第21卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol.21, No.3
1995年5月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1995

非线性连续联想记忆神经网络的分析和优化设计

苗振江 袁保宗
(北方交通大学信息所 北京 100044)

摘 要

研究非线性连续联想记忆神经网络的渐近稳定性,得出几个定理. 在此基础上,提出了一种优化设计方法,并给出了理论证明. 目前已有的若干结论是本文所得定理的特例.

关键词: 神经网络,联想记忆,优化设计,稳定性.

1 引言

神经网络广泛应用于模式识别与人工智能等领域,解决了许多传统方法不易解决的问题,显示了其强大的生命力. 目前,将神经网络用于模式识别一般有两种方法: 1)用 BP 前馈型网络,通过训练,赋予其识别功能;2)应用 Hopfield 等反馈型网络的联想记忆功能,每个联想记忆点对应一个识别种类. 联想记忆是神经网络的一个重要功能,除用于识别外,还可用于其它一些领域. 渐近稳定平衡点是唯一可用于联想记忆的网络运行点,因为它是平衡点,网络运行可以最终稳定在该点上. 更重要的是它具有一定的吸引域,从而使网络具有很大的容错性和抗干扰性,网络的运行也更类似人脑的联想. 因此,研究网络渐近稳定平衡是研究网络联想记忆的关键所在. 这方面已有过一些研究工作[1,2],本文对此做了更深入的研究,所得结论更具有普遍意义. 应用这些结论,可设计联想记忆神经网络.

2 网络模型和目前已有结论

这里所研究的网络可用如下方程描述:

$$\dot{X} = -AX + Tf(X) + i_0. \tag{1}$$

其中 $X \in R^n$, $x_i (i = 1,2,\cdots,n)$是第 i 个神经元的状态变量;$f(X) = [f_1(x_1), f_2(x_2), \cdots, f_n(x_n)]^T$, $f_i(x_i)$ 为可微函数; $i_0 = (i_1, i_2, \cdots, i_n)^T$ 是网络的输入向量; $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$和 $T = (T_{ij})_{n\times n}$ 是 $n \times n$ 矩阵,且 $a_{ii} > 0, i = 1,2,\cdots,n$.

此模型具有一定代表性,很多网络模型(如连续的 Hopfield 网络模型,Grossberg 模

本文于1993年2月13日收到.

型)都是其特例。对此网络,已有以下结论。

定理1.[1] 对 $X^s \in R^n$,如果系统(1)在 X^s 满足:

$$AX^s - Tf(X^s) = i_0, \tag{2}$$

$$T_{ii}d(x_i) - a_{ii} < 0, i = 1,2,\cdots,n, \tag{3}$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |T_{ij}d(x_j)| - |T_{ii}d(x_i) - a_{ii}|, i = 1,2,\cdots,n, \tag{4}$$

则 X^s 为方程(1)神经网络的渐近稳定平衡点。其中, $d(x_k) = \partial f_k(x_k)/\partial x_k$。

此定理表明,如果网络参数满足式(2)—(4),则 X^s 为该网络的渐近稳定平衡点。只有这种点可用于联想记忆,因为联想记忆神经网络至少应保证以下条件:

(a) 期望的存贮模式对应于网络的平衡点,即网络具有记忆该模式的功能;

(b) 存贮模式要有一定范围的吸引域,从而使网络能够联想。

如果神经网络满足这两个条件,便可称之为联想记忆神经网络。

在设计联想记忆神经网络时,如果选择的参数 a_{ii} 和 T_{ij} 能够保证所有存贮模式 X^s 满足式(2)—(4),则此网络是一个联想记忆网络,X^s 为联想记忆点。由定理 1 可得如下推论:

推论1.[1] $X^s = \{X^{s_k}\}_{k=1}^{M}, X^{s_k} \in R^n$ 是方程(1)所描述神经网络的渐近稳定平衡点,如果对所有 $X^{s_k}(k = 1,2,\cdots,M)$ 满足:

$$AX^{s_k} - Tf(X^{s_k}) = i_0, \tag{5}$$

$$T_{ii}\frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i} - a_{ii} < 0, \quad i = 1,2,\cdots,n, \tag{6}$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left| T_{ij}\frac{\partial f_j(x_j)}{\partial x_j} \right| - \left| T_{ii}\frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i} - a_{ii} \right| < 0, i = 1,2,\cdots,n. \tag{7}$$

此推论说明,要设计一个有M个渐近稳定平衡点的网络,必须满足上面这 Mn 个方程和 $2Mn$ 个不等式,由此来选择 n^2 个未知的 T_{ij} 和 n 个 a_{ii}。

