第21卷 第3期　自 动 化 学 报　Vol. 21, No. 3
1995年5月　ACTA AUTOMATICA SINICA　May, 1995

短文

具动态不确定性系统的观测器-控制器设计的鲁棒性[1)]

陈善本
(哈尔滨工业大学金属材料与工艺系　哈尔滨　150001)
张铨　张福恩
(哈尔滨工业大学控制工程系　哈尔滨　150001)
吴林
(哈尔滨工业大学金属材料与工艺系　哈尔滨　150001)

摘　要

研究存在动态不确定性的线性化系统的龙伯格观测器-控制器设计的鲁棒稳定性问题,并给出了易于通过系统参数摄动界来验证鲁棒稳定的充分条件.

关键词: 不确定性,鲁棒性,观测器-控制器.

1 引言

众所周知,基于精确模型描述的线性二次状态反馈 (LQSF) 设计具有良好的镇定系统的性质[1]. 当模型与实际对象之间存在误差时, Patel 等[3]考察了在状态可精确测得时应用 LQSF 设计仍能保持闭环系统稳定的条件. 但当系统状态不能精确测得时,基于精确线性模型设计 Luenberger 状态观测器重构系统状态,再利用 LQSF 设计的反馈控制器构成闭环系统, 其鲁棒稳定性尚未有明确结论. 考察这一问题的实际意义在于: 简便的观测器-控制器设计与一般不确定对象的可匹配条件对于设计者来说是希望的. 这就是本文的出发点.

2 问题描述

考虑如下非线性动态系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=F(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=G(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)). \tag{2}$$

本文于1993年2月15日收.
1) 获得国家自然科学基金资助项目.

这里状态 $x\in R^n$, 控制 $u\in R^m$, 输出 $y\in R^l$, 非线性向量函数 $F(.,.):R^n\times R^m\to R^n$, $G(.,.):R^n\times R^m\to R^l$. 在工作点附近系统(1),(2)可表成下列线性与非线性部分之和:

$$\dot{x}=A_mx+B_mu+f_m(x,u), \tag{3}$$

$$y=C_mx+D_mu+g_m(x,u). \tag{4}$$

这里 A_m,B_m 是 F 对于 x,u 的雅可比矩阵;f_m 表示高阶项;类似地, C_m,D_m 和 g_m 对于 G 与上述含义相同. 由于非线性向量函数的精确描述通常是未知的或不可用的, 而只有 f_m 和 g_m 的界限可以估计得到. 因此,可以先考虑对线性模型部分的设计,即对线性化系统

$$\dot{x}=A_mx+B_mu, \tag{5}$$

$$y=C_mx+D_mu, \tag{6}$$

取指标

$$J=\int_0^\infty(x'Qx+u'u)\mathrm{d}t. \tag{7}$$

式中 $Q=Q'\geqslant 0,(A_m,B_m)$ 可控, (C_m,A_m) 可观. 若状态可测得,则对式(5), (6)的 LQSF 设计的控制律为[1]

$$u^*=-B_m'Px\triangleq-Kx. \tag{8}$$

反馈增益 $K=B_m'P,P$ 是代数 RICCATI 方程的解:

$$A_m'P+PA_m-PB_mB_m'P+Q=0. \tag{9}$$

现考虑状态不可测得,由式(5)作 Luenberger 观测器重构状态 $x(t)$, 记为 $\hat{x}(t)$,令

$$\hat{y}(t)=y(t)-D_mu(t),$$

则有

$$\dot{\hat{x}}=A_e\hat{x}+L\hat{y}+B_mu. \tag{10}$$

这里 $A_e\triangleq A_m-LC_m$, L 是镇定式(10)的一个合适选择. 因 (C_m,A_m) 可观, L 存在. 定义误差向量为

$$e(t)=x(t)-\hat{x}(t).$$

这里 $x(t)$ 取自式(3),则控制为

$$u^*=-K\hat{x}\triangleq-K(x-e). \tag{11}$$

因此

$$\dot{e}=\dot{x}-\dot{\hat{x}}=A_ee+\bar{f}(x,e). \tag{12}$$

式中 $\bar{f}(x,e)=f_m(x,-K\hat{x})-Lg_m(x,-K\hat{x})\triangleq f(x,e)-Lg(x,e)$. 由式(2)得

$$\dot{x}=A_mx-B_mK\hat{x}+f_m(x,-K\hat{x})\triangleq A_cx+B_mKe+f(x,e). \tag{13}$$

这里 $A_c\triangleq A_m-B_mK$. 进一步假定 f,g 满足:

$$\|f\|\leqslant a\|x\|+b\|e\|, \tag{14}$$

$$\|g\|\leqslant c\|x\|+d\|e\|. \tag{15}$$

记号$\|\cdot\|$为欧氏范数; a,b,c 和 d 为确定的正常数. 下节将给出可保持闭环系统稳定的非线性向量函数 f,g 应满足的条件.

