第21卷 第3期　　自 动 化 学 报　　Vol. 21, No. 3
1995年5月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　May, 1995

连续型多通道最速路问题研究[1)]

戴建设　王书宁　杨小茵
（华中理工大学系统工程研究所　武汉　430074）

摘　　要

研究网络 $N=(V,A,c,l)$ 上任意两节点间的多通道最速路（MQP）问题．提出 MQP 的数学模型，并讨论了其最优解的充要条件．最后得出解的计算公式和一种适于动态网络环境的 MQP 算法．

关键词：系统工程，网络分析，多通道最速路，时间紧要问题．

1　引言

在工程实践中，经常遇到一类以省时为目标的网络运送问题，如矿井救灾中井下人员的撤离[1]、大规模计算机网络的数据传输[2]和订货型的生产流程规划[3]等．这类问题一般具有以下特点：(1)网络中各路段的通行能力不同；(2)各路段的通行时间有区别；(3)以全部运送量到达终点为完成标志．

研究表明，经典的网络分析模型[4,5]难以确切描述这类问题．1988年，Chen 等人[6]提出了最速路概念，并给出了一个限于单路径运送的最速路问题的数学模型及相应的算法．随后 Rosen 等人[7]又就文[6]的算法作了改进．

基于对矿井救灾中人员撤离问题的研究，本文将文[6]的单通道最速路（Single-channel Quickest Path，缩写为 SQP）问题扩展到允许同时多路径运送的多通道最速路（Multi-channel Quickest Path，缩写为 MQP）问题．

2　单通道最速路问题

设有网络 $N=(V,A,c,l)$，其中 $G=(V,A)$ 为无重边和自回路的有向图；令 $n=|V|$，$e=|A|$ 分别为节点数和弧数．对任一弧 $(u,v)\in A$，记 $c(u,v)\geqslant 0$ 为该弧的容量（capacity），即单位时间内 (u,v) 的任一横截面容许通过的最大流量；记 $l(u,v)\geqslant 0$ 为该弧的交付时间（lead time），即物品从弧的起点出发至到达终点所需的时间．

设 $p=(v_1,v_2,\cdots v_k)$ 是一条 v_1—v_k 路径，$(v_i,v_{i+1})\in A$，$i=1,2,\cdots k-1$．假

本文于1992年11月26日收到．
1）国家自然科学基金和863计划资助项目．

定运送过程是连续的且不允许发生阻塞，则 p 的容量为

$$c(p) \triangleq \min_{1 \leqslant i \leqslant k-1} \{c(v_i, v_{i+1})\}. \tag{2.1}$$

若 $c(p) > 0$ (称 p 是有效的)及 p 的交付时间为

$$l(p) \triangleq \sum_{i=1}^{k-1} l(v_i, v_{i+1}), \tag{2.2}$$

则经有效路径 p 运送 σ 单位物品所需的时间为

$$T(\sigma, p) = \begin{cases} l(p) + \sigma/c(p), & \sigma > 0, \\ 0, & \sigma = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

一般地，网络中可有 $r(\leqslant e)$ 种容量互不相同的弧. 给定 s、$t \in V$ 和 $\sigma > 0$，SQP 问题就是在网络 N 中寻找一条 $s-t$ 路径 p^*，使得

$$T(\sigma, p^*) = \min_p \{T(\sigma, p)\}.$$

其中 p 为 N 中任一有效的 $s-t$ 路径.

当 $r=1$ 时，SQP 问题退化为以 l 为权函数的最短路问题；当 $r>1$ 时，关于 l 的最短路将不一定是最速路[6]. 因此最速路问题比最短路问题具有更广泛的意义.

3 多通道最速路问题

对给定节点 $s, t \in V$，假定 N 中存在 $K(\geqslant 1)$ 条有效的 $s-t$ 路径 $p_1, p_2, \cdots p_K$. 记 c_k, $l_k (1 \leqslant k \leqslant K)$ 分别为 p_k 的有效容量和交付时间. 不失一般性，设 $0 < l_1 \leqslant l_2 \cdots \leqslant l_K$，称 K 维向量 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_K)$ 为从 s 多通道向 t 运送 σ 单位物量的策略，其中 $\lambda_k \geqslant 0$ 为通过 p_k 的运送量，满足 $\sum_{k=1}^{K} \lambda_k = \sigma$. 用 $\Lambda(\sigma)$ 表示对应 σ 的所有策略的集合，则 $\forall \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda(\sigma)$，从 s 运送 σ 到达 t 所需的时间为

$$\tilde{T}(\boldsymbol{\lambda}) \triangleq \max_{1 \leqslant k \leqslant K} \{T(\lambda_k, p_k)\}. \tag{3.1}$$

其中 $T(\lambda_k, p_k)$ 按式(2.1)—(2.3)计算.

