第21卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol. 21, No. 3
1995 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1995

分布时滞系统的反馈镇定[1)]

郑 锋 程 勉 高为炳

(北京航空航天大学第七研究室 北京 100083)

摘 要

求解特征矩阵是镇定时滞系统的关键问题，本文给出了系统的特征根的代数重复度与几何重复度均为一般值情况下特征矩阵的求法，即把它归结为求解一组线性代数方程的问题，并得到了该方程组有解及对应于同一特征值的解向量组线性独立的充分条件. 此外，还提出了一种算法，用以处理系统对应于不同特征值的左特征向量线性相关情况下系统的镇定问题.

关键词: 时滞系统，镇定，特征矩阵.

1 引言

考虑如下时滞系统

$$S_d: \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \int_{-r}^{0} \mathrm{d}\alpha(\theta)\boldsymbol{x}(t+\theta) + \int_{-r}^{0} \mathrm{d}\beta(\tau)\boldsymbol{u}(t+\tau), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t) \in R^n$; $\boldsymbol{u}(t) \in R^m$; $\alpha \in BV([-r,0],R^{n\times n})$; $\beta \in BV([-r,0], R^{n\times m})$, $r>0$; $BV([a,b],R^{n_1\times n_2})$ 表示 $[a,b]$ 上的有界变差实函数阵，维数为 $n_1\times n_2$；式(1)中的积分为 Stieltjes 积分. 对于点时滞系统，已有一系列方法解决其镇定问题[1,2]. 对于分布时滞系统，一种有效方法是变换法. 对系统(1)，它利用变换 $\mathscr{T}: C([-r,0],R^n)\times C([-r,0],R^m)\to R^n$，把系统(1)变换为 R^n 中的普通常微分方程描述的系统，从而把系统(1)的镇定问题转化为无时滞线性系统的镇定问题. 这种方法的关键在于变换 $\mathscr{T}$ 的存在性及如何求解(假如存在). 对于只有控制变量具有时滞的线性系统，变换 $\mathscr{T}$ 必定存在且易构造[3,4]；对于状态变量也具有时滞的情况，很早就定义了类似的变换[5]，但由于对所谓的特征矩阵的存在性及求法尚不清楚，变换法一直未得到应用. 直到最近，才由 Fiagbedzi 与 Pearson[1,6] 发现了特征矩阵的求法，但文[1,6]只研究了最简单情形，即系统不稳定特征根的代数重复度为 1，对应于不同特征值的左特征向量线性独立. 本文则试图给出一般情况下(即不稳定特征值的代数重复度与几何重复度均大于或等于 1) 特征矩阵的解法，并给出系统对应于不同特征值的左特征向量线性相关情况下镇定问题的处理方法.

本文于 1992 年 9 月 28 日收到.

1) 国家自然科学基金资助课题.

2 分布时滞系统的特征矩阵

考虑系统(1),引进记号 $\boldsymbol{x}_t(\theta)=\boldsymbol{x}(t+\theta),\boldsymbol{u}_t(\theta)=\boldsymbol{u}(t+\theta),\theta\in[-r,0]$.
假定系统(1)的初始条件为

$$\boldsymbol{x}(\theta)=\boldsymbol{x}_0(\theta),\ \boldsymbol{u}(\theta)=\boldsymbol{u}_0(\theta),\theta\in[-r,0], \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x}_0\in C([-r,0],R^n)$, $\boldsymbol{u}_0\in C([-r,0],R^m)$. 令 $\boldsymbol{u}\in\Omega\subset L_1([0,\infty),R^m)$,据文[7], $\forall\boldsymbol{u}\in\Omega$, 存在唯一的满足初始条件(2)的函数 $\boldsymbol{x}\in X\subset AC([0,\infty),R^n)$, 使得 $\boldsymbol{x}$ 满足式(1). 这里 $AC([0,\infty),R^n)$ 表示$[0,\infty)$上的绝对连续函数类. 定义变换 $\mathscr{T}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z}(t)&=\mathscr{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})(t)\\&=\boldsymbol{x}(t)+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\tau)}\mathrm{d}\alpha(\theta)\boldsymbol{x}(\tau)\mathrm{d}\tau\\&\quad+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A(t+\theta-\tau)}\mathrm{d}\beta(\theta)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{3}$$

显然 $\boldsymbol{z}\in AC([0,\infty),R^n)$, 因而几乎处处可微. 微分式(3)之右端,并利用式(1),容易证明[6]: 当阵 A 满足

$$A=\int_{-r}^{0}e^{A\theta}\mathrm{d}\alpha(\theta) \tag{4}$$

时, 有

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t)=A\boldsymbol{z}(t)+B\boldsymbol{u}(t). \tag{5}$$

其中 $B=\int_{-r}^{0}e^{A\theta}\mathrm{d}\beta(\theta)$. 可以证明[6],在条件(4)下, $\{\boldsymbol{z}(t),t\geqslant 0\}$ 满足式(5)当且仅当 $\{\boldsymbol{x}(t),t\geqslant 0\}$ 满足式(1).