3 主要结果

为考察闭环系统(12),(13)的稳定性,取 Lyapunov 函数

$$v(x,e) = rx'Px + e'P_0e. \tag{16}$$

式中常数 $r > 0$,为“调整参数”[2]; P_0 对称正定并满足

$$A_e'P_0 + P_0A_e = -I. \tag{17}$$

闭环系统稳定要求:

$$\dot{v}(x,e) = -rx'\bar{Q}x - e'e + 2re'\bar{K}x + 2f'(rPx + P_0e) - 2g'L'P_0e \leqslant 0. \tag{18}$$

式中 $\bar{Q} \triangleq Q + PB_mB_m'P, \bar{K} \triangleq K'B_m'P$. 定义$W$矩阵的欧氏范数 $\|W\| := (\Sigma|w_{ij}|^2)^{1/2}$,谱范数 $\|W\|_s := \max[\lambda(WW')]^{1/2}$.

这里 $\lambda(.)$ 为矩阵特征值. 则有

$$g'L'P_0e \leqslant \|L\|_s\|g\|\|P_0\|_s\|e\| = \max[\lambda(LL')^{1/2}]\|g\|\max\lambda(P_0)\|e\|.$$

记 $M_Q = \min\lambda(\bar{Q}), M_k = \|\bar{K}\|_s, M_L = \|L\|_s, M_0 = \max\lambda(P_0), M_P = \max\lambda(P)$并将式(14),(15)代入式(18),得

$$\dot{v}(x,e) \triangleq (\|x\|\|e\|)\phi(\|x\|\|e\|)' \leqslant 0. \tag{19}$$

这里

$$\phi = \begin{bmatrix} -rM_Q + 2raM_P & rM_k + rM_Pb + aM_0 + cM_0M_L \\ rM_k + rM_Pb + aM_0 + cM_LM_0 & -1 + 2bM_0 + 2dM_LM_0 \end{bmatrix}.$$

因此,闭环系统(12),(13)稳定等价于 ϕ 负定,即

$C1)$ $$-rM_Q + 2raM_P < 0, \text{即 } a < M_Q/2M_P. \tag{20}$$

$C2)$ $$|\phi| = \phi_1 + \phi_2 > 0.$$

这里 $\phi_1 \triangleq r(-M_Q + 2aM_P)(-1 + 2bM_0) - [r(M_k + bM_P) + aM_0]^2$;

$\phi_2 \triangleq -(cM_LM_0)^2 - 2cM_LM_0[r(M_k + bM_P) + aM_0] + 2M_LM_0r(-M_Q + 2aM_P)d$.

因此,$\phi > 0$ 等价存在一个正数 q,使得 $\phi_1 > q$ 和 $\phi_2 \geqslant -q$ 同时成立. 讨论如下:

1) 依 $\phi_1 > q$ 可得

$$b^2 + 2\beta b + \alpha < -q/(M_Pr)^2. \tag{21}$$

式中 $$\beta \triangleq [M_QM_0 - aM_PM_0 + rM_kM_P]/rM_P^2; \tag{22}$$

$$\alpha \triangleq [-rM_Q + 2aM_Pr + (rM_k)^2 + (aM_0)^2 + 2arM_kM_0]/(rM_P)^2. \tag{23}$$

式(21)的解为 $$b < -\beta + [\beta^2 - (\alpha + q/(M_Pr)^2]^{1/2}. \tag{24}$$

对式(22),$\beta < 0$ 等价于$a > (M_Q/M_P + rM_k/M_0)$,与式(20)矛盾,则只有 $\alpha + q/(rM_P)^2 < 0$. 将式(23)代入整理为

$$a^2 + 2\bar{\beta}a + \bar{\alpha} < 0. \tag{25}$$

式中 $$\bar{\beta} \triangleq r(M_kM_0 + M_P)/M_0^2; \tag{26}$$

$$\bar{\alpha} \triangleq (r^2M_k^2 + q - rM_Q)/M_0^2. \tag{27}$$

式(25)的解为 $$a < -\bar{\beta} + (\bar{\beta}^2 - \bar{\alpha})^{1/2}. \tag{28}$$

显然, $\bar{\beta} > 0$ 使得 $\bar{\alpha} < 0$ 时 a 有解,因此有

$$q < -r^2M_k^2 + rM_Q. \tag{29}$$

对 $q > 0$,“调整参数” r 应满足:

