

研究简报

# $l^\infty$ 范数性能指标预测控制研究<sup>1)</sup>

王永骥 徐桂英 涂 健

(华中理工大学自控系 武汉 430074)

**关键词:** 预测控制,  $l^\infty$  范数性能指标, 稳定性.

预测控制具有鲁棒性强、可考虑约束等优点。由于  $l^\infty$  范数性能指标考虑最大偏差的极小化, 因此按其设计的预测控制系统动态响应较快、动态偏差较小。文[1]讨论了  $l^\infty$  预测控制的简化算法, 它避免了通常线性规则 (LP) 方法的迭代求解, 可在有限步内收敛。本文则进一步讨论了其闭环稳定性及闭环计算结构问题, 并从机理上探讨了  $l^\infty$  预测控制特性优良的原因。

## 1 $l^\infty$ 预测控制的一种简化算法

基于单位阶跃响应的  $l^\infty$  预测控制问题如下:

$$J = \min_{\Delta u_M(k)} \|e - A\Delta u_M(k)\|_{\infty} \quad (1)$$

式中  $e = w - y_0$  为  $P \times 1$  预报误差向量,  $w, y_0$  分别为期望跟踪值和零输入预报值;  $A$  为  $P \times M$  阶动态矩阵,  $P, M$  则为优化和控制长度;  $\Delta u_M(k)$  为控制向量增量。

文[1]利用  $l^\infty$  范数参数估计成果和定向扰动技术, 将  $l^\infty$  预测控制化成有限个  $l^2$  预测控制问题, 至多在  $M$  步内可求得问题解。设迭代计数为  $h$ , 则求解步骤简要概括如下:

(1) 求出与(1)式对应的  $l^2$  预测控制问题解

$$\Delta u_{LS}^{(0)} = (A^T A)^{-1} A^T e \quad (2)$$

(2) 由误差向量  $e - A\Delta u_{LS}^{(h)}$  中绝对值最大的元素  $\gamma_{i_t}$  ( $t = 1, \dots, m$ ) 构成残差向量

$$\gamma^{(h)} = [\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \dots, \gamma_{i_m}]^T \quad (3)$$

(3) 用定向扰动技术求出控制增量

$$\Delta \bar{u}_k = (A^T A)^{-1} A^T \sum_{i=1}^m a_i e_i \quad (4)$$

式中  $a_i$  为方程组  $Da = \rho \gamma^{(h)}$  的解;  $D, \rho$  与  $A$  阵元素有关<sup>[1]</sup>;  $e_i$  为第  $i$  个元素为 1 的单位向量。

$$(4) \Delta u_{LS}^{(h+1)} = \Delta u_{LS}^{(h)} + \Delta \bar{u}_k \quad (5)$$

(5)  $h$  为  $M$  时, 迭代过程结束, 否则转(2)。

本文于 1993 年 1 月 18 日收到。

1) 得到国家自然科学基金资助课题。

## 2 $l^\infty$ 预测控制性能分析

对于  $l^\infty$  预测控制闭环稳定性有以下定理.

**定理 1.** 若  $l^\infty$  预测控制对应的  $l^2$  预测控制稳定, 则  $l^\infty$  预测控制系统闭环稳定.

证明. 
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1} &= \mathbf{w} - \mathbf{y}_{p0}(k+1) = \mathbf{w} - [\mathbf{y}_{pk0} + A\Delta\mathbf{u}_\infty(k)] \\ &= \mathbf{w} - \mathbf{y}_{pk0} - A\Delta\mathbf{u}_\infty(k) = \mathbf{e}_k - A\Delta\mathbf{u}_\infty(k), \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $\mathbf{y}_{p0}(k+1), \mathbf{y}_{pk0}$  分别为第  $k+1, k$  时刻的零输入预报向量;  $\Delta\mathbf{u}_\infty(k)$  为  $l^\infty$  预测控制的解.

由于  $\Delta\mathbf{u}_\infty(k)$  为式(1)的解, 取  $l^\infty$  范数显然有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_{k+1}\|_\infty &= \|\mathbf{e}_k - A\Delta\mathbf{u}_\infty(k)\|_\infty \leq \|\mathbf{e}_k - A\Delta\mathbf{u}_{LS}(k)\|_\infty \\ &= \|\mathbf{e}_k - A(A^T A)^{-1} A^T \mathbf{e}_k\|_\infty = \|[I - A(A^T A)^{-1} A^T] \mathbf{e}_k\|_\infty \\ &\leq \|I - A(A^T A)^{-1} A^T\|_\infty \|\mathbf{e}_k\|_\infty. \end{aligned} \quad (7)$$

因为  $I - A(A^T A)^{-1} A^T$  为投影矩阵, 其  $l^\infty$  范数有限, 当  $l^2$  预测控制稳定时, 有  $\|\mathbf{e}_k\|_\infty \rightarrow 0$ , 所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_{k+1}\|_\infty = 0. \quad (8)$$

这就证明了  $l^\infty$  预测控制也是闭环稳定的.