方程(4)称为系统(1)的(左)特征矩阵方程,矩阵A称为系统(1)的(左)特征矩阵. n 维非零行向量 $\boldsymbol{v}$ 如果满足 $\boldsymbol{v}\Delta(s)=0$, $s\in\sigma(S_d)$, 则称 $\boldsymbol{v}$ 为系统 S_d 的对应于特征值 s 的左特征向量,其中 $\Delta(s)=sI-\int_{-r}^{0}e^{s\theta}\mathrm{d}\alpha(\theta)$.

一般说来,方程(4)的解不唯一,称$\Gamma=\{A\in C^{n\times n}:A=\int_{-r}^{0}e^{A\theta}\mathrm{d}\alpha(\theta)\}$为系统(1)的(左)特征矩阵集,这里$C$表示复平面或复数域.

用记号$\sigma(S)$表示某系统S的谱,$\sigma(M)$表示某矩阵M的谱. 系统(1)的谱为$\sigma(S_d)=\{s\in C:\det\Delta(s)=0\}$.

由文[6]中的命题2.2知, $\forall s_k\in\sigma(A)$, s_k 在矩阵A中的几何重复度与它在矩阵 $A_{s_k}\overset{\mathrm{def}}{=}\int_{-r}^{0}e^{s_k\theta}\mathrm{d}\alpha(\theta)$ 中的几何重复度相同.

设 $\Lambda=\{s_k:k=1,2,\cdots,l\}\subset\sigma(S_d)$为复平面上的对称集, s_k 在 $\sigma(S_d)$ 中的代数重复度为 n_k, 对矩阵 A_{s_k} 的几何重复度为 p_k. 设矩阵 A_{s_k} 对应于特征值 s_k 的 p_k 个独立左特征向量为 $\boldsymbol{v}_j^k,j=1,2,\cdots,p_k$. 显然它们也是系统(1)的对应于 s_k 的左特征向量.设阵 A_{s_k} 关于特征值 s_k 的链头为 $\boldsymbol{v}_j^k$ 的根向量链的链长为 q_{kj}. 由文[8,9]知 $\Sigma_{j=1}^{p_k}q_{kj}=n_k$. 这里进一步假定 $\Sigma_{k=1}^{l}n_k=n$. 对于 $\Sigma_{k=1}^{l}n_k\neq n$ 的情形, 可用后面的算法1来处理. 定义

矩阵:

$$\Delta^{(s_k)} = \int_{-r}^{0} e^{s_k\theta}\mathrm{d}\alpha(\theta) - s_k I, k = 1,2,\cdots,l,$$

$$\Delta_j^{(s_k)} = \frac{1}{j!}\int_{-r}^{0} \theta^j e^{s_k\theta}\mathrm{d}\alpha(\theta), k = 1,2,\cdots,l; j \geqslant 1.$$

定理 1. 假设 $\Sigma_{k=1}^{l} n_k = n$. 如果下述关于 $v_{j,i}^k (k = 1,2,\cdots,l; j = 1,2,\cdots,p_k; i = 1,2,\cdots,q_{kj})$ 的代数方程

$$v_{j,1}^k \Delta^{(s_k)} = 0, \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}
&v_{j,2}^k \Delta^{(s_k)} = v_{j,1}^k [I - \Delta_1^{(s_k)}],\\
&v_{j,3}^k \Delta^{(s_k)} = v_{j,2}^k [I - \Delta_1^{(s_k)}] - v_{j,1}^k \Delta_2^{(s_k)},\\
&\vdots\\
&v_{j,q_{kj}}^k \Delta^{(s_k)} = v_{j,q_{kj}-1}^k [I - \Delta_1^{(s_k)}] - \sum_{i=2}^{q_{kj}-1} v_{j,q_{kj}-i}^k \Delta_i^{(s_k)},\\
&k = 1,2,\cdots,l; j = 1,2,\cdots,p_k
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

有解,且向量组 $\{v_{j,i}^k : k = 1,2,\cdots,l; j = 1,2,\cdots,p_k; i = 1,2,\cdots,q_{kj}\}$ 线性独立,则必有 $A \in \Gamma$, 使得 $\sigma(A) = \Lambda$.