定理2.[2] 对 $X^s \in R^n$,如果系统(1)在 X^s 处满足:

$$AX = Tf(X) + i_0, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} |T_{ij}| - a_{ii} < 0, \ i = 1,2,\cdots,n, \tag{9}$$

则 X^s 为系统的渐近稳定平衡点。

同推论 1 类似,由定理 2 可得推论 2.它们都可作为设计联想记忆神经网络的准则。

对定理 1 ,还可得到如下等价形式,不妨称之为定理 1′。

定理1′. 对 $X^s \in R^n$,如果系统(1)在 X^s 处满足:

$$AX = Tf(X) + i_0, \tag{10}$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |T_{ij}d(x_j)| + T_{ii}d(x_i) - a_{ii} < 0, \ i = 1,2,\cdots,n, \tag{11}$$

则 X^s 为系统的渐近稳定平衡点。

对常用的 Sigmoid 函数、反正切函数、双曲正切函数和反双曲正弦函数等,它们的导

数均不大于 1. 选用这些函数作为 $f(x)$，则当(11)式成立时，定理 2 中的(9)式不一定成立；但当(9)式成立时，一定有(11)式成立，此时定理 2 是定理1′的特例.

3 网络渐近稳定平衡的进一步研究

这节将给出两个定理和两个推论，可以看到，前节给出的定理和推论都是其特例.

定理 3. 对 $X^s \in R^n$，如果系统(1)在 X^s 满足：

$$AX - Tf(x) = i_0, \tag{12}$$

$$T_{ii}d(x_i) - a_{ii} < 0, i = 1,2,\cdots,n, \tag{13}$$

$$\left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |T_{kj}d(x_j)|\right)\left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{n} |T_{lj}d(x_j)|\right) - (|T_{kk}d(x_k) - a_{kk}|)(|T_{ll}d(x_l) - a_{ll}|) < 0,$$

$$k,l = 1,2,\cdots,n, k \neq l, \tag{14}$$

则 X^s 为方程(1)神经网络的渐近稳定平衡点. 此定理与定理 1 的差别只在于(14)式与(4)式的不同. 因为 若 $a \geqslant 0, b \geqslant 0, c \geqslant 0, d \geqslant 0$，当 $a - b < 0, c - d < 0$ 时，一定有 $ac - bd < 0$. 所以，当(4)式成立时，(14)式一定成立；反之，(14)式成立时(4)式不一定成立. 所以定理 3 比定理 1 更具一般性. 通常，因为定理 2 是定理 1 的特例，因此定理 3 比定理 2 更具一般性. 在证明此定理之前，先给出证明中要用到的有关概念和引理.

定义 1. 若存在正对角阵 D，使 $C = AD$ 成为严格对角占优矩阵，即满足

$$|C_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |C_{ij}|,$$

则称 A 为广义对角占优矩阵.

引理 1.[3] 若 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为广义对角占优矩阵，$a_{ii}(i = 1,2,\cdots,n)$ 皆为实数，则 A 的实部为正(负)特征值的个数与 $a_{ii}(i = 1,2,\cdots,n)$ 中正(负)数的个数相同.

引理 2.[4] 若 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足

$$|a_{ii}||a_{kk}| > \Lambda_i\Lambda_k, \quad i,k = 1,2,\cdots,n, \quad i \neq k,$$

则 A 为广义对角占优矩阵，其中 $\Lambda_k = \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} |a_{kj}|$.

定理 3 的证明. 将(12)式代入(1)式，并令 $X = X^s$，则有

$$\dot{X}^s = -AX^s + Tf(X^s) + AX^s - Tf(X^s) = 0.$$

因此，X^s 是(1)式所描述神经网络的平衡点.

为保证 X^s 的局部渐近稳定性，将(1)式的右边在 X^s 邻近展开成 Taylor 级数

$$\dot{X} = -AX^s + Tf(X^s) + I + [TJ(X^s) - A](X - X^s) + O(\|X - X^s\|^2). \tag{15}$$

其中 $J(X^s)$ 是 $f(x)$ 在 $X = X^s$ 的 $n \times n$ Jacobian 矩阵，且

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_j}.$$

当 $X \to X^s$ 时，$O(\|X - X^s\|^2) \to 0$，将(12)式代入(15)式有

$$\dot{X} = [TJ(X^s) - A](X - X^s) + O(\|X - X^s\|^2). \tag{16}$$

定义 $Y = X - X^s$，显然有 $X = X^s$ 时 $Y = 0$，(16)式可重写为

$$\dot{Y} = \dot{X} - \dot{X}^s = \dot{X} = [TJ(X^s) - A]Y + O(\|Y\|^2). \tag{17}$$

