因此

$$\|S_1\|_\infty \leqslant \left\|\frac{1}{1+k_1g_{11}}\right\|_\infty \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} (\|v\|_\infty \|h_1\|_\infty \|h_2\|_\infty)^i\right)$$

$$\leqslant \left\|\frac{1}{1+k_1g_{11}}\right\|_\infty \frac{1}{1-\|v\|_\infty},$$

从而有

$$\|S_1\|_\infty - \left\|\frac{1}{1+k_1g_{11}}\right\|_\infty \leqslant \frac{\|v\|_\infty}{1-\|v\|_\infty} \left\|\frac{1}{1+k_1g_{11}}\right\|_\infty,$$

同理可得

$$\|S_2\|_\infty - \left\|\frac{1}{1+k_2g_{22}}\right\|_\infty \leqslant \frac{\|v\|_\infty}{1-\|v\|_\infty} \left\|\frac{1}{1+k_2g_{22}}\right\|_\infty,$$

所以当 $\|v\|_\infty \ll 1$ 时，$\min\limits_{k_1} \left\|\frac{1}{1+k_1g_{11}}\right\|_\infty$ 和 $\min\limits_{k_2} \left\|\frac{1}{1+k_2g_{22}}\right\|_\infty$ 的解 k_1 和 k_2 可作为 $J_1 = \min\limits_{k_1}\|S_1\|_\infty$ 和 $J_2 = \min\limits_{k_2}\|S_2\|_\infty$ 的次优解。根据单变量 H^∞ 设计方法，可以保证动态性质较好。

4 实例研究

造纸机水分、定量系统的数学模型可近似为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{10e^{-2s}}{1.5s+1} & \frac{0.8e^{-s}}{1.6s+1} \\ \frac{0.8e^{-2s}}{1.5s+1} & \frac{4e^{-s}}{1.6s+1} \end{bmatrix},$$