证明. 将方程(6),(7)展开,并进行重新组合,可得

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-r}^{0} e^{s_k\theta} v_{j,1}^k \mathrm{d}\alpha(\theta) = s_k v_{j,1}^k,\\
&\int_{-r}^{0} e^{s_k\theta} v_{j,2}^k \mathrm{d}\alpha(\theta) + \int_{-r}^{0} \theta e^{s_k\theta} v_{j,1}^k \mathrm{d}\alpha(\theta) = v_{j,1}^k + s_k v_{j,2}^k,\\
&\int_{-r}^{0} e^{s_k\theta} v_{j,3}^k \mathrm{d}\alpha(\theta) + \int_{-r}^{0} \theta e^{s_k\theta} v_{j,2}^k \mathrm{d}\alpha(\theta) + \int_{-r}^{0} \frac{1}{2}\theta^2 e^{s_k\theta} v_{j,1}^k \mathrm{d}\alpha(\theta) = v_{j,2} + s_k v_{j,3}^k,\\
&\vdots\\
&\int_{-r}^{0} \sum_{i=1}^{q_{kj}} \frac{1}{(q_{kj} - i)!} \theta^{q_{kj}-i} e^{s_k\theta} v_{j,i}^k \mathrm{d}\alpha(\theta) = v_{j,q_{kj}-1}^k + s_k v_{j,q_{kj}}^k,\\
&k = 1,2,\cdots,l; j = 1,2,\cdots,p_k.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

令

$$Q_j^k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} v_{j,1}^k \\ v_{j,2}^k \\ \vdots \\ v_{j,q_{kj}}^k \end{bmatrix} \in C^{q_{kj}\times n}, \quad J_j^k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} s_k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & s_k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & s_k \end{bmatrix} \in C^{q_{kj}\times q_{kj}}. \tag{9}$$

则将式(8)表为矩阵形式

$$\int_{-r}^{0} e^{J_j^k\theta}\mathrm{d}\alpha(\theta) = J_j^k Q_j^k, \ k = 1,2,\cdots,l; j = 1,2,\cdots,p_k.$$

令

$$Q^k = [(Q_1^k)^T, (Q_2^k)^T, \cdots, (Q_{p_k}^k)^T]^T, k = 1,2,\cdots,l,$$

$$J^k = \text{Block diag}\{J_1^k, J_2^k, \cdots, J_{p_k}^k\}, k = 1,2,\cdots,l,$$
$$Q = [(Q^1)^T, (Q^2)^T, \cdots, (Q^l)^T]^T,$$
$$J = \text{Block diag}\{J^1, J^2, \cdots, J^l\}.$$

则有 $\int_{-r}^{0} e^{J\theta}Q\mathrm{d}\alpha(\theta) = JQ$.因向量组$\{v_{j,i}^k: k = 1,2,\cdots,l; j = 1,2,\cdots,p_k; i = 1,2,\cdots, q_{kj}\}$ 线性独立,故矩阵Q可逆,于是有

$$\int_{-r}^{0} Q^{-1}e^{J\theta}Q\mathrm{d}\alpha(\theta) = Q^{-1}JQ.$$

令

$$A = Q^{-1}JQ. \tag{10}$$

则 $A \in \Gamma$, 且 $\sigma(A) = \Lambda$.

注 1. 如果 $l = n, n_k = 1, k = 1,2,\cdots,n$, 则上述定理化为文[6]中的定理 2.1.

注 2. 据对阵 A_{s_k} 的假定,方程(6)总是有解, 并且不妨可取 $v_{j,1}^k = v_j^k$, $k = 1,2,\cdots,l$; $j = 1,2,\cdots,p_k$. 因而向量组 $\{v_{j,1}^k: j = 1,2,\cdots,p_k\}$ 总是线性独立. 但方程(7)未必总是有解.

定理 2. 设

$$\int_{-r}^{0} \mathrm{d}\alpha(\theta)\boldsymbol{x}(t+\theta) = A_0\boldsymbol{x}(t) + \sum_{i=1}^{\rho} A_i\boldsymbol{x}(t - r_i) + \int_{-r}^{0} L(\theta)\boldsymbol{x}(t+\theta)\mathrm{d}\theta,$$

其中 $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_\rho \leqslant r, L \in L_1([-r,0], R^{n\times n})$, $A_i \in R^{n\times n}$, $i = 0,1,2,\cdots,\rho$. 若关于矩阵 A_i 及 $L(\cdot)$ 的可交换性成立:

$$\left.\begin{aligned} &A_iA_j = A_jA_i, \ \forall i,j \in \{0,1,2,\cdots,\rho\}, \\ &A_iL(\theta) = L(\theta)A_i, \forall_i \in \{0,1,2,\cdots,\rho\}, \forall\theta \in [-r,0], \\ &L(\theta_1)L(\theta_2) = L(\theta_2)L(\theta_1), \forall\theta_1,\theta_2 \in [-r,0], \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

则方程(6),(7)必定有解,且 $v_{j,1}^k \neq 0, k = 1,2,\cdots,l; j = 1,2,\cdots,p_k$.

