

# 稳定反馈空间的拓扑结构<sup>1)</sup>

程代展 秦化淑 洪奕光

(中国科学院系统科学研究所 北京 100080)

## 摘 要

本文讨论控制系统反馈空间的拓扑结构. 首先讨论线性情况. 然后, 将其结果推广到非线性的情况. 赋予线性反馈集合以  $\mathbf{R}^{n \times m}$  拓扑(其中  $n$  为状态空间维数,  $m$  为输入维数), 在这个拓扑下研究完全能控系统稳定反馈集合的几何结构. 文中证明了稳定反馈集合的拓扑结构与具体系统无关. 并且, 对较小维数的系统 ( $n \leq 5$ ) 给出了具体的拓扑结构.

**关键词:** 稳定反馈, 拓扑, 可收缩, 道路联通.

## 1 引言

考虑一个线性系统

$$\Sigma: \dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad u \in \mathbf{R}^m. \quad (1.1)$$

当  $A \in M_{n \times n}$  ( $n \times n$  矩阵集合),  $B \in M_{n \times m}$ , 一个系统可以看作  $M_{n \times (n+m)} \cong M_{n \times n} \times M_{n \times m}$  中的一个点. 因为  $M_{n \times (n+m)}$  可赋予  $\mathbf{R}^{n(n+m)}$  的拓扑, 于是, 就可以讨论线性系统族的拓扑了. 这方面最早的工作是由 Brockett 开始的<sup>[1]</sup>. 其后, 许多文章对此进行了讨论<sup>[2-6]</sup>. 对于控制系统集合拓扑的描述大致有两种方法: 一种如上, 直接将一个控制系统等同于  $\mathbf{R}^{n(n+m)}$  中的一个点; 另一种是考虑到线性变换不改变系统的实质, 于是把

$$(g^{-1}Ag, g^{-1}B) \sim (A, B), \quad g \in GL(n, \mathbf{R}).$$

这样, 系统族拓扑变为商拓扑:

$$S = \{\Sigma\} \cong \mathbf{R}^{n(n+m)} / GL(n, \mathbf{R}).$$

现在考虑反馈控制:

$$u = Fx, \quad F \in M_{m \times n}.$$

一种方法是直接将反馈集合与  $\mathbf{R}^{m \times n}$  等价, 即

$$\{u\} \cong \{F\} \cong \mathbf{R}^{m \times n}; \quad (1.2)$$

另一种方法是

$$(g^{-1}Ag, g^{-1}B, Fg) \sim (A, B, F), \quad g \in GL(n, \mathbf{R}).$$

这里将主要讨论式(1.2)中的拓扑结构. 至于第二种定义, 将另文讨论.

由于反馈  $F$  依赖于系统的坐标表现, 所以式(1.2)不能说是定义好的. 但在坐标变换

本文于 1993 年 2 月 18 日收到.

1) 得到自然科学基金重大项目资助的课题.

$g \in GL(n, \mathbf{R})$  下,  $g: F \mapsto Fg$  是一个同胚变换. 因此, 讨论反馈集合的拓扑性质与系统的具体坐标表现无关. 换言之, 在拓扑等价意义下式(1.2)是定义好的.

本文主要研究线性系统稳定反馈集合的拓扑性质. 记

$$A_s = \{F \mid A + BF \text{ 为 Hurwitz 矩阵}\}.$$

**引理 1.1.**  $A_s$  的拓扑结构与具体系统无关, 即不依赖于  $A, B$ .

证明. 由前面的讨论可知,  $F$  的拓扑结构与坐标选择无关. 因此, 不妨设  $(A, B)$  具有能控标准形:

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_m \end{pmatrix}.$$

这里

$$P_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}, \quad Q_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{i1} \cdots a_{in} \end{pmatrix}, \quad b_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是, 两个系统  $\Sigma_1$  与  $\Sigma_2$  的不同仅在于它们所对应的参数集  $(a_{ij}^1)_{m \times n}$  与  $(a_{ij}^2)_{m \times n}$  不同. 记

$$\Delta F = (a_{ij}^1)_{m \times n} - (a_{ij}^2)_{m \times n},$$

则

$$F \in A_s^1 \iff F - \Delta F \in A_s^2.$$

由于平移不改变拓扑性质, 故

$$A_s^1 \cong A_s^2.$$

根据引理 1.1, 以后只讨论标准型式, 且可令  $Q_i = 0$ .