如果常数矩阵 $[TJ(X^s) - A]$ 的特征值都在 s 平面的左半部分，则(17) 式的原点 $Y = 0$ (即 $X = X^s$) 就是局部渐近稳定的[5]。因此，$X = X^s$ 为(1)式神经网络渐近稳定平衡点的充分条件是 $[TJ(X^s) - A]$ 的特征值 $\lambda_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 位于 s 平面的左半部分。由引理 1 可知，只要矩阵 $[TJ(X^s) - A]$ 为广义对角占优矩阵，且对角线元素均为小于零的实数，就可保证它的所有特征值均在 s 平面的左半部分。

令 $M = TJ(X^s) - A$，因 f 是 x_k 的可微函数，又

$$J_{ij}(X^s) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \left.\dfrac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_j}\right|_{x_i = x_i^s}, & i = j. \end{cases}$$

因此有

$$M = \begin{cases} T_{ii}\left.\dfrac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i}\right|_{x_i = x_i^s} - a_{ii}, & i = j, \\ T_{ij}\left.\dfrac{\partial f_j(x_j)}{\partial x_j}\right|_{x_j = x_j^s}, & i \neq j. \end{cases}$$

欲保证矩阵M的对角线元素均小于零，应有

$$T_{ii}\left.\frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i}\right|_{x_i = x_i^s} - a_{ii} < 0, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

欲保证矩阵M为广义对角占优矩阵，由引理 2 得

$$[\,|T_{kk}d(x_k^s) - a_{kk}|\,][\,|T_{ll}d(x_l^s) - a_{ll}|\,] > \left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |T_{kj}d(x_j^s)|\right] \cdot \left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n} |T_{lj}d(x_j^s)|\right], \; k,l = 1,2,\cdots,n, k \neq l.$$

证毕。

由定理 3 也不难得出类似推论 1 的推论(略)。

定理 4. 对 $X^s \in R^n$，如果系统(1)在 X^s 满足:

$$AX - Tf(X) = i_0, \tag{18}$$

$$T_{ii}d(x_i) - a_{ii} < 0, i = 1,2,\cdots,n, \tag{19}$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{t} |T_{ij}d(x_j)| + \sum_{j=t+1}^{n} \sigma_j |T_{ij}d(x_j)| - |T_{ii}d(x_i) - a_{ii}| < 0, i = 1,2,\cdots,n, \tag{20}$$

则 X^s 为方程(1)神经网络的渐近稳定平衡点。其中 $1 \leqslant t \leqslant n$，$\sigma_i$ 定义为$\sigma_i = \Lambda_i / |a_{ii}|$。

显然，定理 1 为此定理在 $t = n$ 时的特例。证明此定理之前，先给出以下引理。

引理 3.[6] 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，若 $\forall s \in \theta_A, \theta_A = \{s \mid |a_{ss}| \leqslant \Lambda_s, s \in N = \{1,2,\cdots,n\}\}$，则有

$$|a_{ss}| > \sum_{\substack{t=1\\ t\neq s}}^{i} |a_{st}| + \sum_{t=i+1}^{n} \sigma_t |a_{st}|, 1 \leqslant i \leqslant n,$$

则A为广义对角占优矩阵。

定理 4 证明的前一部分同定理 3 的证明，此处不再重述。

欲保证M的对角线元素均小于零，有

$$T_{ii}d(x_i^s) - a_{ii} < 0, i = 1,2,\cdots,n.$$

欲保证矩阵M为广义对角占优矩阵，由引理 3 得

$$|T_{ii}d(x_i^s) - a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{t} |T_{ij}d(x_j^s)| + \sum_{j=t+1}^{n} \sigma_j |T_{ij}d(x_j^s)|, i = 1,2,\cdots,n.$$ 证毕。

由定理 4 也可得类似推论 1 的推论(略)。

4　网络的优化设计

文献[7]提出了联想记忆神经网络的一种优化设计方法，这种方法能够保证联想记忆神经网络所必须满足的两个条件(a)和(b)，同时保证网络的联想速度最快。文献[7]从能量函数的角度在理论上证明了这一方法，并从实验上给予验证。这里结合前面所述网络渐近稳定平衡，对此方法及有关结论作进一步研究，并从微分方程的角度，在理论上给出这一方法有效性的另一种证明。

