第21卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol. 21, No. 3
1995 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1995

多重(*A*,*B*)-不变子空间及多频采样控制1)

孙振东 夏小华 高为炳

(北京航空航天大学第七研究室 北京 100083)

摘 要

本文提出多重(A,B)-不变子空间的概念,并给出其判据和几个基本性质. 利用这些结果,得到一类多频采样干扰解耦问题可解的充要条件.

关键词: 多重(A, B)-不变子空间,多频采样系统,干扰解耦.

1 引言

多频采样控制 (multirate sampling control)是近年来提出的一种新的控制策略[1,2]. 它不但可以提高系统的稳定增益裕度[3],还在同时镇定问题上具有更强的能力[4].此外,也为研究控制系统新问题提供了可能的工具. 多频采样干扰解耦 (MSDDP)[5] 就是这样的新问题之一. MSDDP 的一个重要背景是机械臂末端的位置控制.在一些实际应用中,受扰机械臂的若干计算机控制环节常常采用不同的采样频率,人们也往往只关心机械臂末端在一定时刻的确切位置.

多频采样控制在研究方法上呈多样性. 已有的方法主要可概括为频域中的多项式分析和实域中的状态空间分析[2]. 本文将结合多频采样控制中的一些问题, 提出几何方法框架内的一些最基本的概念,例如,多重 (A,B)-不变子空间. 众所周知,(A,B)-不变子空间是 Wonham 几何理论[6]中的核心概念之一. 我们将证明多重(A,B)-不变子空间作为 (A,B)-不变子空间的自然推广与多频采样控制有着天然的联系. 这里, 首先从一般的角度研究m重(A,B)-不变子空间的概念、性质、计算等;然后建立m重 (A,B)-不变子空间与 MSDDP 的关系;最后利用m重(A, B)-不变子空间刻划 MSDDP 的可解性.

2 多重(A,B)-不变子空间

本文中, $A:\mathscr{R}^n \to \mathscr{R}^n$, $B:\mathscr{U} = \mathscr{R}^q \to \mathscr{R}^n$ 为给定的实矩阵. $\mathscr{B} = \mathrm{Im} B$ 表矩阵 B 的象集,$\mathscr{N}$表自然数集,$\mathscr{W}$,$\mathscr{V}$,$\mathscr{K}$等表 $\mathscr{R}^n$ 的子空间.

下面给出的多重 (A,B)-不变子空间概念是 (A,B)-不变子空间的一个自然推广.

定义1. 设 $m \in \mathscr{N}$,给定 $\mathscr{R}^n$ 的子空间 $\mathscr{V}$,称$\mathscr{V}$为m重(A,B)-不变子空间, 若存

本文于1993年12月27日收到.

1) 航空科学基金资助的课题. 初稿曾在1994年控制与决策年会上宣读.

在 $\mathscr{R}^n$ 到$\mathscr{U}$的线性映射序列 $F_1,\cdots,F_m$,使得$(A+BF_m)(A+BF_{m-1})\cdots(A+BF_1)\mathscr{V}\subseteq\mathscr{V}$.

显然,当 $m=1$ 时, 1 重(A,B)-不变子空间即为通常的(A,B)-不变子空间[6].

我们知道,$\mathscr{V}$是 (A,B)-不变子空间的一个判据是 $A\mathscr{V}\subseteq\mathscr{V}+\mathscr{B}$. 多重 (A,B)-不变子空间亦有类似的判据. 首先需要以下引理.

引理1. 给定 $\mathscr{R}^n$ 的二子空间 $\mathscr{W},\mathscr{V}$. 则存在矩阵 $F:\mathscr{R}^n\to\mathscr{U}$ 使 $(A+BF)\mathscr{W}\subseteq\mathscr{V}$的充分必要条件是 $A\mathscr{W}\subseteq\mathscr{V}+\mathscr{B}$.

证明. 必要性显然.

现证充分性. 设 $\{\boldsymbol{w}_i,i=1,\cdots,n\}$ 是 $\mathscr{R}^n$ 的一组基向量, 而且 $\mathscr{W}=\mathrm{span}\{\boldsymbol{w}_i: i=1,\cdots,l\}$. 不妨设 $l\geqslant 1$.