## 2 单输入系统

由引理 1.1 可知, 集合  $A_s$  的拓扑性质只依赖于系统维数.

**定理 2.1.** 当  $n = 2$  时,  $A_s$  是一个凸集, 它同胚于一个坐标象限:

$$A_s^2 \cong \{(a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a > 0, b > 0\}.$$

证明. 考虑标准形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases}$$

令  $u = -ax_1 - bx_2$ , 则闭环系统的特征值为,

$$\lambda_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4a})/2$$

显见, 稳定反馈为

$$A_s^2 \cong \{F \mid F = (a, b), b > 0, a > 0\}.$$

应说明的是: 线性变换与平移不改变凸性, 故对任一系统  $A_s^2$  均凸. 凸集显然是可收缩的.

**定理 2.2.** 当  $n = 3$  时,  $A_3$  是可收缩的.

证明. 仍然考虑标准形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = u = -ax_3 - bx_2 - cx_1, \end{cases}$$

于是特征方程为

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Hurwitz 矩阵为<sup>[8]</sup>

$$H = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & a & c \end{pmatrix}.$$

根据 Hurwitz 稳定性准则可得

$$\begin{cases} a > 0, \\ ab - c > 0, \\ c > 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

因此,  $A_3^3 \cong \{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \mid a > 0, ab - c > 0, c > 0\}$ . 为证明  $A_3^3$  是可收缩的, 引入新变量

$$\Psi: \begin{cases} x = a, \\ y = ab - c, \\ z = c. \end{cases} \quad (2.2)$$

显见, 这个映射是 1-1 的, 它把  $A_3^3$  映为

$$\Psi(A_3^3) \cong \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\},$$

这是可收缩的. 下面, 只要证明  $\Psi$  是局部微分同胚即可.  $\Psi$  的 Jacobian 矩阵为

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

显然它是非奇异的.

注意, 因式(2.2)是非线性映射, 它并不能保持凸性. 所以, 在一般情况下,  $A_3^3$  是不凸的(易证).

下面考虑  $n = 4$  的情况.

**定理 2.3.**  $A_4^4 \sim A_4^3$  ( $\sim$ : 同伦), 因此,  $A_4^4$  也是可收缩的.

证明. 利用前面所用的方法, 可得

$$\begin{cases} a > 0, & (2.3a) \\ ab > c, & (2.3b) \\ (ab - c)c - a^2d > 0, & (2.3c) \\ d > 0. & (2.3d) \end{cases}$$

构造一个同伦映射  $H: A_4^4 \times I \rightarrow A_4^4$  如下:

$$H(a, b, c, d, t) = \left\{ a, b, c, (1-t)d + t \frac{(ab-c)c}{2a^2} \right\}.$$

容易证明,  $H(a, b, c, d, t)$  满足式 (2.3a), (2.3b), (2.3d). 故只要证式 (2.3c) 即可.

$$\begin{aligned} & (ab-c)c - a^2 \left[ (1-t)d + t \frac{(ab-c)c}{2a^2} \right] \\ &= (ab-c)c \left( 1 - \frac{t}{2} \right) - a^2 d (1-t) \\ &> a^2 d \left( 1 - \frac{t}{2} \right) - a^2 d (1-t) \\ &= \frac{t}{2} a^2 d \geq 0. \end{aligned}$$