基于以上表述，MQP 问题就是对任意给定的 $s, t \in V$ 和 $\sigma > 0$，寻求一个最优策略 $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^* \lambda_2^* \cdots \lambda_K^*) \in \Lambda(\sigma)$，使得

$$\tilde{T}(\boldsymbol{\lambda}^*) = \min_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda(\sigma)} \{\tilde{T}(\boldsymbol{\lambda})\}.$$

对于 MQP 模型有以下结论成立.

定理 1. $\forall \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda(\sigma)$，$\boldsymbol{\lambda}$ 为 MQP 最优策略的充要条件是:

$$T(\lambda_k, p_k) = \tilde{T}(\boldsymbol{\lambda}) \leqslant l_{\bar{K}(\boldsymbol{\lambda})+1}, \forall 1 \leqslant k \leqslant \bar{K}(\boldsymbol{\lambda}). \tag{3.2}$$

其中 $\bar{K}(\boldsymbol{\lambda})$ 表示 $\boldsymbol{\lambda}$ 中所有非零分量的最大下标，当 $\bar{K}(\boldsymbol{\lambda}) = K$ 时，令 l_{K+1} 为充分大.

证明.

1) 充分性. 任取 $\lambda' \in \Lambda(\sigma)$，$\lambda' \neq \boldsymbol{\lambda}$. 若 $\bar{K}(\lambda') > \bar{K}(\boldsymbol{\lambda})$，由题设应有

$$T(\lambda'_{\bar{K}(\lambda')}, p_{\bar{K}(\lambda')}) > l_{\bar{K}(\lambda')} \geqslant l_{\bar{K}(\boldsymbol{\lambda})+1} \geqslant \tilde{T}(\boldsymbol{\lambda}).$$

若 $\bar{K}(\lambda') \leqslant \bar{K}(\boldsymbol{\lambda})$，则必存在 $i \leqslant \bar{K}(\lambda')$，有

$$\lambda'_i > \lambda_i, T(\lambda'_i, p_i) > T(\lambda_i, p_i) = \tilde{T}(\boldsymbol{\lambda}).$$

因而,

$$\tilde{T}(\lambda') = \max_{1\leqslant k\leqslant \bar{K}(\lambda')}\{T(\lambda'_k, p_k)\} > \tilde{T}(\boldsymbol{\lambda}),$$

$\boldsymbol{\lambda}$ 为最优策略.

2) 必要性. 由题设及式(3.1),有

$$\lambda_{\bar{K}(\boldsymbol{\lambda})} > 0,\ \tilde{T}(\boldsymbol{\lambda}) \geqslant T(\lambda_{\bar{K}(\boldsymbol{\lambda})}, p_{\bar{K}(\boldsymbol{\lambda})}) > l_{\bar{K}(\boldsymbol{\lambda})} \geqslant l_{\bar{K}(\boldsymbol{\lambda})-1}\cdots \geqslant l_1 > 0.$$

若 $\exists i \leqslant \bar{K}(\boldsymbol{\lambda})$, $T(\lambda_i, p_i) < \tilde{T}(\boldsymbol{\lambda})$, 由式(2.3)可得

$$\lambda_i = c_i \times [T(\lambda_i, p_i) - l_i] < c_i \times [\tilde{T}(\boldsymbol{\lambda}) - l_i],$$