任取 $i,1\leqslant i\leqslant l$,存在 $v_i\in\mathscr{V},u_i\in\mathscr{U}$,使得

$$A\boldsymbol{w}_i=v_i+Bu_i\quad i=1,\cdots,l.$$

构造 $F:\mathscr{R}^n\to\mathscr{U}$,使得

$$F(\boldsymbol{w}_i)=-u_i,i=1,\cdots,l,F(\boldsymbol{w}_i)=0,i=l+1,\cdots,n.$$

易见 $(A+BF)\mathscr{W}\subseteq\mathscr{V}$. 证毕.

下面的结果给出多重 (A,B)-不变子空间的判据.

定理1. 给定 $\mathscr{V}\subseteq\mathscr{R}^n$,及 $m\in\mathscr{N}$,则$\mathscr{V}$是m重 (A,B)-不变子空间的充分必要条件是$\mathscr{V}$满足

$$A^m\mathscr{V}\subseteq\mathscr{V}+\mathscr{B}+A\mathscr{B}+\cdots+A^{m-1}\mathscr{B}.$$

证明.

必要性. 设阵列 $F_1,\cdots,F_m$ 满足

$$(A+BF_m)\cdots(A+BF_1)\mathscr{V}\subseteq\mathscr{V},$$

将上式右端乘积展开后易得.

充分性. 由

$$A^m\mathscr{V}\subseteq\mathscr{V}+\mathscr{B}+\cdots+A^{m-1}\mathscr{B}=(\mathscr{V}+\mathscr{B}+\cdots+A^{m-2}\mathscr{B})+A^{m-1}\mathscr{B}$$

及引理 1 可知,存在矩阵 $F_1:\mathscr{R}^n\to\mathscr{U}$,使得

$$(A^m+A^{m-1}BF_1)\mathscr{V}\subseteq\mathscr{V}+\mathscr{B}+\cdots+A^{m-2}\mathscr{B}.$$

令 $\mathscr{W}_1=(A+BF_1)\mathscr{V}$,则上式为

$$A^{m-1}\mathscr{W}_1\subseteq\mathscr{V}+\mathscr{B}+\cdots+A^{m-2}\mathscr{B}=(\mathscr{V}+\mathscr{B}+\cdots+A^{m-3}\mathscr{B})+A^{m-2}\mathscr{B}.$$

反复利用引理1,可以得到 $F_i:\mathscr{R}^n\to\mathscr{U}$及$\mathscr{W}_i\subseteq\mathscr{R}^n$,使 $\mathscr{W}_i=(A+BF_i)\mathscr{W}_{i-1}$, $i=2,\cdots,m-1$,且满足

$$A^{m-i}\mathscr{W}_i\subseteq\mathscr{V}+\mathscr{B}+\cdots+A^{m-i-1}\mathscr{B},i=2,\cdots,m-1.$$

显见

$$\mathscr{W}_{m-1}=(A+BF_{m-1})\cdots(A+BF_1)\mathscr{V}.$$

故由 $A\mathscr{W}_{m-1}\subseteq\mathscr{V}+\mathscr{B}$ 可知, 存在 $F_m:\mathscr{R}^n\to\mathscr{U}$, 使得

$$(A+BF)_m\mathscr{W}_{m-1}\subseteq\mathscr{V}.$$

于是

$$(A+BF_m)\cdots(A+BF_1)\mathscr{V}\subseteq\mathscr{V}.$$

证毕.

注.

(i) 引理 1 与定理 1 的证明过程提供了阵列 $F_1,\cdots,F_m$ 的一种构造方法.

(ii) 若 (A,B) 能控,且能控性指数为 r,即

$$r=\min\{i\in\mathscr{N}:\operatorname{rank}(B,AB,\cdots,A^{i-1}B)=n\},$$

则对任意的 $m\geqslant r$,$\mathscr{R}^n$ 的任一子空间均为 m 重(A,B)-不变子空间.

给定 $m\in\mathscr{N}$,记由全体 m 重(A,B)-不变子空间组成的集合为 $\underline{l}^m(A,B;\mathscr{R}^n)$, 简记为 $\underline{l}^m(\mathscr{R}^n)$. 给定 $\mathscr{V}\in\underline{l}^m(A,B;\mathscr{R}^n)$,记

$$\mathscr{F}_m(A,B;\mathscr{V})=\{(F_1,\cdots,F_m):F_i:\mathscr{R}^n\to\mathscr{U},i=1,\cdots,m,$$
$$s.t.(A+BF_m)(A+BF_{m-1})\cdots(A+BF_1)\mathscr{V}\subseteq\mathscr{V}\},$$

简记为 $\mathscr{F}_m(\mathscr{V})$,称为 m 重(A, B)-不变子空间 $\mathscr{V}$ 的同伴集.