由上节给出的算法可得

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{u}_\infty(k) &= \Delta\mathbf{u}_{LS}(k) + \Delta\bar{\mathbf{u}}_1(k) + \cdots + \Delta\bar{\mathbf{u}}_M(k) \\ &= (A^T A)^{-1} A^T [\mathbf{e}(k) + \mathbf{v}_1(k) + \cdots + \mathbf{v}_M(k)]. \end{aligned} \quad (9)$$

式中  $\mathbf{v}_i(k) (i=1, \dots, M)$  为  $\mathbf{e}(k)$  和  $\mathbf{v}_1(k), \dots, \mathbf{v}_{i-1}(k)$  的函数, 即

$$\mathbf{v}_i(k) = \sum_{l=1}^{m_i} \mathbf{a}_l^{(i)} \mathbf{e}_l = S_i^T D_i^{-1} \rho_i S_i \boldsymbol{\gamma}^{(i)}. \quad (10)$$

这里  $S_i \triangleq [e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{im_i}] \in R^{m_i \times p}$ ,  $D_i = S_i A (A^T A)^{-1} A^T S_i^T$ ,

$$\boldsymbol{\gamma}^{(i)} = S_i \left[ \mathbf{e}(k) - A\Delta\mathbf{u}_{LS}(k) - A \sum_{l=1}^{i-1} \Delta\bar{\mathbf{u}}_l(k) \right].$$

计算  $\mathbf{v}_1(k)$ , 有

$$\mathbf{v}_1(k) = \rho_1 S_1^T [S_1 A (A^T A)^{-1} A^T S_1]^{-1} S_1 [I - A(A^T A)^{-1} A^T] \mathbf{e}(k). \quad (11)$$

$\mathbf{v}_l(k) (l=1, \dots, M)$  的一般形式为

$$\mathbf{v}_l(k) = \rho_l \phi_l [I - A(A^T A)^{-1} A^T] \mathbf{e}(k). \quad (12)$$

设

$$\mathbf{v}(k) = \sum_{l=1}^M \mathbf{v}_l(k) = \bar{\Phi}_M [I - A(A^T A)^{-1} A^T] \mathbf{e}(k) = \Phi_M \mathbf{e}(k), \quad (13)$$

则有  $\phi_M$  为  $\rho_i, S_i (i=1, \dots, M)$  的非线性函数, 也是  $\mathbf{e}(k)$  的非线性函数. 与  $l^2$  预测控制闭环计算结构图<sup>[2]</sup>相仿可得图1.

由式(7), (13)知

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_k - A\Delta\mathbf{u}_\infty(k)\|_\infty &= \|(I - \bar{\Phi}_M) [I - A(A^T A)^{-1} A^T] \mathbf{e}(k)\|_\infty \\ &\leq \|[I - A(A^T A)^{-1} A^T] \mathbf{e}(k)\|_\infty, \end{aligned} \quad (14)$$