取 $\lambda_i < \lambda'_i < c_i \times [\tilde{T}(\boldsymbol{\lambda}) - l_i], \forall 1 \leqslant k \neq i \leqslant K$. 若 $\lambda_k > 0$, 取 $0 < \Delta\lambda_k < \lambda_k$; 否则取 $\Delta\lambda_k = 0$, 使满足 $\sum\limits_{k\neq i}\Delta\lambda_k = \lambda'_i - \lambda_i$. 令 $\lambda'_k = \lambda_k - \Delta\lambda_k$, 则 $\lambda' = (\lambda'_1\lambda'_2\cdots\lambda'_k) \in \Lambda(\sigma)$. $\forall 1 \leqslant k \neq i \leqslant K$, 有 $T(\lambda'_k, p_k) < T(\lambda_k, p_k) \leqslant \tilde{T}(\boldsymbol{\lambda})$ 或 $T(\lambda'_k, p_k) = T(\lambda_k, p_k) = 0 < \tilde{T}(\boldsymbol{\lambda})$. 由假设,同时有 $T(\lambda'_i, p_i) < \tilde{T}(\boldsymbol{\lambda})$, 即

$$\tilde{T}(\lambda') = \max_{1\leqslant k\leqslant K}\{T(\lambda'_k, p_k)\} < \tilde{T}(\boldsymbol{\lambda})$$

与 $\boldsymbol{\lambda}$ 最优相矛盾. 所以必有式(3.2)中等式部分成立. 仿上述过程,同样可证式(3.2)中不等式部分成立.

证毕.

推论. $\forall\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda(\sigma)$ 为对应 σ 的最优策略的等价充要条件是:

1) $\bar{K}(\boldsymbol{\lambda})$ 必为满足

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \times (l_k - l_i) < \sigma \tag{3.3}$$

的最大 k 值.

2) 各分量的取值为

$$\lambda_k = \begin{cases} c_k \times [\tilde{T}(\boldsymbol{\lambda}) - l_k], & 1 \leqslant k \leqslant \bar{K}(\boldsymbol{\lambda}), \\ 0, & k > \bar{K}(\boldsymbol{\lambda}). \end{cases} \tag{3.4}$$

其中

$$\tilde{T}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\sigma + \sum\limits_{i=1}^{\bar{K}(\boldsymbol{\lambda})} c_i \times l_i}{\sum\limits_{i=1}^{\bar{K}(\boldsymbol{\lambda})} c_i}. \tag{3.5}$$

证明. 将式(2.3)代入式(3.2)的等式部分,整理即得条件(2). 将式(3.5)代入式(3.4),由式(3.2)不等式部分约束及 $\bar{K}(\boldsymbol{\lambda})$ 的定义,即可得条件(1). 反之,由推论条件(1),(2)易知式(3.2)成立.

证毕.

根据定理 1 及其推论,若已知网络N中所有 $s-t$ 路径的容量和交付时间,则从 s 向 t 运送 σ 单位物品的 MQP 问题可依次运用式(3.3),(3.5)和(3.4)求得最优解.

4 容量有约束的多通道最速路问题

上节的 MQP 模型隐含着K条 $s-t$ 路径相互独立的假定. 一般地,当多条路径同

时运送时，各路径的有效容量可能受到公共路段的容量限制，这就是容量有约束的多通道最速路（CCMQP）问题。

设网络N中有 $K(>1)$ 条 $s-t$ 路径，记 $c(p_k)(1\leqslant k\leqslant K)$ 为 p_k 的最大容量；记 $A(p_k)$ 为 p_k 所含的弧集．若 $\forall 1\leqslant i\neq k\leqslant K$，有 $A(p_k)\cap A(p_i)=\phi$，则称 p_k 为独立路径；否则为非独立路径．记 $A'(p_k)=\bigcup\limits_{i\neq k}[A(p_k)\cap A(p_i)]$ 为 p_k 所含的公共弧子集和 $A'=\bigcup\limits_{k}A'(p_k)$．设 $|A'|=M$，记 $L_m(1\leqslant m\leqslant M)$ 为含有公共弧 $(u_m,v_m)\in A'$ 的 $s-t$ 路径的下标集．

若 $\sum\limits_{k\in L_m}c(p_k)\leqslant c(u_m,v_m)$，则 (u_m,v_m) 对诸 p_k 的容量约束无效；否则容量约束有效，且 p_k 的有效容量将为 $c_k\leqslant c(p_k)\leqslant c(u_m,v_m)$．经 p_k 运送 λ_k 所需的时间为

$$T(\lambda_k,c_k)=\begin{cases}l_k+\lambda_k/c_k, & \lambda_k>0,\ c_k>0,\\ \infty, & \lambda_k>0,\ c_k=0,\\ 0, & \lambda_k=0.\end{cases}\tag{4.1}$$