在文献[7,8]中，以所推得的四个定理为准则，提出了网络优化设计方法。本文所提的两个定理同样用于优化设计方法，为此给出下述定理。

定理 5.　对 $X^s \in R^n$，若 X^s 满足定理1—4中的任一个，则在其渐近稳定范围内，S_i 越小，系统由初始状态 X 收敛于 X^s 的速度越快，其中

$$S_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |T_{ij}d(x_j^s) + T_{ji}d(x_i^s)| - 2a_{ii} + 2T_{ii}d(x_i^s), i = 1,2,\cdots,n. \tag{21}$$

为证明此定理，先给出下面引理。

引理 4.[9]　对A的瑞利商 $R(X) = \dfrac{X^TAX}{X^TX}$，$A$ 为 n 阶实对称矩阵，设A的特征值 λ_i 按如下顺序排列：

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n,$$

则有 $\lambda_n \leqslant R(X) \leqslant \lambda_1$，且 $\lambda_1 = \max[R(X)]$，$\lambda_n = \min[R(X)]$.

定理 5 的证明．X^s 是系统的平衡点，故有

$$\dot{X}^s = -AX^s + Tf(X^s) + i_0 = 0. \tag{22}$$

对 $\dot{X} = -AX + Tf(X) + i_0$，将其右边在 X^s 邻近展开成 Taylor 级数

$$\dot{X} = -AX^s + Tf(X^s) + i_0 + [TJ(X^s) - A](X - X^s) + O(\|X - X^s\|^2). \tag{23}$$

其中 $J(X^s)$ 为 $f(X)$ 在 $X = X^s$ 处的 $n\times n$ 雅可比矩阵

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_j}.$$

当 $X \to X^s$ 时，$O(\|X - X^s\|^2) \to 0$，$O(\|X - X^s\|^2)$ 表示 Taylor 展开的所有高阶项，将(22)式代入(23)式，有

$$\dot{X} = [TJ(X^s) - A](X - X^s) + O(\|X - X^s\|^2).$$

定义 $Y = X - X^s$,显然有, $X = X^s$ 时 $Y = 0$,所以上式又可写成

$$\dot{Y} = \dot{X} - \dot{X}^s = \dot{X} = [TJ(X^s) - A]Y + O(\|Y\|^2). \tag{24}$$

令 $E = TJ(X^s) - A, G(Y) = O(\|Y\|^2)$,则(24)式为

$$\dot{Y} = EY + G(Y).$$

再令 $V(Y) = Y^TY$,显然 $V(Y) \geqslant 0$,

$$\dot{V}(Y) = \frac{dY^T}{dt}Y + Y^T\frac{dY}{dt} = Y^T(E^T + E)Y + G^T(Y)Y + Y^TG(Y)$$

$$= Y^T(E^T + E)Y + 2G^T(Y)Y.$$

式中 $G^T(Y)$ 至少包含 Y_i 的二次项, $2G^T(Y)Y$ 至少包含 Y_i 的三次项. 若 $E^T + E$ 为负定矩阵,则对于充分接近原点的 Y,即充分接近 X^s 的 X, 必有 $\dot{V}(Y) < 0$. 此时, X^s 一定为系统的渐近稳定平衡点, $V(Y)$ 是系统的 Lyapunov 函数.

$$E^T + E = \begin{cases} -2a_{ii} + 2T_{ii}d(x_i^s), & i = j, \\ T_{ij}d(x_j^s) + T_{ji}d(x_i^s), & i \neq j. \end{cases}$$

为保证 $E + E^T$ 为负定矩阵,由矩阵理论知,必须保证 $E^T + E$ 的每个特征值都为负数. 由 Gersgorin 第一圆盘定理[10]可得到保证 $E + E^T$ 负定的条件为

$$T_{ii}d(x_i^s) - a_{ii} < 0, i = 1,2,\cdots,n,$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |T_{ij}d(x_j^s) + T_{ji}d(x_i^s)| - 2|T_{ii}d(x_i^s) - a_{ii}| < 0, i = 1,2,\cdots,n.$$

根据 Lyapunov 稳定性理论,可定义

$$\eta = -\frac{\dot{V}(Y)}{V(Y)}$$

来反映系统状态 Y 趋向于原点(即 X 趋向于平衡状态 X^s)的收敛速度. η 越大,表明收敛速度越快. η 可进一步写为

$$\eta = -\frac{Y^T(E^T + E)Y}{Y^TY} - \frac{2G^T(Y)Y}{Y^TY}.$$

式中第二项为高次项,可忽略其影响;第一项则是影响 η 值的关键. 为使 X 趋向于平衡状态 X^s 的速度足够快,应使第一项值最大,即$\frac{Y^T(E^T + E)Y}{Y^TY}$最小. 显然它的值是$E^T + E$ 的瑞利商. 由引理 4 可知,它的值在 $E^T + E$ 的最大特征值与最小特征值之间. 为保证 $\frac{Y^T(E^T + E)Y}{Y^TY}$最小,只需保证 $E^T + E$ 的最大与最小特征值都尽可能小, 即都取最小值. 由圆盘定理[10]知, 只需保证 $S_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 取最小值, 便可保证所有特征值最小. 也就是说,S_i 越小,从整体上来讲,系统状态 X 趋向于平衡点 X^s 的速度越快.证毕.