对其中纯滞后项用泰勒展开近似得

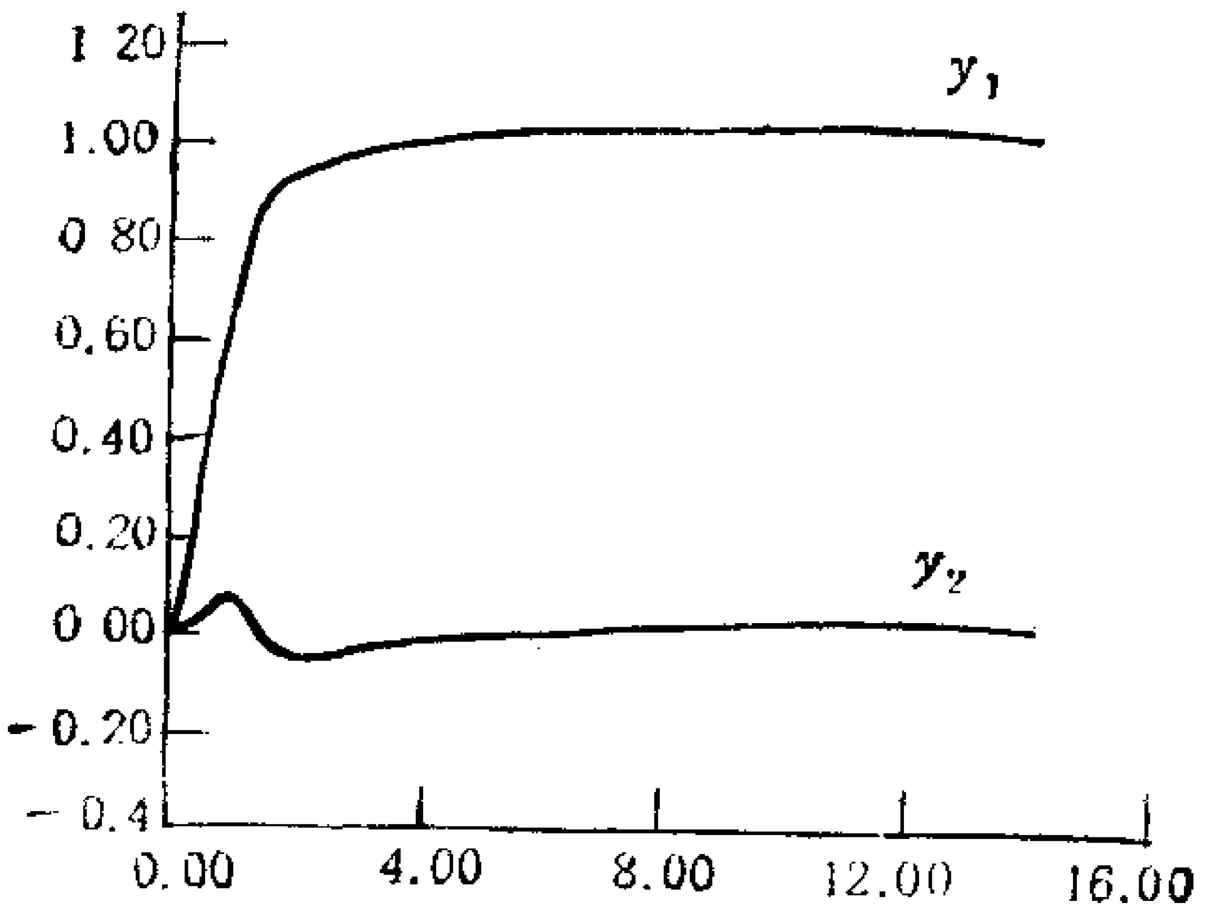

图 4 r_1 对 y_1, y_2 的阶跃响应曲线

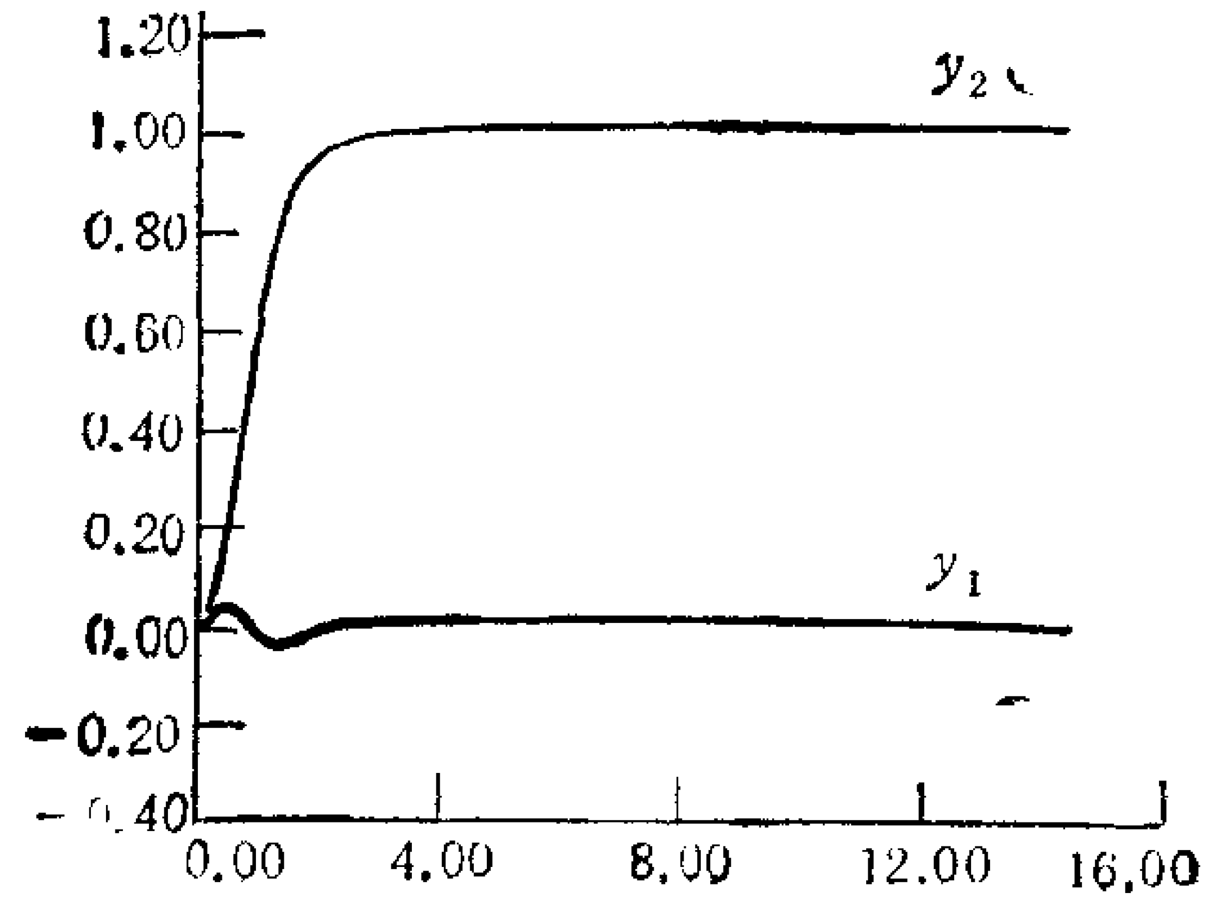

图 5 r_2 对 y_1, y_2 的阶跃响应曲线

$$P' = \begin{bmatrix} \frac{10}{(1.5s+1)(2s^2+2s+1)} & \frac{0.8}{(1.6s+1)(s^2+s+1)} \\ \frac{0.8}{(1.5s+1)(2s^2+2s+1)} & \frac{4}{(1.6s+1)(s^2+s+1)} \end{bmatrix}.$$

由于 $v(s) = 0.016 \ll 1$，且严格对角占优，用上述 H$^\infty$ 设计方法得

$$K(s) = \mathrm{diag}\left\{\frac{(1.5s+1)(2s^2+2s+1)}{10(s^3+3s^2+3s)}, \frac{(1.6s+1)(s^2+s+1)}{4(s^3+3s^2+3s)}\right\}.$$

仿真曲线如图 4，图 5 所示。

本文提出的 H$^\infty$ 设计方法不仅设计简单方便，而且从理论上也易于为广大工程技术人员所接受，它抓住系统的主要影响，将次要影响作为不确定干扰考虑，大大降低了设计难度。仿真结果表明，此设计方法控制效果较好。

参　考　文　献

[1] Leithead W E. and O'Reilly J. Performance issues in the individual channel design of 2-input 2-output systems, part 1: structural issues. *Int. J. Control*, 1991, **54**,(1):47—82.

[2] O'Reilly J and Leithead W. E. Multivariable control by 'individual channel design', *Int. J. Control*, 1991, **54**(1):1—46.

[3] Francis B A, Helton J W and Zames G. H$^\infty$-optimal feedback controller for linear multivariable systems, *IEEE Trans*. 1984, **AC-29**(10):888—900.

A PRACTICAL DESIGN FOR A KIND OF MULTIVARIABLE H$^\infty$ CONTROL SYSTEMS

Chen Zhendong　　Sun Youxian

(Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University 310027)

Abstract

In this paper, a practical approach to the optimal sensitivity controller design for a class of multivariable system is developed using H$^\infty$ control theory from the engineering point of view the application. By transforming the system matrix into diagonally dominant form, the design problem for the multivariable system is solved by designing H$^\infty$ optimal sensitivity controllers for single variable systems via individual channel design. The validity of the approach is proved, and a simulation example is given.

Key words: H$^\infty$ control system, optimal sensitivity, individual channel design.