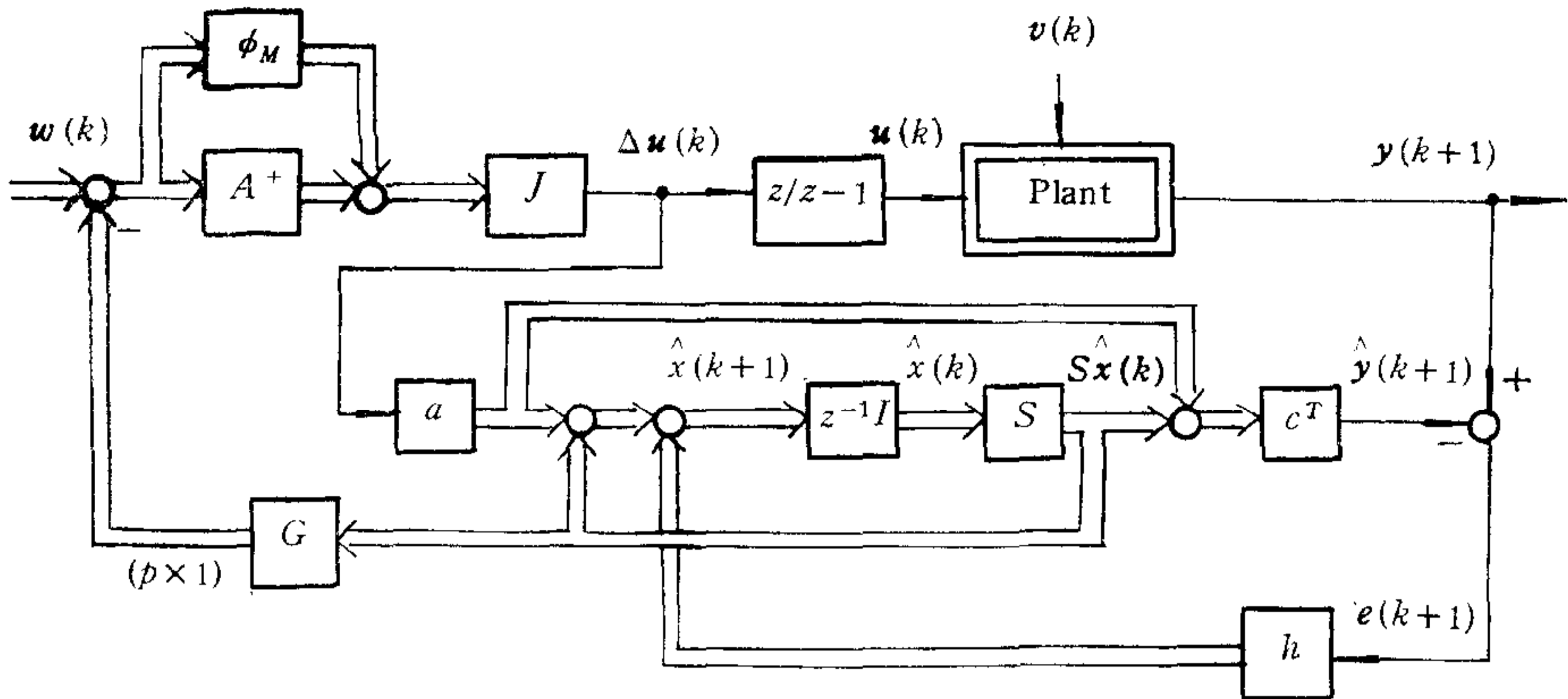


图1  $l^\infty$  预测控制闭环计算结构图

故有

$$\|I - \bar{\Phi}_M\|_\infty \leq 1, 0 \leq \|\bar{\Phi}_M\| \leq 2. \tag{15}$$

其中  $\Phi_M$  可看成是  $e(k)$  的变增益非线性函数，与误差成正比变化。从而加速了消除误差的动态过程，并使最大偏差减小，但不影响闭环稳定性。这就是  $l^\infty$  预测控制比  $l^2$  预测控制动态过程快、最大偏差小的原因。

### 3 应用实例

对于线性化的混流式水轮机组调速系统，其转速  $X(s)$  对输入  $u(s)$  的传递函数为<sup>[3]</sup>

$$G(s) = \frac{e_y(1 - T_1s)}{(1 + T_y s)(1 + e_{qh} T_w s)(e_n + T_a s)}. \tag{16}$$

式中  $T_1 = (e_{qy} e_h / e_y - e_{qh}) T_w$ ;  $e_n = e_g - e_x$ ;  $e_x, e_y, e_h, e_{qy}, e_{qh}$  为水轮机特性系数;  $e_g$  为发电机自调节系数;  $T_a, T_w, T_y$  分别为机组、引水道和接力器的惯性时间常数。

图 2,3 分别给出了数字仿真和湖北陆水电厂的预测控制试验曲线。数字仿真参数为  $T_y = 0.2, T_w = 0.85, T_a = 10, e_g = 1.0, e_x = -1.23, e_y = 0.76, e_h = 1.67, e_{qy} = 0.69, e_{qh} = 0.51$ ; 试验机组参数为  $T_w = 0.85, T_a = 4.8$ ; 功率为  $8.8MW$ ; 预测控制器参数为  $P = 30, M = 1$ , 采样周期  $T = 0.4$  秒。