为证定理 2,先证下述更为一般的命题.

引理 1. 设 $M \in C^{n\times n}, \boldsymbol{v}_i \in C^{1\times n}, i = 1,2,\cdots,p$, 其中 p 为某一正整数, $1\leqslant p \leqslant n$, $\{\boldsymbol{v}_i: i = 1,2,\cdots,p\}$ 满足以下方程:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_1M = 0, \\ &\boldsymbol{v}_iM = \boldsymbol{v}_{i-1}, 2 \leqslant i \leqslant p. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{v}_1 \neq 0$. 设 $M_{ij} \in C^{n\times n}(i = 1,2,\cdots,p; j = 1,2,\cdots,i-1)$. 若 $M_{ij}M = MM_{ij}$, 则下述关于 $\bar{\boldsymbol{v}}_i \in C^{1\times n}(i = 1,2,\cdots,p)$ 的方程

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\boldsymbol{v}}_1M = 0, \\ &\bar{\boldsymbol{v}}_iM = \sum_{j=1}^{i-1} \bar{\boldsymbol{v}}_jM_{ij}, \ 2 \leqslant i \leqslant p \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

一定有解,且 $\bar{\boldsymbol{v}}_1 \neq 0$.

证明. 令

$$\bar{\boldsymbol{v}}_i = \sum_{j=1}^{i} \boldsymbol{v}_j\overline{M}_{ij}, \ i = 1,2,\cdots,p, \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}&\overline{M}_{(i+1)(j+1)}=\sum_{k=j}^{i}\overline{M}_{kj}M_{(i+1)k},\ i=1,2,\cdots,p-1;j=1,2,\cdots,i,\\&\overline{M}_{11}=I,\ \overline{M}_{i1}=0,2\leqslant i\leqslant p.\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

首先，用归纳法证明由式(14)，(15)定义的向量组 $\{\bar{v}_i:i=1,2,\cdots,p\}$ 一定满足式(13)。

因为有 $\bar{v}_1=v_1$，$\bar{v}_2=v_2M_{21}$。利用M与M_{ij}的可交换性易得

$$\bar{v}_1M=0,$$

$$\bar{v}_2M=v_2M_{21}M=v_2MM_{21}=v_1M_{21}=\bar{v}_1M_{21},$$

即 $\bar{v}_1$ 与 $\bar{v}_2$ 满足式(13)的前两个方程，且 $\bar{v}_1=v_1\neq 0$。

设 $\bar{v}_1,\bar{v}_2,\cdots,\bar{v}_i(2\leqslant i\leqslant p-1)$ 满足式(13)的前 $i(i\geqslant 2)$ 个方程，则可断言 $\bar{v}_1$，$\bar{v}_2,\cdots,\bar{v}_i,\bar{v}_{i+1}$ 必定满足式(13)的前 $i+1$ 个方程。注意到由式(15)定义的 $\overline{M}_{kj}$ 将为 $M_{i_1i_2}(i_1=2,3,\cdots,p;i_2=1,2,\cdots,i_1-1)$ 的多项式，故M与 $\overline{M}_{kj}$ 亦可交换。因此

$$\begin{aligned}\bar{v}_{i+1}M&=\sum_{j=1}^{i+1}v_j\overline{M}_{(i+1)j}M=\sum_{j=1}^{i+1}v_jM\overline{M}_{(i+1)j}=\sum_{j=2}^{i+1}v_{j-1}\overline{M}_{(i+1)j}\\&=\sum_{j=1}^{i}v_j\overline{M}_{(i+1)(j+1)}=\sum_{j=1}^{i}v_j\Big[\sum_{k=j}^{i}\overline{M}_{kj}M_{(i+1)k}\Big]\\&=\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=1}^{k}v_j\overline{M}_{kj}M_{(i+1)k}=\sum_{k=1}^{i}\bar{v}_kM_{(i+1)k}.\end{aligned}$$

这正是式(13)的第$(i+1)$个方程。由数学归纳法原理知，由式(14)，(15)定义的 $\{v_i:i=1,2,\cdots p,\}$ 必满足方程(13)。