由定理 1 的证明过程,可获得多重 (A,B)-不变子空间的同伴集的一种参数刻划[1].

与单重情形相似,在给定的子空间 $\mathscr{K}\subseteq\mathscr{R}^n$ 中存在最大的 m 重(A,B)-不变子空间.

记 $\underline{l}^m(A,B;\mathscr{K})=\{\mathscr{V}\subseteq\mathscr{K}:\mathscr{V}\in\underline{l}(A,B;\mathscr{R}^n)\}$,不难由定理 1 证明,$\underline{l}^m(A,B;\mathscr{K})$ 对子空间的加法是封闭的. 因此,可得以下结论:

命题 1. $\underline{l}^m(A,B;\mathscr{K})$ 中存在唯一的最大元. 记为 $\sup\underline{l}^m(A,B;\mathscr{K})$.

命题 2. 定义子空间序列

$$\mathscr{V}^0=\mathscr{K},$$
$$\mathscr{V}^i=\mathscr{K}\cap(A^m)^{-1}(\mathscr{B}+A\mathscr{B}+\cdots+A^{m-1}\mathscr{B}+\mathscr{V}^{i-1}),\ i\in\mathscr{N},$$

则 $\mathscr{V}^i\subseteq\mathscr{V}^{i-1},i=1,2,\cdots$,且存在 $l,l\leqslant\dim(\mathscr{K})$,使

$$\mathscr{V}^l=\sup\underline{l}^m(A,B;\mathscr{K}).$$

上述命题是 $m=1$ 时有关结果的简单推广,具体证明略.

3 多频采样干扰解耦

本节考虑利用多重 (A,B)-不变子空间理论刻划多频采样控制系统的干扰解耦问题(MSDDP)的可解条件.

给定一个带干扰项的定常采样线性系统:

$$\begin{aligned}x(k+1)&=Ax(k)+Bu(k)+Dv(k),\\ y(k)&=Cx(k).\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $v(k)$ 是干扰项,D 是干扰矩阵.

给定 $m\in\mathscr{N}$,采用周期为 m 的同步时变控制器:

$$u(mj+i-1)=F_ix(mj+i-1),\ i=1,\cdots,m,j=0,1,\cdots.\tag{2}$$

寻求反馈阵列 $F_1,\cdots,F_m$(若存在的话),使系统 (1) 每隔 m 个周期观察到的输出 $y(mj)$ $(j=1,2,\cdots)$ 与干扰无关. 此问题称为周期为 m 的(同步)多频采样干扰解耦问题,简记为 m-MSDDP. 相应的阵列(若存在的话) $(F_1,\cdots,F_m)$ 称为 m-MSDDP 的一个解.

---

1) 参见 4th CDC 论文集 pp96

考察在控制器(2)下闭环系统的数据：

$$y(m(i+1)) = C(A+BF_m)\cdots(A+BF_1)x(mi) + \sum_{j=2}^{m} C(A+BF_m)\cdots(A+BF_j)Dv(mi+j-2) + CDv(mi+m-1),\ i=1,2,\cdots.$$

类似于 DDP 问题的可解性讨论[6]，由以上分析不难得到以下引理。

引理2. m-MSDDP 可解当且仅当存在一个 m 重 (A, B)-不变子空间 $\mathscr{V}$，及 $(F_1,\cdots,F_m)\in\mathscr{F}_m(\mathscr{V})$，满足：

(i) $\mathscr{V}\subseteq\ker C$;

(ii) $\mathrm{Im}D + (A+BF_m)\mathrm{Im}D + \cdots + (A+BF_m)\cdots(A+BF_2)\mathrm{Im}D\subseteq\mathscr{V}$.

上述可解条件不仅依赖于 m 重(A,B)-不变子空间的具体选择，而且依赖于反馈阵列的求取，实际上往往难以验证。利用上一节的两个命题，可得到易验证的可解条件。

定理2. m-MSDDP 可解的充分必要条件是

$$\mathrm{Im}D\subseteq\mathscr{V}_m^*\cap A^{-1}(\mathscr{V}_m^*+\mathscr{B})\cap\cdots\cap A^{-(m-1)}(\mathscr{V}_m^*+\mathscr{B}+\cdots+A^{m-2}\mathscr{B}),$$

其中 $\mathscr{V}_m^*=\sup\underline{I}^m(A,B;\ker C)$.