$$r < M_Q/M_k^2. \tag{30}$$

2) 据 $\phi_2 \geqslant -q$,可得

$$c^2 + 2\hat{\beta}c + \hat{\alpha}d \leqslant q/(M_L M_0)^2. \tag{31}$$

式中
$$\hat{\beta} \triangleq [r(M_k + bM_P) + aM_0]/(M_0 M_L); \tag{32}$$
$$\hat{\alpha} \triangleq 2r(M_Q - 2aM_P)/(M_0 M_L). \tag{33}$$

式(31)的解为
$$c \leqslant -\hat{\beta} + \{\hat{\beta}^2 - [\hat{\alpha}d - q/(M_L M_0)^2]\}^{1/2}. \tag{34}$$

对 $\hat{\beta} > 0$,式(34)中 $c > 0$ 有解的条件为
$$d < q/[2M_L M_0 r(M_Q - 2aM_P)]. \tag{35}$$

若 $M_Q - 2aM_P > 0$,上式对 $d > 0$ 有解,这与式(20)一致.

综上可得如下定理.

定理 1. 考虑不确定系统(3)和(4),采用观测器(10)和控制器(11)的设计,若非线性向量函数 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$ 满足式(14)和(15),调整参数 $r < M_Q/M_k^2$,存在正数 $q < -r^2M_k^2 + rM_Q$,使 a,b,c,d 满足:

$$a < \min\{M_Q/2M_P - \bar{\beta} + (\bar{\beta}^2 - \bar{\alpha})^{1/2}\}, \tag{36}$$
$$b < -\beta + \{\beta^2 - [\alpha + q/(rM_P)^2]\}^{1/2}, \tag{37}$$
$$c \leqslant -\hat{\beta} + \{\hat{\beta}^2 - [\hat{\alpha}d - q/(M_L M_0)^2]\}^{1/2}, \tag{38}$$
$$d \leqslant q/[2M_L M_0 r(M_Q - 2aM_P)]. \tag{39}$$

则闭环系统(12),(13)稳定. 式中 $\alpha,\beta,\bar{\alpha},\bar{\beta},\hat{\alpha},\hat{\beta}$ 分别由式(22),(23),(26),(27),(32),(33)决定.

注 1. 据定理 1,M_Q 应设计得足够大,以使在调整参数 r 的选择下有 $q > 0$ 使 $c,d>0$ 可解. 因为,若 $q = 0$ 意味着 $c = d = 0$,即 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}) = 0$. 换言之,要求输出测量无不确定性. 可见,常数 q 是标志输出测量可含不确定性的一个容限.

注 2. 对线性系统参数摄动,利用定理 1 易于得到更简洁实用的条件,结论适用于时变系统.

注 3. 定理 1 的结论可用于设计控制器和观测器增益,以及二次型指标中加权矩阵 Q 的选择.

参 考 文 献

[1] Anderson B D O, Moore J B. Linear optimal control. Prentice-Hall, 1971.

[2] Barmish B R, Galimid A R. Robustness of luenberger observer: Linear systems stabilized via nonlinear control. *Automatica*, 1986, **22**: 413—423.

[3] Patel R V, Toda M, Sridhar B. Robustness of linear quadratic static feedback design in the presence of system uncertainty. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1977, **22**: 945—949.

ROBUSTNESS OF OBSERVER-CONTROLLER DESIGNS FOR THE SYSTEMS IN THE PRESENCE DYNAMIC UNCERTAINTY

CHEN SHANBEN

(Dept. of Metal Material & Tech, Harbin Institute of Technology Harbin 150001 *China)*.

ZHANG QUAN　　ZHANG FUEN

(Dept. of Control Engg. Harbin Institute of Technology Harbin 150001 *China)*

WU LIN

(Dept. of Metal Material & Tech, Harbin Institute of Technology Harbin 150001 *China)*

ABSTRACT

In this paper, the problem of robustness stability of Luenberger observer-controller designs for the linearized systems in the presence dynamic uncertainties is investigated. The sufficient conditions which are easily verified by the bounds on the perturbations of the system parameters are given.

Key words: Robustness, uncertainty, observer-controller.