定理 2 的证明。由于 $\Delta^{(s_k)}=A_{s_k}-s_kI$，又因 A_{s_k} 关于 s_k 的链头为 v_j^k 的根向量链的链长为 q_{kj}，则下述关于 $w_{j,i}^k(1\leqslant i\leqslant q_{kj})$ 的方程

$$\left.\begin{aligned}&w_{j,1}^k\Delta^{(s_k)}=0\\&w_{j,i}^k\Delta^{(s_k)}=w_{j,i-1}^k\quad 2\leqslant i\leqslant q_{kj}\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

必有非零解，实际上，$\{w_{j,i}^k:i=1,2,\cdots,q_{kj}\}$ 正是 A_{s_k} 的一个根向量链[9]。由式(11)容易看出

$$\Delta^{(s_k)}[I-\Delta_1^{(s_k)}]=[I-\Delta_1^{(s_k)}]\Delta^{(s_k)},\Delta^{(s_k)}\Delta_i^{(s_k)}=\Delta_i^{(s_k)}\Delta^{(s_k)},i\geqslant 2.\tag{17}$$

由式(16)，(17)及引理 1 立即得到定理 2。

定理 3. 如果条件(11)成立，对给定的 $k\in\{1,2,\cdots,l\}$，矩阵 $I-\Delta_1^{(s_k)}$ 非奇异，则向量组 $\{v_{j,i}^k:j=1,2,\cdots,p_k;i=1,2,\cdots,q_{kj}\}$ 线性独立。

证明。首先由定理 2 及注 2 知，方程(6)，(7)必定有解，并且 $v_{j,1}^k$ 可以选取为 $v_{j,1}^k=v_j^k$。由式(6)，(7)及(17)可得

$$\left.\begin{aligned}&v_{j,i}^k[\Delta^{(s_k)}]^{i-1}=v_{j,1}^k[I-\Delta_1^{(s_k)}]^{i-1},\ i\geqslant 1,\\&v_{j,i}^k[\Delta^{(s_k)}]^{i}=0,\ i\geqslant 1.\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

现假设 $\{v_{j,i}^k:j=1,2,\cdots,p_k;i=1,2,\cdots,q_{kj}\}$ 线性相关，即

$$\sum_{j=1}^{p_k}\sum_{i=1}^{q_{kj}}c_{ji}v_{j,i}^k=0.\tag{19}$$

其中 $c_{ji}\in R,c_{ji}(j=1,2,\cdots,p_k;i=1,2,\cdots,q_{kj})$ 不全为零。令 $\delta=\max\{i:c_{ji}\neq 0,$

$j=1,2,\cdots,p_k; i=1,2,\cdots,q_{kj}\}$. 则 $\delta>1$. 否则式(19)化为 $\Sigma_{j=1}^{k}c_{j1}\boldsymbol{v}_{j,1}^{k}=0$, 即 $\{\boldsymbol{v}_{j,1}^{k}: j=1,2,\cdots,p_k\}$ 线性相关,矛盾(见注 2). 在式(19)两边同时右乘以$[\Delta^{(s_k)}]^{\delta-1}$,并利用式(18),可得

$$\sum_{j=1}^{p_k} c_{j\delta}\boldsymbol{v}_{j,\delta}^{k}[\Delta^{(s_k)}]^{\delta-1}=\sum_{j=1}^{p_k} c_{j\delta}\boldsymbol{v}_{j,1}^{k}[I-\Delta_1^{(s_k)}]^{\delta-1}=0.$$

由于矩阵 $I-\Delta_1^{(s_k)}$ 非奇异, 故有$\sum_{j=1}^{p_k}c_{j\delta}\boldsymbol{v}_{j,1}^{k}=0$. 由 δ 的定义, $c_{j\delta}(j=1,2,\cdots,p_k)$ 不全为零,故 $\{\boldsymbol{v}_{j,1}^{k}: j=1,2,\cdots,p_k\}$ 线性相关. 矛盾. 证毕.

3 分布时滞系统的镇定

对于给定的正数 ν_0,定义系统(1)的不稳定谱为

$$\sigma_{us}(S_d)=\{s\in C:\det\Delta(s)=0,\ \mathrm{Re}(s)\geqslant-\nu_0\}.$$

这里先介绍扩维变换方法[6]的基本结果,以备后面使用.