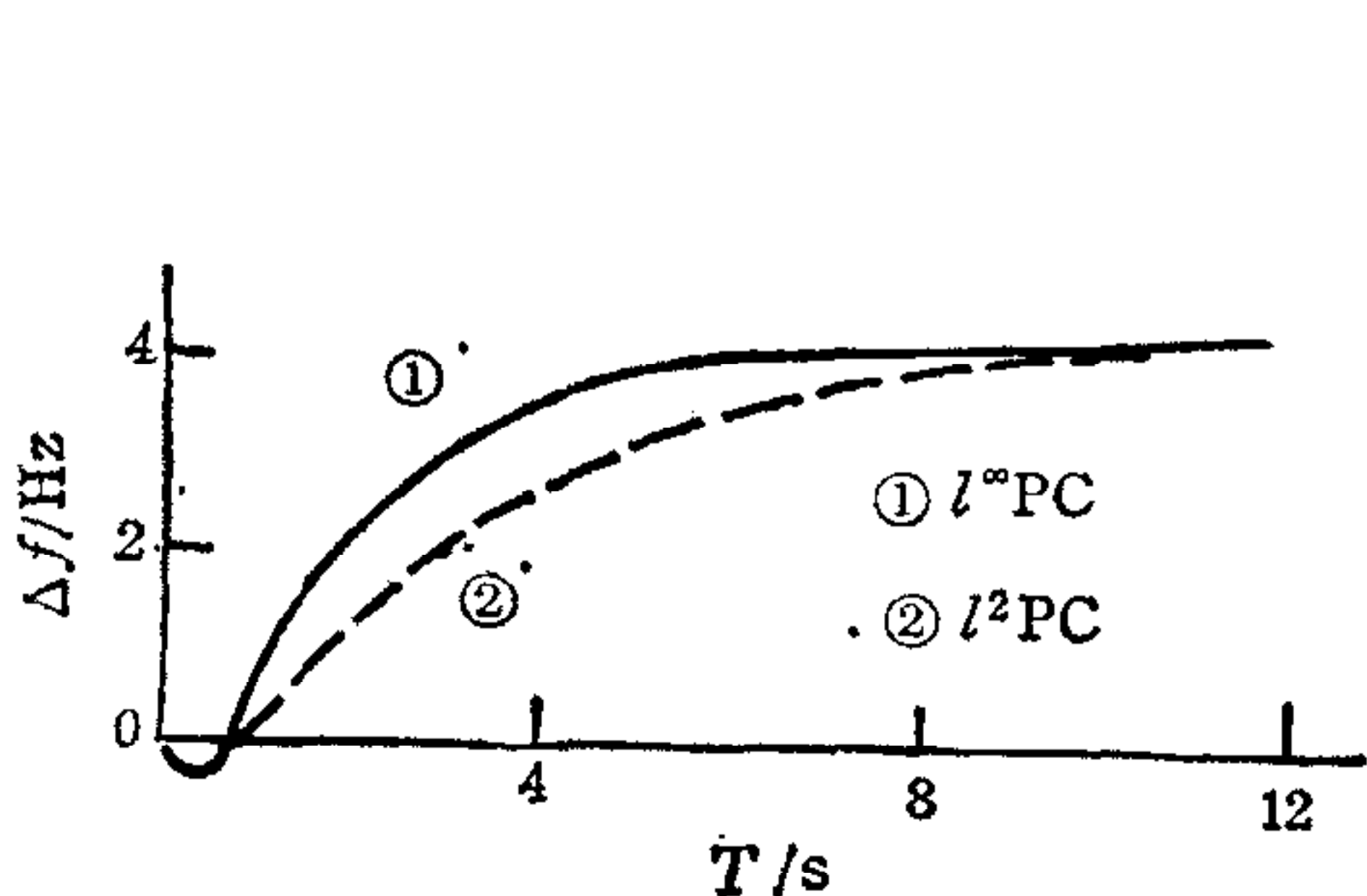


图2 数字仿真曲线

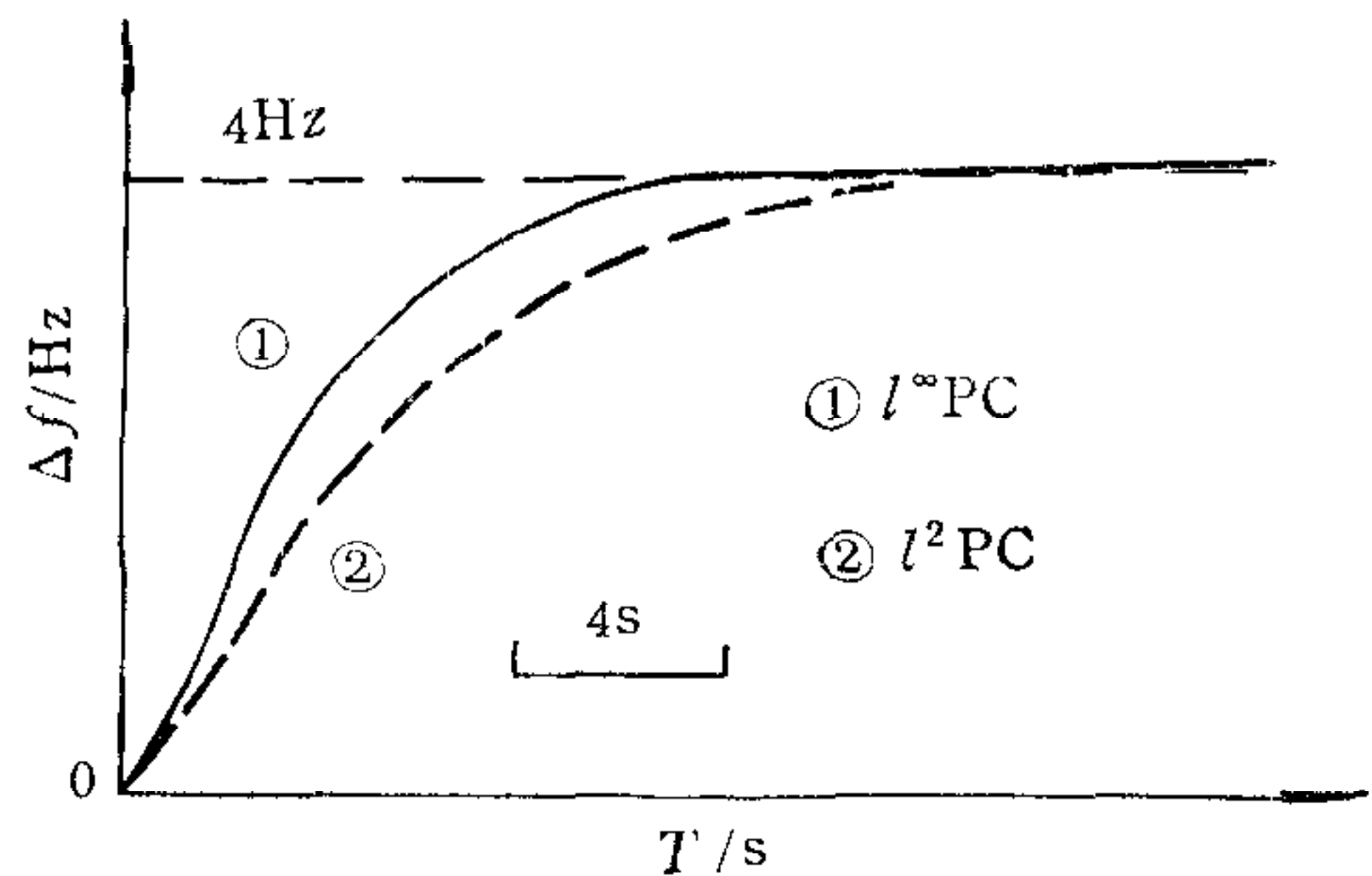


图3 现场试验示波图

由图可以看出,  $l^\infty$  预测控制的良好效果。本文的分析从机理上说明了  $l^\infty$  预测控制特性优良的原因, 而数字仿真及现场应用结果都表明了这一分析的正确性。这是采用线性规划方法求解  $l^\infty$  预测控制所不易做到的。

### 参 考 文 献

- [1] 王永骥, 徐桂英, 涂健. 水轮发电机组  $l^\infty$  范数性能指标预测控制. 控制理论与应用, 1991, 8(4), 386—392.
- [2] 席裕庚. 预测空间中数字控制器的设计. 控制理论与应用, 1987, 4(3), 66—73.
- [3] 沈祖诒. 水轮机调节. 第二版, 北京: 水利电力出版社, 1988.

## STUDIES ON $l^\infty$ NORM PERFORMANCE INDEX PREDICTIVE CONTROL

WANG YONGJI    XU GUIYING    TU JIAN

*(Department of Automatic Control, Huazhong University of Science  
and Technology Wuhan 430074 China)*

**Key words:** Predictive control,  $l^\infty$  norm performance index, stability.