现在

$$\begin{aligned} H(0) &= (a, b, c, d) = id(A_1^4), \\ H(1) &= \left( a, b, c, \frac{(ab-c)c}{2a^2} \right). \end{aligned}$$

注意, 不难检验, 如果  $(a, b, c, d) \in A_1^4$ , 则相应的  $(a, b, c) \in A_1^3$ , 即满足式 (2.1). 因此,

$$A_1^4 \sim \left\{ a, b, c, \frac{(ab-c)c}{2a^2} \mid (a, b, c) \in A_1^3 \right\} \cong A_1^3.$$

**定理 2.4.**  $A_1^5$  是两个不相交的、分别可收缩的开集的并.

证明. 记特征多项式为

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

则其 Hurwitz 矩阵为

$$\begin{vmatrix} a & c & e & 0 & 0 \\ 1 & b & d & 0 & 0 \\ 0 & a & c & e & 0 \\ 0 & 1 & b & d & 0 \\ 0 & 0 & a & c & e \end{vmatrix}.$$

由 Hurwitz 判据可得

$$\begin{cases} a > 0, & (2.4a) \\ ab - c > 0, & (2.4b) \\ c(ab - c) - a(ad - e) > 0, & (2.4c) \\ dc(ab - c) - da(ad - e) - eb(ab - c) + e(ad - e) > 0, & (2.4d) \\ e > 0. & (2.4e) \end{cases}$$

令  $B = ab - c$ , 则  $b = (B + c)/a$ . 显然, 这是微分同胚映射. 此时式 (2.4d) 变为

$$Bcd - a^2 d^2 + aed - Be(B + c/a) + aed - e^2 > 0.$$

配方可得

$$-a^2 \left( d - \frac{Bc}{2a^2} - \frac{e}{a} \right)^2 + \frac{B^2}{4a^2} c^2 - \frac{B^2}{a} e > 0.$$

令

$$A = a, E = e, C = \frac{Bc}{2a}, D = \left( d - \frac{Bc}{2a^2} - \frac{e}{a} \right) a.$$

不难检验,这也是一个微分同胚变换. 在新坐标下式(2.4)变为

$$A > 0, \quad (2.5a)$$

$$B > 0, \quad (2.5b)$$

$$C - AD > 0, \quad (2.5c)$$

$$C^2 - D^2 > \frac{B^2}{A} E, \quad (2.5d)$$

$$E > 0. \quad (2.5e)$$

由式(2.5d)可知,  $C \neq 0$ . 因此,分两种情况讨论.

1) 设  $C > 0$ , 则显见在此条件下对固定的  $A, B, E$  式(2.5c)与(2.5d)定义的是两个凸集. 因此,可简单地构造一个同伦映射为

$$H(A, B, C, D, E, t) = \left\{ A, B, tC + (1-t) \cdot 2B \left( \frac{E}{A} \right)^{1/2}, tD, E \right\},$$

从而得到

$$A^5 \cap \{C > 0\} \sim \{(A, B, C, D, E) \in \mathbf{R}^5 \mid A > 0, B > 0,$$

$$E > 0, C = 2B \left( \frac{E}{A} \right)^{1/2}, 0\} \sim \{(A, B, E) \in \mathbf{R}^3 \mid A > 0, B > 0, E > 0\}.$$