设对称集 $\Lambda_i\subset\sigma(S_d)(i=1,2,\cdots,N)$, $\#\Lambda_i=n$, 这里#表示集合的基数. 假定对每个 Λ_i, 存在 $A^{(i)}\in\Gamma$ 使得 $\sigma(A^{(i)})=\Lambda_i$. 定义 $\Lambda_c=\bigcup_{i=1}^{N}\Lambda_i$, $A_c=\mathrm{Block\ diag}\{A^{(1)}, A^{(2)},\cdots,A^{(N)}\}$ 及算子 $\mathrm{Aug}:R^n\to R^{nN}$ 为 $\mathrm{Aug}(\boldsymbol{\omega})=[\boldsymbol{\omega}^T,\boldsymbol{\omega}^T,\cdots,\boldsymbol{\omega}^T]^T\in R^{nN}$, $\forall\boldsymbol{\omega}\in R^n$. 构造变换

$$\boldsymbol{z}_c(t)=\mathscr{T}_c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})(t)=\mathrm{Aug}(\boldsymbol{x}(t))+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A_c(t+\theta-\tau)}\mathrm{Aug}(\mathrm{d}\alpha(\theta)\boldsymbol{x}(\tau))\mathrm{d}\tau$$
$$+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A_c(t+\theta-\tau)}\mathrm{Aug}(\mathrm{d}\beta(\theta)\boldsymbol{u}(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

容易证明[6], $\boldsymbol{x}$ 满足式(1)当且仅当 $\boldsymbol{z}_c$ 满足方程

$$\dot{\boldsymbol{z}}_c(t)=A_c\boldsymbol{z}_c(t)+B_c\boldsymbol{u}(t). \tag{20}$$

其中 $B_c=\left[\left(\int_{-r}^{0}e^{A^{(1)}\theta}\mathrm{d}\beta(\theta)\right)^T\left(\int_{-r}^{0}e^{A^{(2)}\theta}\mathrm{d}\beta(\theta)\right)^T\cdots\left(\int_{-r}^{0}e^{A^{(N)}\theta}\mathrm{d}\beta(\theta)\right)^T\right]^T$.

引理 2. 设 $\forall i,j\in\{1,2,\cdots,N\}$, $i\neq j$, $\sigma(A^{(i)})\cap\sigma(A^{(j)})=\varnothing$. 如果系统(1)谱能控,则系统(20)完全能控.

证明. 注意到系统(1)谱能控意味着

$$\mathrm{rank}\left[\Delta(s),\int_{-r}^{0}e^{s\theta}\mathrm{d}\beta(\theta)\right]=n,\ \forall s\in C.$$

则其余的证明步骤完全仿效文[6]中定理 3.1 的证明.

引理 3.[6] 令

$$\boldsymbol{u}(t)=-F_c\boldsymbol{z}_c(t)=-F_c\left[\mathrm{Aug}(\boldsymbol{x}(t))+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A_c(t+\theta-\tau)}\mathrm{Aug}(\mathrm{d}\alpha(\theta)\boldsymbol{x}(\tau))\mathrm{d}\tau\right.$$
$$\left.+\int_{-r}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{A_c(t+\theta-\tau)}\mathrm{Aug}(\mathrm{d}\beta(\theta)\boldsymbol{u}(\tau))\mathrm{d}\tau\right], \tag{21}$$

其中 $F_c\in C^{m\times nN}$. 则闭环系统(1),(21)的谱 $\sigma_c(S_d)$ 为

$$\sigma_c(S_d)=\left(\sigma(S_d)\Big\backslash\bigcup_{i=1}^{N}\sigma(A^{(i)})\right)\bigcup\sigma(A_c-B_cF_c).$$

由引理 3 可以看出，反馈律(21)实质上是把系统(1)的某些极点 $\bigcup_{i=1}^{N}\sigma(A^{(i)})$ 移到复平面上的适当位置：$\sigma(A_c-B_cF_c)$，而其它极点则不变．引理 2 则表明，在适当条件下，系统(1)的这些极点可以任意移动．特别是，如果能取 Λ_i，使得 $\bigcup_{i=1}^{N}\Lambda_i\supset\sigma_{us}(S_d)$，则可把 $\sigma_{us}(S_d)$ 移到 $C^-_{-\nu_0}\overset{\text{def}}{=\!=}\{s\in C:\mathrm{Re}(s)<-\nu_0\}$ 内，于是采用反馈律(21)可将系统(1)镇定．

