第21卷 第3期
1995年 5月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 21, No. 3
May, 1995

离散事件动态系统的D-自动机模型[1)]

郭令忠 李彦平 徐心和 刘长有

（东北大学自控系 沈阳 110006）

摘 要

首先引入D-子集和D-语言的概念,在此基础上给出了一类离散事件动态系统的一般形式化表述——D-自动机模型,并讨论了受控系统的动态行为.最后研究了系统的状态可达性问题.

关键词: 离散事件动态系统，D-子集，D-语言，D-自动机.

1 引言

离散事件动态系统（DEDS）理论经过十多年的发展,目前已形成了多层次、多方面的建模理论和研究方法[1]. 现有的方法都从某一侧面反映了 DEDS 的某些局部特征，因此都有各自的局限性. 纵观这些方法,无非是考虑了 DEDS 的或逻辑、或时间、或随机特征. 而本文则提出一个简单的 DEDS 的代数模型,它能够同时反映系统的上述特征.

这里用一个代数系统——半环(或 Dioid) D 来表征 DEDS 的信息特征，再引入一个集合的 D-子集概念,在此基础上给出一类 DEDS 的一般形式化表述——D-自动机模型. 这类 DEDS 具有离散、异步、非确定性的特点. 这种建模方法的好处是能够在统一的模型框架下处理系统中较多的信息,而且由于引入了代数结构,使得有可能应用现代数学工具来处理 DEDS 的性能分析和控制问题.

2 半环、D-子集及 D-语言

2.1 半环

设D是集合,在D中具有两个内结合(分别记为$\oplus$和$\otimes$). $(D;\oplus,\otimes)$称为半环，如果$\forall x,y,z\in D$，下列关系

(1) $x\oplus y=y\oplus x$;

(2) $x\oplus(y\oplus z)=(x\oplus y)\oplus z$; $x\otimes(y\otimes z)=(x\otimes y)\otimes z$;

(3) $x\otimes(y\oplus z)=(x\otimes y)\oplus(x\otimes z)$; $(x\oplus y)\otimes z=(x\otimes z)\oplus(y\otimes z)$;

(4) 存在零元 ε，$x\oplus\varepsilon=x$;

(5) 存在单位元 e，$x\otimes e=e\otimes x=x$;

(6) $x\otimes\varepsilon=\varepsilon\otimes x=\varepsilon$

本文于1993年3月11日收到.

1) 国家自然科学基金、国家863高技术及国家教委博士点基金资助课题.

成立. 如果还满足

(7) $x \oplus x = x$,

则称半环 D 为 Dioid. 若在 D 中交换律成立,即

(8) $x \otimes y = y \otimes x$,

则称半环(或 Dioid) D 是可换的.

下面是一些半环(或 Dioid) 的例子:

(1) $D = \{0,1\}$, 加法 $1 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1, 0 \oplus 0 = 0$; 乘法 $0 \otimes 1 = 1 \otimes 0 = 0 \otimes 0 = 0$, $1 \otimes 1 = 1$. 则 $(D;\oplus,\otimes)$ 为 Dioid, 事实上这是一个布尔代数.

(2) $D = (R \cup \{+\infty\};\ \min, +)$ 为极小代数,它是一个可换 Dioid.

(3) $D = [0,1]$, $\oplus \triangleq \max$, $\otimes \triangleq x$, 则 D 为半环. 有关半环及 Dioid 的其它理论见文献[2,3].

2.2 D-子集与 D-语言

设 D 为半环, S 为一集合. S 的一个 D-子集 $\tilde{L}$ 定义为一个函数 $\tilde{L}: S \to D$. S 的所有 D-子集的集合记为 D^S.