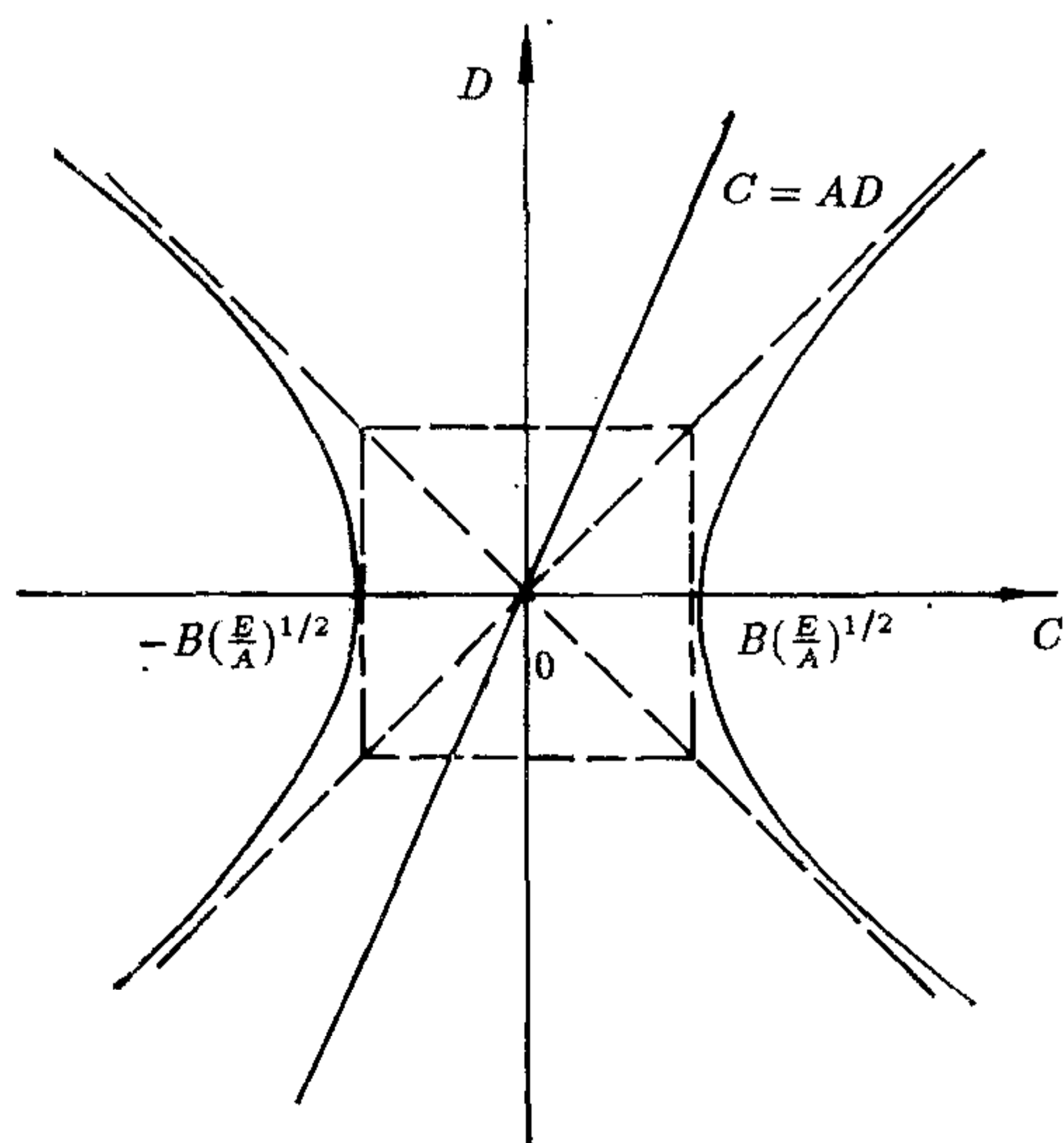


图 1

2) 设  $C < 0$ , 由初等代数(见图1)可知,当  $A \leq 1$  时式(2.5)的解为空集. 故只需考虑  $A > 1$  的情况.

作同伦映射

$$H(A, B, C, D, E, t) = \left\{ A, B, tC + (t-1) \frac{B(A+1)}{2} \sqrt{\frac{E}{A(A-1)}}, tD + (t-1)B \sqrt{\frac{E}{A(A-1)}}, E \right\},$$

可知这一分支也是可收缩的.

对于  $n > 5$  的情况,因参数多,复杂性增大,将另文讨论.