下面讨论系统(1)的对应于不同特征值的左特征向量线性相关情况下系统的镇定问题．

记系统 (1)的不稳定极点集为 $\sigma_{us}(S_d)=\{s_k:k=1,2,\cdots,N_1\}$，其中 $s_i\neq s_j$，当 $i\neq j$．s_k 在 $\sigma(S_d)$ 中的代数重复度为 n_k，对矩阵 A_{s_k} 的几何重复度为 p_k．矩阵 A_{s_k} 的关于特征值 s_k 的第 j 个独立左特征向量记作 $v_j^k,j=1,2,\cdots,p_k$．阵 A_{s_k} 以 v_j^k 为链头的根向量链的链长为 q_{kj}．记 $V_{s_k}=\{v_{j,i}^k:j=1,2,\cdots,p_k;i=1,2,\cdots,q_{kj}\}$ 为方程(6)，(7)对应于特征值 s_k 的解向量组．由定理 3 知，在一定条件下，可以保证向量组 V_{s_k} 中内部的各个向量线性独立，然而两个向量组 V_{s_i} 与 $V_{s_j}(s_i\neq s_j)$ 之间却可能线性相关．另一方面，为了利用引理 3 来镇定系统(1)，当 V_{s_i} 与 V_{s_j} 属于同一 Λ_k 时，却要求它们线性独立．为此，提出下述算法，以解决这个矛盾．

假设 1. 系统(1)谱能控，$\forall k\in\{1,2,\cdots,N_1\},n_k<n$．

算法．

(i) 对每一 $s_k\in\sigma_{us}(S_d)$，判断方程(6),(7)是否有解．如无解，算法结束；如有解，构造向量组 V_{s_k}，到第(ii)步．

(ii) 对每一 $s_k\in\sigma_{us}(S_d)$，判断向量组 V_{s_k} 是否线性相关．如线性相关，则算法结束；如线性独立，到第 (iii) 步．

(iii) 把集合$\{1,2,\cdots,N_1\}$划分为N个部分，即 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_N$，使得：(a) $\bigcup_{i=1}^{N}\pi_i=\{1,2,\cdots,N_1\}$；(b) $\forall i,j\in\{1,2,\cdots,N\},i\neq j,\pi_i\cap\pi_j=\varnothing$；(c) $\Sigma_{k\in\pi_i}n_k\leqslant n$；(d)向量组 $V^i=\bigcup_{k\in\pi_i}V_{s_k}$ 线性独立．到第 (iv) 步．

(iv) 构造集合 $\bar\sigma_i\subset\sigma(S_d)\backslash\sigma_{us}(S_d),i=1,2,\cdots,N$，使得 $\forall i,j\in\{1,2,\cdots,N\},i\neq j,\bar\sigma_i\cap\bar\sigma_j=\varnothing$．若 $\Sigma_{k\in\pi_i}n_k=n$，则令 $\bar\sigma_i=\varnothing$；否则对每一 $s_k\in\bar\sigma_i$，解方程

$$\begin{aligned}
&v_{j,1}^k\Delta^{(s_k)}=0,\\
&v_{j,2}^k\Delta^{(s_k)}=v_{j,1}^k[I-\Delta_1^{(s_k)}],\\
&v_{j,3}^k\Delta^{(s_k)}=v_{j,2}^k[I-\Delta_1^{(s_k)}]-v_{j,1}^k\Delta_2^{(s_k)},\\
&\qquad\vdots\\
&v_{j,\bar q_{kj}}^k\Delta^{(s_k)}=v_{j,\bar q_{kj}-1}^k[I-\Delta_1^{(s_k)}]-\sum_{i=2}^{\bar q_{kj}-1}v_{j,\bar q_{kj}-i}^k\Delta_i^{(s_k)},\\
&j=1,2,\cdots,\bar p_k.
\end{aligned}$$

并构造向量组 $\bar V^i=\bigcup_{s_k\in\bar\sigma_i}\bar V_{s_k}$，其中 $\bar V_{s_k}=\{v_{j,i}^k:j=1,2,\cdots,\bar p_k;i=1,2,\cdots,\bar q_{kj}\}$，使得：

(a) $\displaystyle\sum_{k\in\pi_i}n_k+\sum_{s_k\in\bar\sigma_i}\sum_{j=1}^{\bar p_k}\bar q_{kj}=n$；

(b) 向量组 $V^i \cup \bar{V}^i$ 线性独立.

若这样的极点集 $\bar{\sigma}_i(i=1,2,\cdots,N)$ 不存在,则算法结束;否则到第(v)步.

(v) 构造集合 $\Lambda_i=\{s_j:j\in\pi_i\}\cup\bar{\sigma}_i$, $i=1,2,\cdots,N$. 对每个 Λ_i, 据式(10)构造矩阵 $A^{(i)}$. 到第 (vi) 步.