从集合论的角度可以看出, D-子集为子集的特征函数的推广. 因此,可以考虑 D-子集的交与并. $\forall \tilde{L}$, $\tilde{M} \in D^S$, 定义

$$(\tilde{L} \cap \tilde{M})(s) = \tilde{L}(s) \otimes \tilde{M}(s); \tag{1}$$

$$(\tilde{L} \cup \tilde{M})(s) = \tilde{L}(s) \oplus \tilde{M}(s). \tag{2}$$

现设 Σ 为一有限符号集,或称为事件集. 记 Σ^* 为 Σ 中所有有限串构成的集合, 包括空串 1. 众所周知, Σ^* 在串的连结下构成一个有单位元的半群.

定义 Σ^* 的任意 D-子集为 Σ 的 D-语言. Σ 的所有 D-语言的集合记为 D^{Σ^*}. 由于 D 为半环, Σ^* 为半群,因此,可以定义 D-语言之间的运算如下:

$$(\tilde{L} \oplus \tilde{M})(s) = \tilde{L}(s) \oplus \tilde{M}(s); \tag{3}$$

$$(\tilde{L} \otimes \tilde{M})(s) = \sum_{s = s_1 \cdot s_2} {}_{\oplus}\, \tilde{L}(s_1) \otimes \tilde{M}(s_2)\,. \tag{4}$$

此外,还可以考虑 D^{Σ^*} 的模结构,即 $\forall x \in D$, 定义

$$(x \cdot \tilde{L})(s) = x \otimes \tilde{L}(s). \tag{5}$$

命题 1. D^{Σ^*} 在运算 $\oplus$, $\otimes$ 下构成半环, 且在运算 $\oplus$, $\cdot$ 下成为 D-半模. 当 D 为 dioid 时,即运算 $\oplus$ 满足幂等律时,可以定义 D^{Σ^*} 上的(偏)序关系:

$$\tilde{L} \leqslant \tilde{M} \Leftrightarrow \tilde{L} \oplus \tilde{M} = \tilde{M}. \tag{6}$$

命题 2. 当 D 为 Dioid 时, D^{Σ^*} 在(偏)序关系 $\leqslant$ 下形成一个上半格. 这里称 Σ 的语言 $L = \{s \in \Sigma^* | \tilde{L}(s) \neq \varepsilon\}$ 为 D-语言 $\tilde{L}$ 的逻辑投影.

3 离散事件动态系统的 D-自动机模型

定义一个确定性的 D-自动机 $\tilde{G}$ 为

$$\tilde{G} = (Q, \Sigma, \tilde{\delta}, \tilde{q}_0). \tag{7}$$

其中 Q 为状态集, Σ 为有限事件集, $\tilde{\delta}$ 为 $Q \times \Sigma \times Q$ 的 D-子集, $\tilde{q}_0$ 为 Q 的 D-子集.

$\tilde{G}$ 的确定性表现在:

(1) $\forall q\in Q$, $\sigma\in\Sigma$, 至多存在唯一的 $q'\in Q$, $d\in D$, 使得 $\tilde{\delta}(q,\sigma,q')=d\neq\varepsilon$;

(2) 只存在唯一的 $q\in Q$, 使得 $\tilde{q}_0(q)=d_0\neq\varepsilon$, q 为 $\tilde{G}$ 的初始状态, 记为 q_0, 而 d_0 称为初始信息.

可以将 $\tilde{\delta}$ 扩展为 $Q\times\Sigma^*\times Q$ 的 D-子集如下:

$$\tilde{\delta}^*(q,1,q')=\begin{cases}e, & \text{若 } q=q'\\ \varepsilon, & \text{否则}\end{cases}\quad (1 \text{ 为空串});$$

$$\tilde{\delta}^*(q,s\sigma,q')=\sum_{q''\in Q}{}_{\oplus}\,\tilde{\delta}^*(q,s,q'')\otimes\tilde{\delta}(q'',\sigma,q'). \tag{8}$$

其中 $s\in\Sigma^*$, $\sigma\in\Sigma$.