称K维向量 $\mathbf{c}=(c_1c_2\cdots c_K)$ 为关于 $s-t$ 路径的容量分配，其中 $c_k(\geqslant 0)$ 为分配给 p_k 的容量，且 $\forall 1\leqslant m\leqslant M$，满足 $\sum\limits_{k\in L_m}c_k\leqslant \mathbf{c}(u_m,v_m)$．全体 $\mathbf{c}$ 的集合记为 C．$\forall\mathbf{c}\in C$，$\forall\lambda\in\Lambda(\sigma)$，从 s 运送 σ 到达 t 所需的时间为

$$\bar{T}(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{c})\triangleq\max_{1\leqslant k\leqslant K}\{T(\lambda_k,c_k)\}.\tag{4.2}$$

CCMQP 问题为给定 $s,t\in V$ 和 $\sigma>0$，寻求一个最佳容量分配 $c^*\in C$ 和一个最优策略 $\lambda^*\in\Lambda(\sigma)$，使得

$$\bar{T}(\lambda^*,c^*)=\min_{\lambda\in\Lambda(\sigma),\mathbf{c}\in C}\{\bar{T}(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{c})\}.$$

显然，对确定的$\mathbf{c}\in C$，CCMQP 问题将退化为 MQP 问题．而最佳容量分配仅取决于网络特征，这将在以下讨论中得到证明．

由题设，p_k 为关于 l 的第 k 最短 $s-t$ 路径(同长度路径按下标序排列)，可以提出如下的最短路径优先容量分配算法（SFCA）：

第 1 步．$\forall(u,v)\in A$，令 $c^1(u,v)=\mathbf{c}(u,v)$，$k=1$．

第 2 步．取 $c_k=\min\{c^k(u,v)\mid\forall(u,v)\in A(p_k)\}$，若 $k=K$，转第 4 步；否则转第 3 步．

第 3 步．令 $k=k+1$，$\forall(u,v)\in A$．若 $(u,v)\in A(p_k)$，令

$$\mathbf{c}^k(u,v)=\max\{\mathbf{c}^{k-1}(u,v)-c_{k-1},0\};$$

否则，令 $\mathbf{c}^k(u,v)=\mathbf{c}^{k-1}(u,v)$，转第 2 步．

第 4 步．容量分配结束．

容易验证，SFCA 算法确定的容量分配满足下列性质：

1) 以 c_k 为分量的向量 $\mathbf{c}=(c_1c_2\cdots c_k)\in C$．

2) 若 p_k 为独立路径，则 $c_k=c(p_k)$．

3) 若 p_k 为非独立路径，且 $c_k<c(p_k)$，则 $\exists(u_m,v_m)\in A'(p_k)$，同时满足：

(1) $\sum_{i\in L_m} c_i = \mathbf{c}(u_m,v_m)$; (2) $\exists i\in L_m$, $i<k$, 有 $c_i\neq 0$; (3) $\forall i\in L_m$, 若 $i>k$, 则必有 $c_i=0$.

4) $\forall k\leqslant K$, $\sum_{i=1}^{k} c_i$ 为前 k 条路径的最大总容量.

定理 2. SFCA 算法确定的 $\mathbf{c}^*=(c_1^*c_2^*\cdots c_K^*)$ 为 CCMQP 模型的最佳容量分配.

证明. $\forall \mathbf{c}\in C$, $\mathbf{c}\neq c^*$, $\exists c_k\neq c_k^*$. 用 $\bar{T}(\lambda^*,c^*)|_k$ 表示变动 c_k^* 所得的最优解值. 记 $\lambda^*,\boldsymbol{\lambda}$ 分别为对应 c^* 和 $\mathbf{c}$ 的最优策略. 由性质 4) 可得, $\bar{K}(\boldsymbol{\lambda})\geqslant\bar{K}(\lambda^*)$.

若 $\bar{K}(\boldsymbol{\lambda})>\bar{K}(\lambda^*)$, 则 $\bar{T}(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{c})>l_{\bar{K}(\lambda)}\geqslant l_{\bar{K}(\lambda^*)+1}\geqslant\bar{T}(\lambda^*,c^*)$;

若 $\bar{K}(\boldsymbol{\lambda})=\bar{K}(\lambda^*)$,由性质 3),$\forall c_k>c_k^*$,必有 $i<k$,使 $c_i<c_i^*$,且 $\sum_{j=1}^{k}c_j\leqslant\sum_{j=1}^{k}c_j^*$. 不妨设 $c_k=c_k^*+\Delta c$, $\Delta c>0$, $c_i=c_i^*-\Delta c$, 则有

$$\bar{T}(\lambda^*,c^*)|_k=\bar{T}(\lambda^*,c^*)+\frac{\Delta c(l_k-l_i)}{\sum_{j=1}^{\bar{K}(\lambda)}c_j}\geqslant\bar{T}(\lambda^*,c^*).$$

所以, $\bar{T}(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{c})\geqslant\bar{T}(\lambda^*,c^*)$.