### 3 多输入系统

当输入个数增加时,参数增加更快. 因此这里只考虑  $n = 3, m = 2$  的情况. 记稳定反馈集合为  $A^{3,2}$ . 则有

**定理 3.1.**  $A_{3,2}^{3,2}$  是道路连通的, 但不是简单连通的, 因此, 更不是可收缩的.

证明. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^6,$$

$$A + BF = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

于是, 特征多项式为

$$\lambda^3 + (-b - f)\lambda^2 + (bf - ce - a)\lambda + (af - cd).$$

先证明  $A_{3,2}^{3,2}$  是道路联通的.

设  $d > 0$ , 则令

$$\begin{aligned} A &= (bf - ce - a), \quad B = -b - f, \\ C &= af - cd, \quad D = d, \quad E = e, \quad F = f. \end{aligned}$$

显见, 这是一个微分同胚. 并且有

$$\begin{aligned} A_{3,2}^{3,2} \cap \{d > 0\} &= \{(A, B, C, D, E, F) \in \mathbf{R}^6 \mid B > 0, \\ &\quad BA - C > 0, C > 0, D > 0\}. \end{aligned}$$

由定理 2.2 的证明可知. 这是一个简单连通集. 同理可证,  $A_{3,2}^{3,2} \cap \{d < 0\}$  也是一个简单连通集.