由 $\tilde{G}$ 生成的 D-语言为

$$\tilde{L}(\tilde{G})(s)=\sum_{q\in Q}{}_{\oplus}\sum_{q'\in Q}{}_{\oplus}\,\tilde{q}_0(q)\otimes\tilde{\delta}^*(q,s,q'). \tag{9}$$

上述 D-自动机模型的思想来自文献[4]. 这种 DEDS 模型包括了各种现有的关于自动机的模型,这些模型可以通过选择适当的半环 D 来获得:

(1) R-W 理论模型[5], $D=\{0,1\}$;

(2) 实时 DEDS 模型[6,8,9], D 为实数或整数集;

(3) 随机模型[9], $D=([0,1],\max,\times)$.

对应不同的半环 D, D-自动机 $\tilde{G}$ 中的加权状态转换函数 $\tilde{\delta}(q,\sigma,q')=d\in D$ 有不同的解释. 在考虑实时 DEDS 问题时, $\tilde{\delta}(q,\sigma,q')=d$ 可以解释为事件 σ 在状态 q 下(可能)发生的时间; 当考虑随机情况时, 则可以解释为事件 σ 在状态 q 下发生的概率为 d; 而当考虑模糊关系时, 又可以解释为事件 σ 对状态 q 的隶属度为 d; 如果仅考虑逻辑关系,则上述 D-自动机退化为 R-W理论中的自动机.

例 1. 考虑一个能实现钻、车、铣、磨四道工序的加工系统. 由于条件限制, "钻"后只能进行"车"或"磨";"磨"后只能进行"铣"; "车"和"铣"后只能进行"钻". 而相应的加工时间分别为 d_1,d_2,d_3,d_4. 现用 D-自动机 $\tilde{G}=(Q,\Sigma,\tilde{\delta},\tilde{q}_0)$ 描述该系统,其中状态集 $Q=\{q_0,q_1,q_2\}$ 表示系统的加工状态; 事件集 $\Sigma=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4\}$ 分别表示钻、车、磨、铣事件; D-子集 $\tilde{\delta}:Q\times\Sigma\times Q\to D$ 为 $\tilde{\delta}(q_0,\sigma_1,q_1)=d_1$, $\tilde{\delta}(q_1,\sigma_2,q_0)=d_2$, $\tilde{\delta}(q_1,\sigma_3,q_2)=d_3$, $\tilde{\delta}(q_2,\sigma_4,q_0)=d_4$; q_0 为初始状态, d_0 为初始时刻; $D=(\mathbb{R}\cup\{+\infty\},\min,+)$取为极小代数.