(vi) 构造矩阵 F_c, 使得 $\sigma(A_c-B_cF_c)\subset C^-_{-\nu_0}$. 到第(vii)步.

(vii) 据式(21)构造控制律. 算法结束.

注 3. 在算法的第 (iv) 步中,当 $s_k\in\bar{\sigma}_i$ 时,取 $\bar{p}_k\leqslant p_k$, $\bar{q}_{kj}\leqslant q_{kj}$ 是为了保证第 (iv) 步的条件(a)易于成立. 如此,若第 (iv) 步的条件 (b) 成立,则矩阵 $A^{(i)}$ 必定存在,而 $\bar{p}_k$ 及 $\bar{q}_{kj}$ 的取法并不影响系统的可镇定性,因为 s_k 是稳定极点.

注 4. 第(vi)步中 F_c 的存在性是由引理 2 及假设 1 来保证的,因为由 π_i 及 $\bar{\sigma}_i$ 的构造易知,当 $i\neq j$ 时, $\Lambda_i\cap\Lambda_j=\varnothing$. 这里关于"系统谱能控"的条件可以减弱为"系统(1)谱可镇定, 并且在谱集 $\cup_{i=1}^N\bar{\sigma}_i$ 上是谱可控的",即

$$\operatorname{rank}\left[\Delta(s),\ \int_{-r}^{0}e^{s\theta}\mathrm{d}\beta(\theta)\right]=n,\ \forall s\in C^+_{-\nu_0}\cup\bigcup_{i=1}^{N}\bar{\sigma}_i.$$

注 5. 在上述算法中,并未要求 Λ_i 为对称集,由此得到的控制器可能是复数域上的.

注 6. 本文及文献[6]所示方法的缺点是要求计算系统的不稳定特征根,这是非常困难的. 但是,关于时滞系统特征根的计算,最近已经开发出了行之有效的软件包[10], 使这一困难得以克服.

参 考 文 献

[1] Fiagbedzi YA, Pearson A E. Feedback stabilization of linear autonomous time lag systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1986, **31**:847—855.

[2] Zheng F, Cheng M, Gao WB. Feedback stabilization of linear systems with point delays in state and control variables. IFAC 1993 World Congress, Sydney Australia, July 1993.

[3] Kwon WH, Pearson AE. Feedback stabilization of linear systems with delayed control. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1980, **25**:266—269.

[4] Artstein Z. Linear systems with delayed controls: A reduction. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1982, **27**:869—879.

[5] Slater GL, Wells WR. On the reduction of optimal time delay systems to ordinary ones. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1972, **17**:154—155.

[6] Fiagbedzi YA, Pearson A E. A multistage reduction technique for feedback stabilizing distributed time-lag systems, *Automatica*, 1987, **23**:311—326.

[7] Hale J K. Theory of Functional Differential Equation. Springer-Verlag, New York: 1977.

[8] 高为炳. 运动稳定性基础. 高等教育出版社,1987.

[9] 黄 琳. 系统与控制理论中的线性代数. 科学出版社,1984.

[10] Manitius A, Tran H, Payre G, Roy R. Computation of eigenvalues associated with functional differential equations. *SIAM J. Scientific and Statistical Computing*, 1987, (8):222—247.

FEEDBACK STABILIZATION OF LINEAR SYSTEMS WITH DISTRIBUTED DELAYS IN STATE AND CONTROL VARIABLE

ZHENG FENG　CHENG MIAN　GAO WEIBING
(The 7th Research Division, Beijing University of Aeronautics & Astronautics Beijing 100083 *China)*

ABSTRACT

Solving characteristic matrix equation (CME) of a linear retarded system is a key problem for stabilizing the system by use of reduction technique. This paper gives the solution of CME under the general condition that the eigenvalues occur in the spectrum of the system with algebraic and geometric multiplicities being greater than or equal to one. The main idea is to transform CME into a group of linear algebraic equations (LAE). The sufficient conditions for the existence of the solution of LAE and for the independence of the solution vectors of LAE corresponding to a given eigenvalue are established. When the left eigenvectors of the system corresponding to different eigenvalues are linearly dependent, an algorithm for dealing with the stabilization problem is presented.

Key words: Retarded system, feedback stabilization, characteristic matrix equation.

郑　锋　1963年生于河南省光山县，1986年毕业于西安电子科技大学电子工程系．1987—1990年在桂林电子工业学院工作．1990—1993年为北京航空航天大学第七研究室博士生，现为清华大学电机工程系博士后．研究兴趣为变结构控制、随机系统和时滞系统等．

程　勉，**高为炳**　简介及照片见本刊第17卷第6期．