同文献[7]一样,可得如下优化设计方法:

$$\begin{cases} \min(S_i), i = 1,2,\cdots,n, \\ \text{约束条件: 定理 1—4 中的任一个.} \end{cases}$$

这是一个约束最优化问题, 用这种优化设计方法得到的联想记忆神经网络可保证条件(a)和(b), 同时保证网络的联想速度最快. 求解这种约束非线性规划问题,可用现有的

一些算法，如广义 Lagrange 乘子法等．对此优化设计方法的实验验证结果详见文[7]，因此方法所设计的网络的联想速度比未优化设计网络快十倍左右，而且能更好地保证条件(a)和(b)．

参　考　文　献

[1] Guez A, et al. On the stability storage capacity and design of nonlinear continuous neural networks. *IEEE Trains.SMC*, 1988, **18**(1): 80—87.

[2] Farell J A, Michel. A synthesis procedure for hopfield's continuous-Time associative memory. *IEEE Trans. CAS*, 1990,**37**(7):877—884.

[3] 游兆永，李磊．共轭广义对角占优矩阵的特征值分布．数学研究与评论，1989，**9**(2)：309—310．

[4] 高益明．矩阵广义对角占优和非奇的判定．东北师大学报(自然科学版)，1982，(3)：23—28．

[5] Gibson J E. Nonlinear automatic control. New York: McGraw Hill, 1963.

[6] 孙玉祥，杨忠鹏．广义对角占优矩阵的判定．数学杂志，1987，**7**(2)：143—146．

[7] Miao Zhenjiang, Yuan Baozong. Optimal design of hopfield type neural networks with application to associative memory. Proc. of 1992 IEEE INNS International Joint conference on neural networks, Vol.II,Beijing, China, 1992, 131—136.

[8] 苗振江，袁保宗．Hopfield 型联想记忆神经网络一种新的分析方法．电子学报，1993，**21**(10)：77—84．

[9] 王耕禄，史荣昌．矩阵理论．国防工业出版社，北京：1988．

[10] 余鄂西．科技中的矩阵理论．华中理工大学出版社，武汉：1988．

[11] Miao Zhenjiang, Yuan Baozong. Discussion on associative memory neural network design. Proc. of 1993 International Conference on Signal Processing, Beijing China, 1993.

ANALYSIS AND OPTIMAL DESIGN OF NONLINEAR CONTINUOUS ASSOCIATIVE MEMORY NEURAL NETWORKS

MIAO ZHENJIANG　　YUAN BAOZONG

(Institute of Information Science, Northern Jiaotong University Beijing 100044 *China)*

ABSTRACT

Associative memory and optimization are two most important neural network functions. Asymptotically stable equilibria are the only network operating points which can be used to associative memory. In this paper, the asymptotic stability for nonlinear continuous associative memory neural networks is studied. Several important theorems guaranteeing the network's asymptotic stability are derived. These theorems are more general than the existing conclusions to ensure the network's asymptotic stability. On the basis of these theorems, it is discussed how to used these theorems to optimally. design associative memory neural networks. The effectiveness of the optimal design method proposed in this paper is theoretically proved.

Key words: Neural network, associative memory, optimal design, stability.

苗振江 1987年毕业于清华大学无线电系，1990年和1994年于北方交通大学获硕士和博士学位. 主要从事多媒体(语声、图象、文字)信息处理、神经网络、模式识别与人工智能方面的研究工作,发表论文40余篇,获奖论文3篇. 现为IEE学生会员.

袁保宗 1960年于原苏联列宁格勒铁道工程学院获副博士学位,现为北方交通大学信息所所长、教授、博士与博士后导师，IEE北京中心副主任，IEEE会员，IEEE计算机学会北京分会主席. 1982至1983年在美国辛辛那提大学与匹斯堡大学作访问学者. 发表学术论文三百余篇,研究领域为语声处理、计算机视觉、多媒体信息处理等.