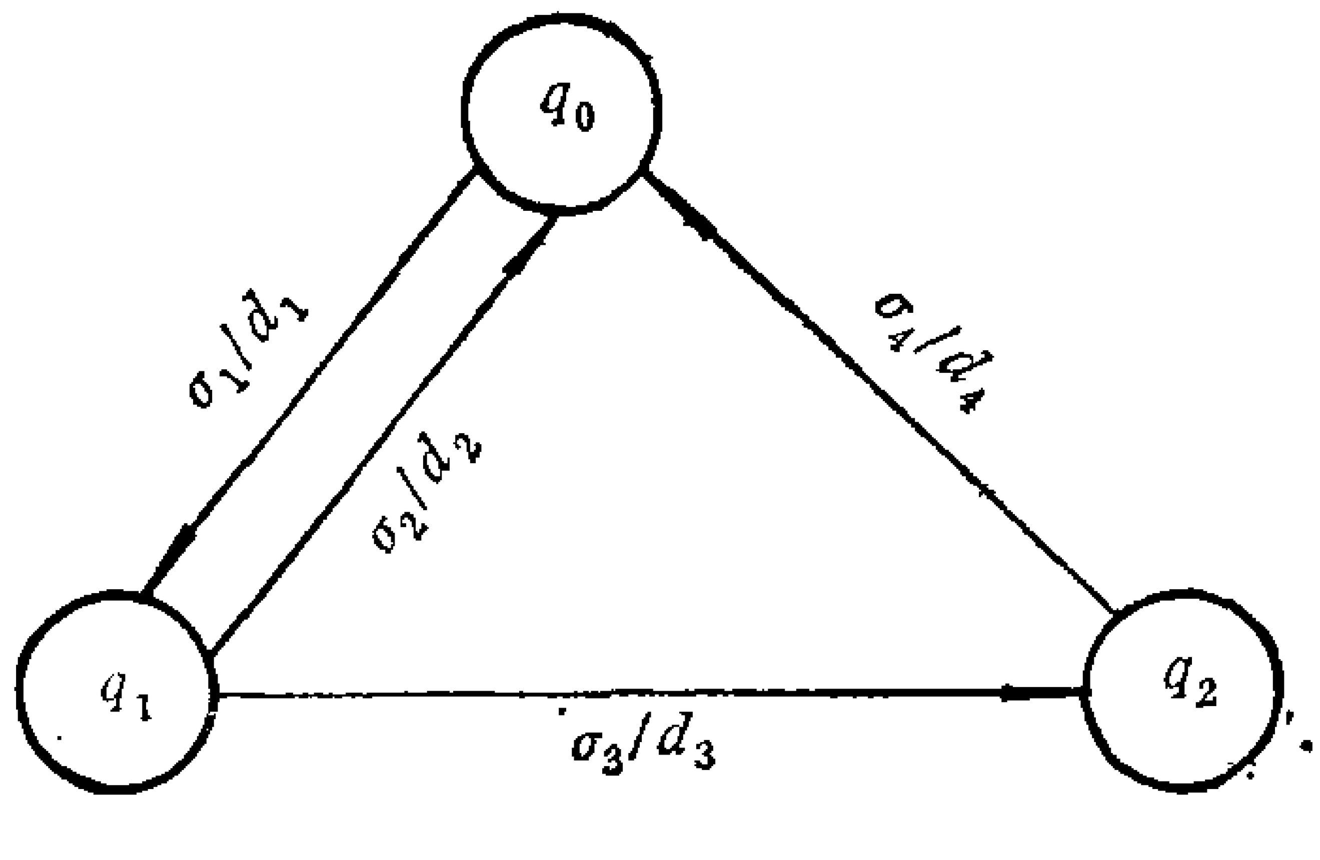


图 1 加工系统的D-自动机模型

图 1 给出了该加工系统的工作过程. 则由 $\tilde{G}$ 生成的 D-语言 $\tilde{L}(\tilde{G})$ 为

$$\tilde{L}(\tilde{G})(\sigma_1)=d_0\otimes d_1,$$

$$\tilde{L}(\tilde{G})(\sigma_1\sigma_2\sigma_1\cdots)=d_0\otimes d_1\otimes d_2\otimes d_1\otimes\cdots,$$

$$\tilde{L}(\tilde{G})(\sigma_1\sigma_3\sigma_4\sigma_1\cdots)=d_0\otimes d_1\otimes d_3\otimes d_4\otimes d_1\otimes\cdots,$$

....

很显然, $\tilde{L}(\tilde{G})(s)$ 表示具体工作过程 $s\in\Sigma^*$ 所需要花费的最短时间. $\tilde{L}(\tilde{G})$ 的逻辑投影 $L(\tilde{G})$ 用正则表达式可表示为

$$L(\tilde{G})=(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3\sigma_4)^*(1+\sigma_1+\sigma_1\sigma_3).$$

其中 1 为空串或空事件.

同 R-W 理论一样[5]，为了引入控制机制，首先将 Σ 划分为不相交的两个子集 $\Sigma_c \cup \Sigma_u$，其中 Σ_c 表示可控事件集，Σ_u 表示不可控事件集.