下面证明存在联接这两部分的路径. 首先, 存在  $p \in \{d = 0\} \cap A_{3,2}^{3,2}$ . 不难验证

$$p(a, b, c, d, e, f) = p(+1, -6, -4, 0, 2, 1),$$

就是这样一个点. 其次, 因为  $A_{3,2}^{3,2}$  是一个开集, 所以存在  $\varepsilon > 0$ , 使球

$$\mathcal{B}_\varepsilon(p) \subset A_{3,2}^{3,2}.$$

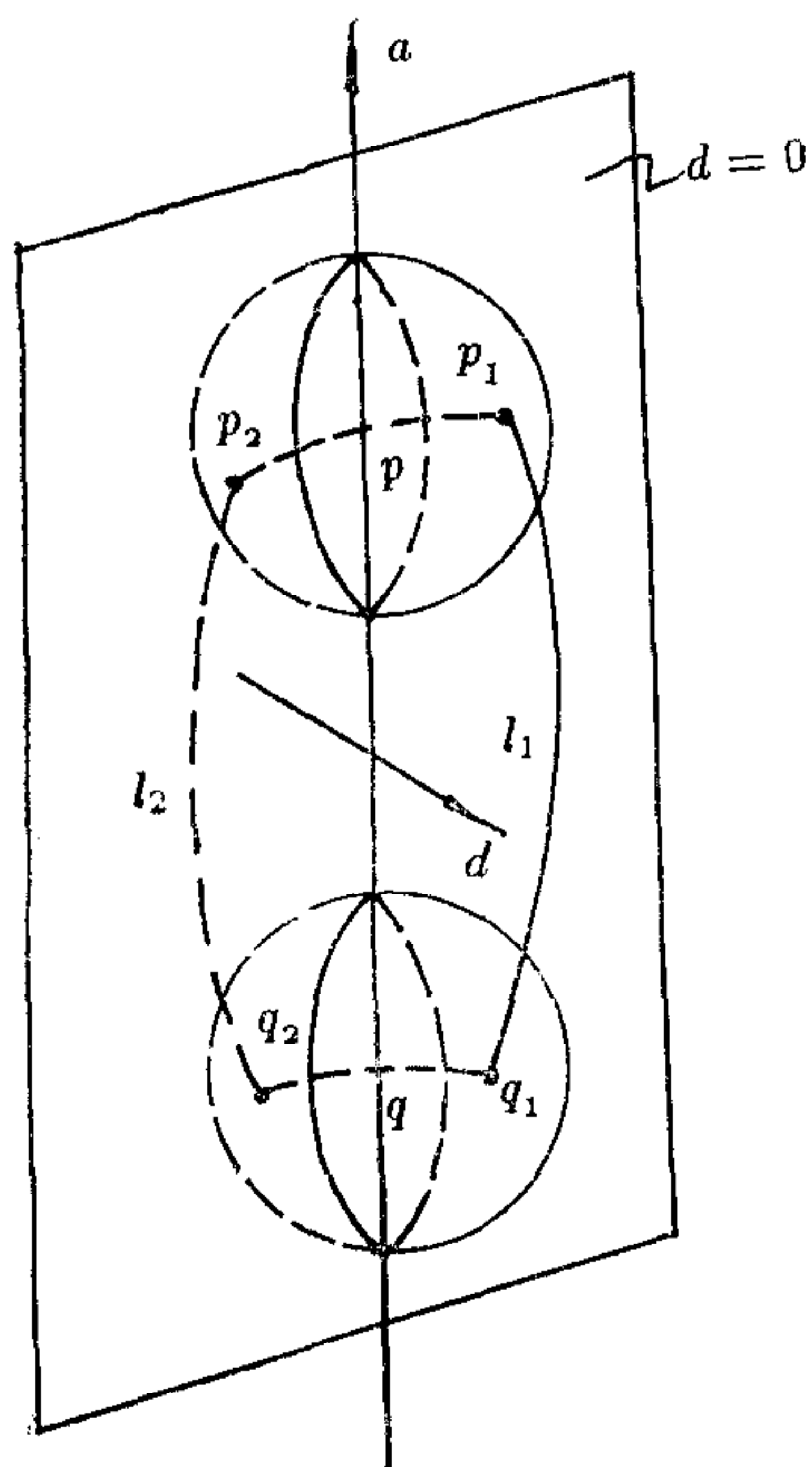


图 2

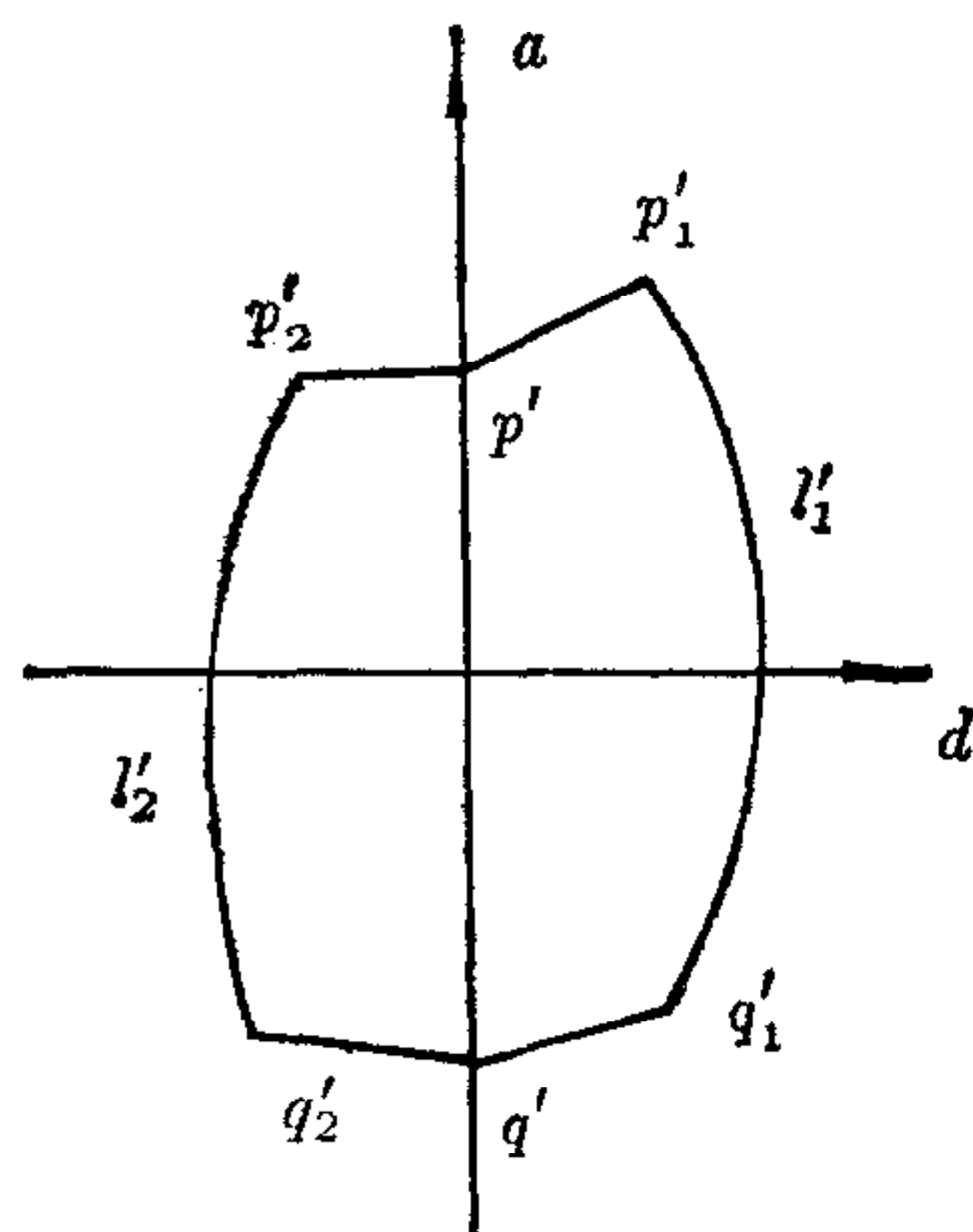


图 3

现在  $\mathcal{B}_\varepsilon(p) \cap \{d < 0\} \neq \phi$ ,  $\mathcal{B}_\varepsilon(p) \cap \{d > 0\} \neq \phi$ , 于是这三个部分道路连通.

由于对任一点  $x \in \{d = 0\} \cap A_i^{3,2}$ , 这样的球均存在, 不难推出  $A_i^{3,2}$  是道路连通的.

现在证明它不是简单连通的. 取  $q = (-1, -4, 0, 0, 0, -1)$ , 不难检验  $q \in A_i^{3,2}$ , 作球  $\mathcal{B}_\varepsilon(q) \subset A_i^{3,2}$ ; 取  $p_1, p_2 \in \mathcal{B}_\varepsilon(p)$ , 使得  $dp_1 > 0$ ,  $dp_2 < 0$ ; 取  $q_1, q_2 \in \mathcal{B}_\varepsilon(q)$ , 使得  $dq_1 > 0$ ,  $dq_2 < 0$ ; 如图 2 所示. 因为  $A_i^{3,2} \cap \{d > 0\}$  是道路连通的, 则存在  $l_1$  联接  $p_1$  与  $q_1$ , 且  $l_1 \subset A_i^{3,2} \cap \{d > 0\}$ . 同理, 作  $l_2$  连接  $p_2$  与  $q_2$ , 且  $l_2 \subset A_i^{3,2} \cap \{d < 0\}$ . 联接  $pp_1, pp_2, qq_1, qq_2$  以形成一个环路. 这个环路投影到  $a-d$  平面, 如图 3 所示, 它是不可收缩的. 因为

$$\{a = 0, d = 0\} \cap A_i^{3,2} = \phi.$$

值得注意的是, 与第 2 节的定理不同, 定理 3.1 并未将  $A_i^{3,2}$  的拓扑性质完全刻划清楚. 实际上, 它只证明了  $A_i^{3,2}$  是道路连通的, 且一阶基本群非平凡. 但一阶基本群  $\pi_1$  究竟是什么? 尚待进一步研究. 笔者的推测是

$$\pi_1 \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

这里  $\mathbb{Z}$  是整数加法群. 有关概念可参见文献[10].