证毕.

综上所论,这里提出一种适于动态网络环境 CCMQP 问题的递推算法:

第 1 步. 确定网络N的当前特征参数$\mathbf{c}$, l, 节点 s, $t\in V$和 $\sigma>0$; 令 $K=1$, $T=\infty$; $\forall(u,v)\in A$, 令 $c^K(u,v)=\mathbf{c}(u,v)$, $A^K=\{(u,v)\mid c^K(u,v)>0\}$.

第 2 步. 在 A^K 中求关于 l 的最短 $s-t$ 路径 p, 若 p 不存在,转第 5 步.

第 3 步. 令 $p_k=p$, 计算 l_K; 若 $l_K\geqslant T$, 转第 5 步.

第 4 步. 计算 c_K, T; 令 $K=K+1$, $\forall(u,v)\in A^{K-1}$, 计算 $c^K(u,v)$; 令 $A^K=\{(u,v)\mid c^K(u,v)>0\}$; 转第 2 步.

第 5 步. $K=K-1$. 若 $K<1$, 问题无解;否则, $p_1,p_2,\cdots p_K$ 为选中的 $s-t$ 路径, $\mathbf{c}=(c_1c_2\cdots c_K)$ 为最佳容量分配, T 为所需的时间;计算最优策略 $\lambda_k(k=1,2,\cdots K)$. 算法结束.

算法举例. 设有图 1 所示巷道运输网络, 图中数对 (c,l) 表示相应路段的容量(吨/小时)和交付时间(小时). 求将 $\sigma=400$ (吨)物料从 A 点运输到 G 点的 MQP 最优策略.