令 $\Gamma = D^{\Sigma}$ 表示控制模式集，即 $\forall \gamma \in \Gamma$，$\gamma: \Sigma \to D$ ($\forall \sigma \in \Sigma_u$，$\gamma(\sigma) = e$) 为映射. 对 $\sigma \in \Sigma_c$，若 $\gamma(\sigma) = \varepsilon$，表示禁止 σ 发生；若 $\gamma(\sigma) = u \neq \varepsilon$，表示允许 σ 在约束条件 u 下发生. 如果将 $\tilde{\delta}$ 扩展为 $Q \times \Gamma \times \Sigma \times Q$ 的 D-子集

$$\tilde{\delta}_c(q, \gamma, \sigma, q') = \tilde{\delta}(q, \sigma, q') \otimes \gamma(\sigma),$$

则可得到受控 DEDS $\tilde{G}_c$ 为

$$\tilde{G}_c = (Q, \ \Gamma \times \Sigma, \ \tilde{\delta}_c, \ \tilde{q}_0). \tag{10}$$

4 DEDS 的动态行为分析

假定 Q 是有限的，即 $|Q| = n$.

4.1 受控 DEDS 的动态行为

考虑函数 $\tilde{\delta}: Q \times \Sigma \times Q \to D$，若记

$$\tilde{\delta}_{pq}(\sigma) = \tilde{\delta}(p, \sigma, q), \ p, q \in Q, \ \sigma \in \Sigma.$$

则 $\forall p, q \in Q$，$\tilde{\delta}_{pq}$ 为 Σ 的 D-子集. 在 Q 为有限的情况下，可以得到由这些 D-子集构成的矩阵 $(\tilde{\delta}_{pq})_{n \times n}$.

由(8)式知，作为 $Q \times \Sigma \times Q$ 的 D-子集，$\tilde{\delta}$ 可以扩展成 $Q \times \Sigma^* \times Q$ 的 D-子集 $\tilde{\delta}^*$，从而 $\forall p, q \in Q$，$\tilde{\delta}^*_{pq}$ 为 Σ 上的 D-语言.

令 $\tilde{\delta}^* = (\tilde{\delta}^*_{pq})$ 为由 D-语言 $\tilde{\delta}^*_{pq}, p, q \in Q$ 构成的矩阵算子，则

$$\forall s \in \Sigma^*, \tilde{\delta}^*(s) = (\tilde{\delta}^*_{pq}(s))_{n \times n}.$$

由上面的讨论不难得出以下定理.

定理 1. 如果将 $\tilde{q}_0$ 看成 D-上列向量，$\boldsymbol{i}$ 为 D 上单位列向量，则有

$$\tilde{L}(\tilde{G}) = \tilde{q}_0^T \otimes \tilde{\delta}^* \otimes \boldsymbol{i}.$$

由命题 1 知，D^{Σ^*} 为左(右) D-半模，故上式有意义.

对控制模式 $\gamma: \Sigma \to D$，显然它是 Σ 的 D-子集. 如前所述，也可以将其扩展为 Σ^* 的 D-子集，即 D-语言 $\tilde{\gamma}$ 为

$$\tilde{\gamma}(s) = \begin{cases} \gamma(\sigma), & 若 \ s = \sigma \in \Sigma; \\ \varepsilon, & 否则. \end{cases}$$

令 $\tilde{\gamma}^* = \tilde{\gamma}^0 \oplus \tilde{\gamma}^1 \oplus \cdots$，则它满足：

$$\forall s = \sigma_1 \cdots \sigma_k \in \Sigma^*,$$
$$\tilde{\gamma}^*(s) = \tilde{\gamma}(\sigma_1) \otimes \cdots \otimes \tilde{\gamma}(\sigma_k).$$

定理 2. 设 $\tilde{G}$ 为 D-自动机描述的 DEDS，对单一控制模式 $\gamma \in \Gamma$，有

$$\tilde{L}(\tilde{G}_c) = \tilde{L}(\tilde{G}) \cap \tilde{\gamma}^*.$$

定理 3. 设 $\tilde{G}$ 为 D-自动机描述的 DEDS，对多个控制模式 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k \in \Gamma$ (它们有顺序关系)，则有

$$\tilde{L}(\tilde{G}_c) = \tilde{L}(\tilde{G}) \cap (\tilde{\gamma}_1 \oplus \tilde{\gamma}_1 \otimes \tilde{\gamma}_2 \oplus \cdots \oplus \tilde{\gamma}_1 \otimes \tilde{\gamma}_2 \otimes \cdots \otimes \tilde{\gamma}_{k-1} \otimes \tilde{\gamma}_k^*).$$

上述三个定理分别给出了系统未受控、单个控制模式及多个控制模式下系统的行为.