## 4 非线性情况

考虑非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.1)$$

设系统(4.1)的线性近似

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.2)$$

是完全能控的. 这里

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0, \quad B = g(0).$$

如果考虑一阶 Whitney 拓扑<sup>[11]</sup>, 则前述线性系统的结果立即可推广到非线性系统.

**推论 4.1.** 设式(4.1)的线性近似完全能控.

$f(0) = 0$ , 反馈控制

$$u = \alpha(x).$$

$\alpha(0) = 0$ , 则在一阶 Whitney 拓扑下有

- 1)  $A_i^2$  的内点集凸;
- 2)  $A_i^3, A_i^4$  的内点集可收缩;
- 3)  $A_i^5$  的内点集为两个不相交的可收缩集合;
- 4)  $A_i^{3,2}$  的内点集道路连通, 但不是简单连通.

当然, 对于非线性系统, 更有兴趣的应当是在高阶 Whitney 拓扑下进行研究, 这方面的工作将在另文中阐述.

尽管本文只是对一些最简单的情况进行了研究. 但已经可以看出, 反馈空间有丰富的拓扑性质. 其结果将对反馈控制系统的设计, 特别是对系统族问题, 都有一定的理论指导作用.

## 参 考 文 献

- [1] Brockett R. W. Some geometric questions in the theory of linear systems. *IEEE Trans.* 1976, AC-21: 449—464.
- [2] Hazewinkel M. Moduli and canonical form for linear dynamical systems II: the topological case. *Math. Sys. Theory*, 1977, 10(4): 373—385.
- [3] Helmke U. The topology of a moduli space for linear dynamical systems. *Comment. Math. Helvetici*, 1985, 60: 630—655.
- [4] Delchamps D F. Global structure of families of multivariable linear systems with an application to identification. *Math. Systems Theory*, 1985, 18: 329—380.
- [5] Helmke U. Topology of the moduli space for reachable linear dynamical systems: the complex case. *Math. Systems Theory*, 1986, 19: 155—187.
- [6] Ghosh B K, Dayawansa W P. Differential geometric methods in hybrid parametrization of linear dynamical systems. *SIAM J. Contr. Opt.*, 1988, 26(5): 1149—1174.
- [7] Palis J J, W de Melo. Geometric theory of dynamical systems. Springer-Verlag, 1980, Translated by A. K. Manning.
- [8] Willems J L. Stability theory of dynamical systems. John Wiley & Sons, Inc., New York: 1970.
- [9] Kelley J L. General Topology. Springer-Verlag, 1975.
- [10] Massey W S. Algebraic topology: An introduction. Springer-Verlag, 1977.
- [11] Hirsch M W. Differential topology. Springer-Verlag, 1976.

ON THE TOPOLOGICAL STRUCTURE OF STABLE  
FEEDBACK SPACE

CHENG DAIZHAN      QIN HUASHU      HONG YIGUANG

*(Institute of Systems Science, Academia Sinica Beijing 100080 China)*

## ABSTRACT

The topological structure of feedback space for control system is discussed in this paper. Firstly, the linear case is considered. Then the results are generalized to nonlinear case. We define the  $R^{n \times m}$  topology on the set consisting of linear state feedbacks ( $n$  is the dimension of state space,  $m$  is the dimension of output). Under this topology, the geometric structure of the set consisting of stable feedbacks is investigated. It is proved in the paper that the topology structure of the set consisting of stable feedbacks is independent of concrete system. Moreover, there gives the concrete topological structure for those systems with smaller dimension ( $n \leq 5$ ).

**Key words:** Stable feedback, topology, contractible, pathconnected.

程代展 照片及简介见本刊第 17 卷第 2 期。  
秦化淑 照片及简介见本刊第 19 卷第 2 期。  
洪奕光 照片及简介见本刊第 18 卷第 6 期。