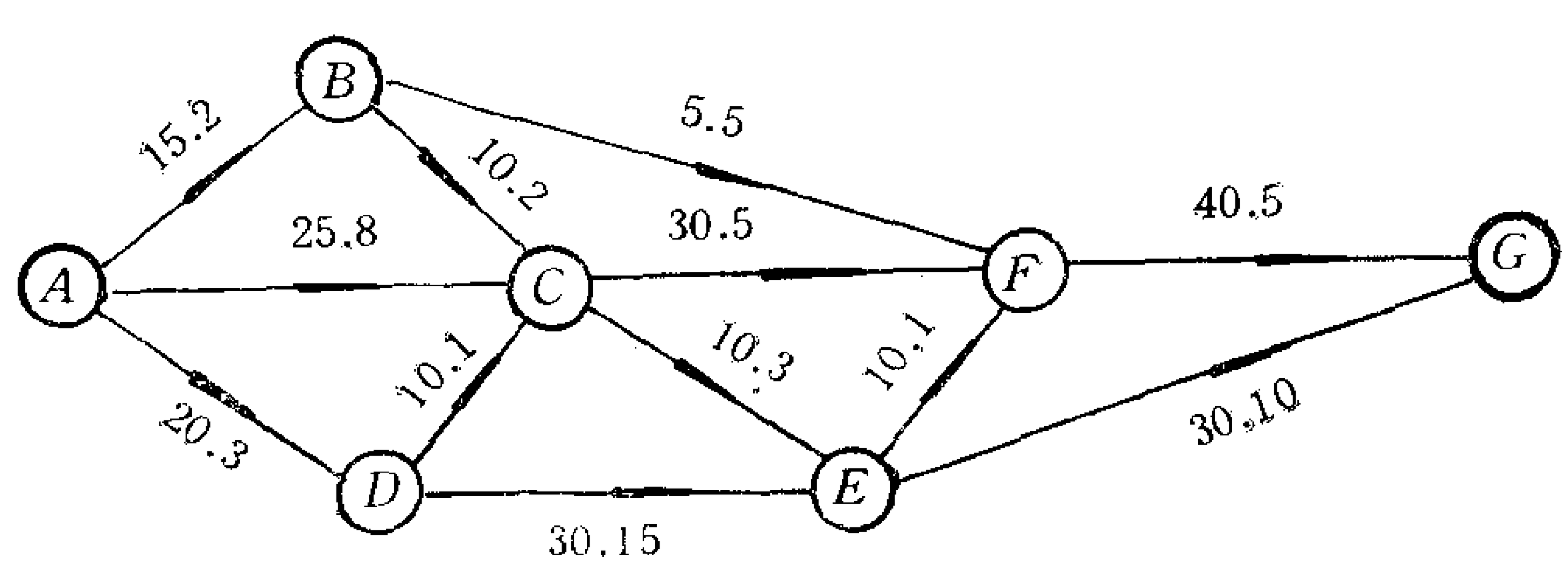

图 1 一个简化的巷道运输网络

递推算法求解过程如下:

1) $K=1$: $c^1(u,v)$ 及 A^1 如图 1; p_1: $A\to B\to F\to G$, $l_1=12$, $c_1=5$, $T=92$.

2) $K=2$: $c^2(u,v)$ 及 A^2 如图 2(a); $p_2: A\to D\to C\to E\to F\to G, l_2=13, c_2=10, T=\frac{118}{3}\doteq 39.33$.

3) $K=3$: $c^3(u,v)$ 及 A^3 如图 2(b); $p_3: A\to B\to C\to F\to G$, $l_3=14$, $c_3=10$, $T=\frac{146}{5}=29.2$.

4) $K=4$: $c^4(u,v)$ 及 A^4 如图 2(c); $p_4: A\to C\to F\to G$, $l_4=18$, $c_4=15$, $T=25$.

5) $K=5$: $c^5(u,v)$ 及 A^5 如图 2(d); $p_5: A\to D\to E\to G$, $l_5=28>T$, 转第 5 步.

计算结果：选择运输路径 p_1, p_2, p_3, p_4，最佳容量分配 $\mathbf{c}=(5, 10, 10, 15)$，完成运输所需时间 $T=25$ 小时，各路径运输量分别为 $\lambda_1=65$, $\lambda_2=120$, $\lambda_3=110$, $\lambda_4=105$ (单位为吨).