4.2 系统的状态可达性

基于DEDS的D-自动机模型,可以给出系统的任意步可达状态及相应的信息转换方程

$$Q(k+1)=A\otimes Q(k),\ Q(0)=(\tilde{q}_0(q_1)\cdots\tilde{q}_0(q_n))^T, \tag{11}$$

其中 $Q(k+1)=(q_1(k+1),\cdots,q_n(k+1))^T(k=0,1,\cdots)$ 表示系统第 $k+1$ 步的可达状态及相应的信息。具体地说，如果某 $q_i(k+1)\neq\varepsilon$，则表示系统第 $k+1$ 步可能达到状态 $q_i\in Q$，而达到这个状态的最早可能时间或最大概率为 $q_i(k+1)$；如果 $q_i(k+1)=\varepsilon$，则表示系统第 $k+1$ 步不可能达到状态 q_i. 这里

$$A=\begin{pmatrix}\sum\limits_{\sigma\in\Sigma}{}_{\oplus}\tilde{\delta}(q_1,\sigma,q_1)\cdots\sum\limits_{\sigma\in\Sigma}{}_{\oplus}\tilde{\delta}(q_n,\sigma,q_1)\\ \vdots\quad\ddots\quad\vdots\\ \sum\limits_{\sigma\in\Sigma}{}_{\oplus}\tilde{\delta}(q_1,\sigma,q_n)\cdots\sum\limits_{\sigma\in\Sigma}{}_{\oplus}\tilde{\delta}(q_n,\sigma,q_n)\end{pmatrix}.$$

迭代上述方程，可得

$$Q(k+1)=A^{k+1}\otimes Q(0).$$

从而,系统经任意多步的可达状态及相应的信息为

$$\sum_{k=0}^{\infty}{}_{\oplus}Q(k)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}{}_{\oplus}A^k\right)\otimes Q(0)=A^*\otimes Q(0).$$

可以看出,通过计算 A^* 即可求出未受控系统的最终可达状态及信息.

对于受控系统,情况要复杂一些,但仍可以得到系统的可达状态转换方程为

$$Q(k+1)=A_c\otimes Q(k)\oplus b_c. \tag{12}$$

其中

$$A_c=\begin{pmatrix}\sum\limits_{\sigma\in\Sigma_c}{}_{\oplus}\tilde{\delta}(q_1,\sigma,q_1)\otimes\gamma(k+1)(\sigma)\cdots\sum\limits_{\sigma\in\Sigma_c}{}_{\oplus}\tilde{\delta}(q_n,\sigma,q_1)\otimes\gamma(k+1)(\sigma)\\ \vdots\quad\ddots\quad\vdots\\ \sum\limits_{\sigma\in\Sigma_c}{}_{\oplus}\tilde{\delta}(q_1,\sigma,q_n)\otimes\gamma(k+1)(\sigma)\cdots\sum\limits_{\sigma\in\Sigma_c}{}_{\oplus}\tilde{\delta}(q_n,\sigma,q_n)\otimes\gamma(k+1)(\sigma)\end{pmatrix};$$

$$b_c=\begin{pmatrix}\sum\limits_{\sigma\in\Sigma_u}{}_{\oplus}\sum\limits_{i=1}^{n}{}_{\oplus}\tilde{\delta}(q_i,\sigma,q_1)\otimes q_i(k)\\ \vdots\\ \sum\limits_{\sigma\in\Sigma_u}{}_{\oplus}\sum\limits_{i=1}^{n}{}_{\oplus}\tilde{\delta}(q_i,\sigma,q_n)\otimes q_i(k)\end{pmatrix};$$

$\gamma(k+1)$ 为第 $k+1$ 步控制模式.