证明.

必要性. 由引理 2 可知，存在 $\mathscr{V}\in\underline{I}^m(A,B;\ker C)$ 及 $(F_1,\cdots,F_m)\in\mathscr{F}_m(A,B;\mathscr{V})$，使得

$$\mathrm{Im}D + (A+BF_m)\mathrm{Im}D + \cdots + (A+BF_m)\cdots(A+BF_2)\mathrm{Im}D\subseteq\mathscr{V},$$

由此易得

$$\mathrm{Im}D\subseteq\mathscr{V}\cap A^{-1}(\mathscr{V}+\mathscr{B})\cap\cdots\cap A^{-(m-1)}(\mathscr{V}+\mathscr{B}+\cdots+A^{m-2}\mathscr{B}).$$

由于 $\mathscr{V}\subseteq\mathscr{V}_m^*$，必要性得证。

充分性. 令

$$\mathscr{K}_1 = A^{-1}(\mathscr{V}_m^*+\mathscr{B}),$$
$$\vdots$$
$$\mathscr{K}_{m-1} = A^{-(m-1)}(\mathscr{V}_m^*+\mathscr{B}+\cdots+A^{m-2}\mathscr{B}).$$

由 $A\mathscr{K}_1=\mathscr{V}_m^*+\mathscr{B}$ 及引理 1 可知，存在 $F_m:\mathscr{R}^n\to\mathscr{U}$，满足$(A+BF_m)\mathscr{K}_1\subseteq\mathscr{V}_m^*$. 于是

$$A^2\mathscr{K}_2=\mathscr{V}_m^*+\mathscr{B}+A\mathscr{B}=A(\mathscr{K}_1+\mathscr{B}).$$

由于 $\ker A\subseteq\mathscr{K}_1$，故上式表明 $A\mathscr{K}_2\subseteq\mathscr{K}_1+\mathscr{B}$. 再由引理 1 知存在 $F_{m-1}:\mathscr{R}^n\to\mathscr{U}$，使 $(A+BF_{m-1})\mathscr{K}_2\subseteq\mathscr{K}_1$. 于是

$$(A+BF_m)(A+BF_{m-1})\mathscr{K}_2\subseteq\mathscr{V}_m^*.$$

反复利用引理1，知存在 $\mathscr{R}^n\to\mathscr{U}$ 的线性映射列 $F_{m-1},\cdots,F_2$，使

$$(A+BF_{m-i+1})\mathscr{K}_i\subseteq\mathscr{K}_{i-1},\ i=3,\cdots,m-1$$

及

$$(A+BF_m)\cdots(A+BF_2)\mathscr{K}_{m-1}\subseteq\mathscr{V}_m^*.$$

由定理 1 可知

$$A^m\mathscr{V}_m^*\subseteq\mathscr{V}_m^*+\mathscr{B}+\cdots+A^{m-1}\mathscr{B}=A^{m-1}(\mathscr{K}_{m-1}+\mathscr{B}).$$

由于 $\ker(A^{m-1})\subseteq\mathscr{K}_{m-1}$，可知 $A\mathscr{V}_m^*\subseteq\mathscr{K}_{m-1}+\mathscr{B}$. 由引理 1 知存在 $F_1:\mathscr{R}^n\to\mathscr{U}$，使得 $(A+BF_1)\mathscr{V}_m^*\subseteq\mathscr{K}_{m-1}$. 故有

$$(A+BF_m)\cdots(A+BF_1)\mathscr{V}_m^*\subseteq\mathscr{V}_m^*.$$

由引理 2 知 $F_1,\cdots,F_m$ 是 m-MSDDP 的解。 证毕。

注.

(i) 文献[5]考虑了非同步的周期时变反馈律,即控制器为

$$u(mj+i-1)=F_ix(mj),i=1,\cdots,m,j=0,1,\cdots. \tag{3}$$

由文献[5]得到的解耦条件(在本文记号下)为

$$\mathrm{Im}D\subseteq\mathscr{V}_m^*\cap A^{-1}\mathscr{V}_m^*\cap\cdots\cap A^{-(m-1)}\mathscr{V}_m^*,$$

显然强于定理 2 给出的解耦条件. 这表明同步周期反馈策略(2) 较非同步周期反馈策略具有更强的解耦能力.