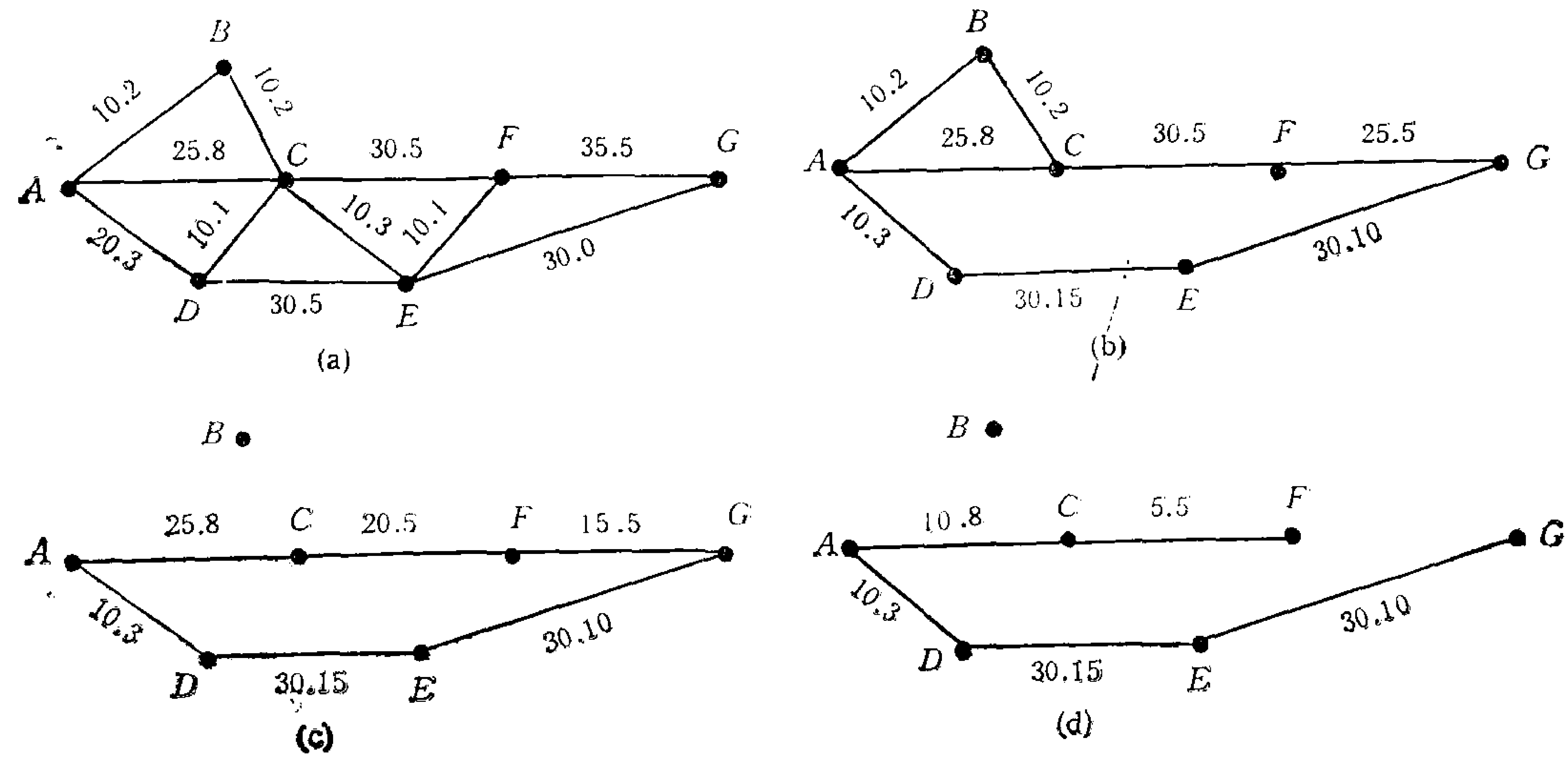

图 2　MQP 问题的求解过程示例

5　结束语

本文提出并较深入地研究了一种新的网络分析模型，该模型能准确地描述一类具有时间延迟和容量限制的多阶段连续加工(运送)过程，在强调整体时效性的网络系统中有着广泛的应用前景。文中所提出的递推算法简单易行，当采用 Fradman 最短路算法[8]时，计算时间复杂性仅为 $O(e^2+e\cdot n\log n)$.

参　考　文　献

[1] 戴建设，王书宁，杨小茵. 应急决策和应急决策支持系统的研究. 决策与决策支持系统，1992, 2(4): 18—24.

[2] Tanenbaum A S. Computer networks. Prentice-Hall, 1981.

[3] Umble M M, Srikanth M L. Synchronous manufacturing. Cincinnati: South-Western Publishing, 1990.

[4] 郭耀煌等编著. 运筹学与工程系统分析. 北京：中国建筑工业出版社，1986.

[5] Papadakis N A, Perakis A N. Deterministic minimal time vessel routing. *Operations Research*, 1990, **38**(3): 426—438.

[6] Chen Y L, Chin Y H. The quickest path problem. *Computers Ops Res*. 1990, **17**(2):153—161.

[7] Rosen J B, Sun S Z, Xue G L. Algorithms for the quickest path problem and the enumeration of quickest paths. *Computers Ops Res*. 1991, **18**(6):579—584.

[8] Fredman M L, Tarjan R E. Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms. *J. Ass. Comput. Math.*, 1987, **34**:596—615

A STUDY ON THE MULTICHANNEL QUICKEST PATH PROBLEM FOR CONTINUOUS FLOW

DAI JIANSHE WANG SHUNING YANG XIAOYIN

(Institute of Systems Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074 P. R. China)

ABSTRACT

This paper deals with the multichannel quickest path (MQP) problem between two given nodes in a network N = (V,A,c,l). Mathematical models of MQP problems are presented. Necessary and sufficient conditions of the optimal strategy for solving the models are discussed, and a formulated solution is derived. Based upon the result, a recursive algorithm for the MQP problem in a dynamic network is developed and its usage is shown by an example.

Key words: Systems engineering, network analysis, multichannel quickest path, time-critical issues

戴建设，王书宁 照片和简介见本刊第 20 卷第 1 期.

杨小茵 1982 年上海交通大学毕业，同年任华中理工大学自控系助教. 1987 年起任讲师. 1988 年至 1990 年赴日研修通讯系统的计算机控制技术. 目前主要研究兴趣为电力系统的计算机实时调度与控制、系统仿真及软件工程. 已在国内外发表学术论文近十篇.