5 结论

由前述分析可以看出，DEDS 的 D-自动机模型在不增加现有模型复杂性的基础上，

将系统的行为特征通过代数方式表达出来，使得可以在一个统一的框架下处理 DEDS 的各种信息特征(如时间，随机，模糊)和逻辑特征。这种抽象的理论为形成 DEDS 的较为完善的统一化体系打下了基础。

显然，如何用 D-自动机描述并发系统，如何基于 D-自动机模型对 DEDS 进行系统分析、设计和综合，是值得深入研究的方向。

参　考　文　献

[1] 郑大钟，郑应平. 离散事件动态系统理论：现状和展望. 自动化学报，1992，18(2)：129—141.

[2] Cuninghame-Green R A. Minimax algebra. Lecture notes in economics and mathematical systems 166, Springer-Verlag, 1979.

[3] Baccelli F, Cohen G, Olsder G J, Quadrat J P. Synchronization and linearity, an algebra for discrete event systems. Wiley. Chichester, England, 1992.

[4] Eilenberg S. Automata. Languages and Machines, Volume A. Academic Press, New York and London: 1974.

[5] Ramadge P J, Wonham W M. Supervisory control of a class of discrete event processes. *SIAM J. Control and Optimization*, 1987, 25(1): 201—230.

[6] Brave I, Heymann M. Formulation and control of real time discrete event systems. Proc. of 27th IEEE CDC, 1988.

[7] Golaszewski C, Ramadge P J. On the control of real time discrete event systems. Proc. of CISS, 1989.

[8] Garg V K. An algebra approach to modeling probabilistic discrete event systems. Proc. of 31st IEEE CDC, 1992.

MODELING DISCRETE EVENT DYNAMIC SYSTEMS WITH D-AUTOMATA

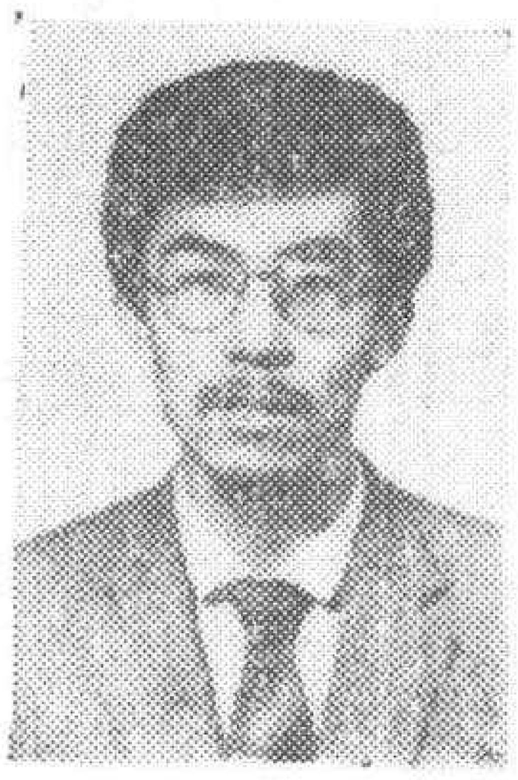
Guo Lingzhong　Li Yanping　Xu Xinhe　Liu Changyou

(Dept. of Automatic Control, Northeastern University Shenyang 110006 *China)*

Abstract

In this paper, the concepts of D-subsets and D-languages are firstly defined and then the D-automata model of a class of discrete event dynamic systems are formulated based on the D-subsets. The dynamic behaviors of controlled systems and the analysis of the reachable states of the systems are then studied in detail.

Key words: Discrete event dynamic system, D-subset, D-language, D-automaton.



郭令忠 1965年11月生，1986年9月毕业于锦州师范学院数学系，获理学学士学位，后留校任教。1991年3月获东北大学应用数学专业理学硕士学位，同年入东北大学自控系攻读博士学位至今。主攻方向为离散事件动态系统。

李彦平 1957年8月生，副教授。1981年1月毕业于东北大学自控系，获工学学士学位，后留校任教。1986年4月获东北大学自控专业工学硕士学位。主要从事离散事件系统、工业过程建模及计算机控制等方面的理论研究。