(ii) 定理 2 的证明给出了可解 m-MSDDP 解的一种构造方法. 由此可以获得 m-MSDDP 解集的一个不依赖于干扰阵 D 的子集的参数刻划[1].

4 例子及结束语

考虑一个带干扰项的四阶采样系统:

$$\begin{aligned}x(k+1)&=Ax(k)+Bu(k)+Dv(k),\\ y(k)&=Cx(k).\end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

记 $\mathscr{V}_1^*$ 与 $\mathscr{V}_2^*$ 分别为包含于 $\ker C$ 中的最大 1 重和 2 重(A,B)-不变子空间. 由命题 2 提供的算法,可算得

$$\mathscr{V}_1^*=0,$$

$$\mathscr{V}_2^*=\mathrm{Im}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

故(1-)SDDP 问题不可解.

注意到 $\mathscr{V}_2^*\cap A^{-1}\mathscr{V}_2^*=0$,文献[5]中给出的异步控制策略(3)亦不可解. 而

$$\mathscr{V}_2^*\cap A^{-1}(\mathscr{V}_2^*+\mathscr{B})=\mathrm{Im}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\mathrm{Im}D,$$

1) 参见 4th CDC 论文集 pp98

由定理2,系统(4)2-MSDDP 可解.

由定理 2 的证明过程可知，形如 $F_1=(x_1,0,x_2,-x_1)$，$F_2=(y_1,-1,1,0)$ (其中 x_1,x_2,y_1 为任给实数)的矩阵对 (F_1,F_2) 均是系统(4)的2-MSDDP 解.

本文提出多重 (A,B)-不变子空间的概念，给出了多重 (A,B)-不变子空间的判据和几个基本性质,指出包含于给定子空间的最大多重 (A,B)-不变子空间的存在性,并给出其算法. 利用上述结果，得到多频采样干扰解耦问题的可解条件. 可解条件表明本文提出的同步周期时变控制器具有较强的干扰解耦能力(Cf.[5]). 相关的讨论是否可推及到多频反馈周期与输出采样周期不一致的情形,是尚待解决的有意义的问题.

已有的工作表明,类似地可提出多重 (A,B)-能控子空间的概念,并建立一套与 (A,B)-能控子空间平行的判别条件和基本性质. 可以指出，多重 (A,B)-能控子空间与多重 (A,B)-不变子空间有着密切的联系. 但目前尚不清楚它与稳定的多频采样干扰解耦(MSDDPS) 的关系. 是否可以利用多重 (A,B)-能控子空间理论刻划 MSDDPS 的可解条件,有待于进一步的探讨.

参　考　文　献

[1] Chammas A B, Leondes C.Pole-placement by piecewise constant output feedback. *Int. J. Control*, 1979, **29**:31—38.

[2] Araki M, Yamamoto K.Multivariable multirate sampled-data systems: state-space description, transfer characteristics and Nyquist criterion. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1986, **30**:145—154.

[3] Colaneri P R, Scattolini R, Sciavini N. Stabilization of multirate sampled-data linear systems. *Automatica*, 1990, **26**:377—380.

[4] Francis B A, Georgiou T T. Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controllers. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1988, **33**:820—832.

[5] Serrano L J, Ramadge P J. Sampled disturbance decoupling with stability using multirate control. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1991, **36**: 1061—1065.

[6] Wonham W M. Linear multivariable control——A geometric approach. Berlin: Spinger-Velag, 1974.

MULTIFEEDBACK (A, B)-INVARIANT SUBSPACES AND MULTIRATE SAMPLED DECOUPLING

Sun Zhendong　　Xia Xiaohua　　Gao Weibing

(The 7th Research Division, Beijing University of Aeronautics & Astronautics Beijing 100083 *China)*

Abstract

In this paper, a new concept of multifeedback (A,B)-invariant subspace is introduced. A criterion and some basic properties are presented. By using these, a necessary and sufficient condition for the solvability of the disturbance decoupling problem of a class of multirate sampled-data systems is obtained.

Key words: Multifeedback(A, B)-invariant subspace, multirate sampled-data system, disturbance decoupling.

孙振东 1990年毕业于青岛海洋大学应用数学系。后入厦门大学系统科学系读研究生，1993年获硕士学位。现为北京航空航天大学第七研究室在读博士生。目前的研究兴趣为非线性控制系统的综合设计理论、线性系统的几何方法。

夏小华 照片及简介见本刊第19卷第6期.

高为炳 照片及简介见本刊第17卷第6期.