第21卷 第4期 自动化学报 Vol. 21, No. 4
1995年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1995

关联大系统的分散开环回路传递再生[1)]

胡寿松 范存海
(南京航空航天大学自控系 南京 210016)

摘 要

基于 H^∞ 理论和分散状态观测器，提出了不确定性关联大系统的分散开环回路传递再生方法. 给出了满足开环再生矩阵 H^∞ 范数要求的观测器的存在性. 在大系统关联项块对角奇异值分解的基础上，证明了通过解 Riccati 方程可以求得使开环再生差阵满足要求的分散观测器增益阵，以实现分散开环传递再生. 试验结果表明，分散开环回路传递再生控制性能与分散状态反馈控制性能基本相同.

关键词: 关联大系统,开环回路传递再生,分散观测器, H^∞ 范数.

1 引言

当被控对象模型具有不确定性时,用状态反馈与观测器设计分离原理得到的控制律,并不总能获得与状态反馈系统同样的性能. 回路传递再生 (LTR) 正是解决这个问题的有效方法[1].

开环 LTR 以状态反馈系统的某一开环传递矩阵为目标回路传递矩阵，设计动态输出反馈控制律,使输出反馈系统的开环传递矩阵与目标回路传递矩阵匹配. 文[2]给出了可开环 LTR 的条件,但有关分散开环 LTR 的方法还鲜见于文献.

本文基于 H^∞ 理论,将开环 LTR 问题转化为 H^∞ 优化问题，研究了不确定性关联大系统的分散开环 LTR 的控制律设计,提出了一种新的分散观测器构造方法,可使系统具有与分散状态反馈类似的性能.

2 开环集中回路传递再生控制

考虑线性定常不确定性系统

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= (A+\Delta A)\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} + D\boldsymbol{w}, \\ \boldsymbol{y} &= C\boldsymbol{x} + H\boldsymbol{w}, \\ \boldsymbol{z} &= E\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n$ 为状态，$\boldsymbol{u}\in R^m$ 为控制，$\boldsymbol{w}\in R^l$ 为扰动，$\boldsymbol{y}\in R^k$ 为量测输出，$\boldsymbol{z}\in R^p$ 为

1) 国家自然科学基金和江苏省自然科学基金资助项目.
本文于1993年7月5日收到

被控输出. 设不确定参数阵 ΔA 未知但有界,且

$$\Delta A=\sum_{i=1}^{M}a_i\Delta A_i. \tag{2}$$

式中 ΔA_i 为已知常阵, a_i 为不确定参数,且有 $|a_i|<1, i=1,2,\cdots,M$.

设系统(1)的矩阵三元组 (A, B, C) 可稳可观. 令 K 为状态反馈阵, 要求在控制律 $\boldsymbol{u}=-K\boldsymbol{x}$ 的作用下, 对所有满足式(2)的 ΔA, 使系统(1)闭环渐近稳定, 且 H^∞ 性能次优. 由于系统已对 ΔA 具有鲁棒性,而 LTR 的目的是设计输出反馈控制律, 使之具有与状态反馈类似的性能,因此可令系统(1)中的 $\Delta A=0$, 作为 LTR 设计时的确定性研究对象.

开环 LTR 的目标回路传递矩阵有多种取法. 本文取状态反馈系统在对象输入处断开的开环传递矩阵为目标回路传递矩阵 $H_a(s)$. 相应的输出反馈开环传递矩阵为 $H_b(s)=N(s)G(s)$. 其中, $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$ 为对象传递矩阵; $N(s)$ 为补偿器传递矩阵, 由观测器实现. 令 $E_0(s)=H_b(s)-H_a(s)$ 为开环再生差阵, 则开环 LTR 的目的是设计 $N(s)$, 使 $E_0(s)$ 精确或近似等于零阵.

3 分散开环回路传递再生控制

由于 $H_b=H_a+(H_b-H_a)$, 所以输出反馈系统可以看成状态反馈系统具有摄动 $E_0(s)$ 的情况.

引理 1[3]. 若

$$\delta=\|(H_b-H_a)(I+H_a)^{-1}\|_\infty<1. \tag{3}$$

则输出反馈系统稳定,并称 δ 为再生度.

由引理 1 知: 若 $\delta=0$,必有 $E_0(s)=0$, 此时完全实现开环 LTR; 若 $0<\delta<1$, 则近似实现开环 LTR; 若 $\delta\geqslant 1$, 则开环 LTR 失效.

考虑由 N 个子系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}_i&=A_i\boldsymbol{x}_i+B_i\boldsymbol{u}_i+D_i\boldsymbol{w}_i+\sum_{j=1(j\neq i)}^{N}A_{ij}\boldsymbol{x}_j,\\ \boldsymbol{y}_i&=C_i\boldsymbol{x}_i+H_i\boldsymbol{w}_i,\\ \boldsymbol{z}_i&=E_i\boldsymbol{x}_i\end{aligned} \tag{4}$$

组成的确定性关联大系统(1),其中 $\Delta A=0$, B、C、D、E、H 为分块对角阵. 已知 $K=\mathrm{diag}\{K_1,K_2,\cdots,K_N\}$, 若取基于分散观测器的补偿器

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}&=(A-FC)\hat{\boldsymbol{x}}+B\boldsymbol{u}+F\boldsymbol{y},\\ \boldsymbol{u}&=-K\hat{\boldsymbol{x}}.\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $F=\mathrm{diag}\{F_1,F_2,\cdots,F_N\}$ 为分散观测器增益阵,则有 $N(s)=K(sI-A+BK+FC)^{-1}F$. 因为

$$H_b(s)=K(sI-A+BK+FC)^{-1}FC(sI-A)^{-1}B, \tag{6}$$

所以有

$$\begin{aligned}E_0(s)&=-K(sI-A+BK+FC)^{-1}B[I+H_a(s)],\\ \delta&=\|K(sI-A+BK+FC)^{-1}B\|_\infty.\end{aligned} \tag{7}$$

若令开环再生矩阵

$$M_0(s) = K(sI - A + BK + FC)^{-1}B, \tag{8}$$

则分散开环 LTR 转化为确定 F，使 $\|M_0(s)\|_\infty < 1$.

4 主要结果

引理 2[4]. 设矩阵 $\bar{A}$、$\bar{B}$ 和 $\bar{C}$ 维数适当. 若对给定正标量 δ，存在一对称正定阵 P 和一正标量 ε，使

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}P + P\bar{A} + \varepsilon\delta^{-1}P\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}P + (\delta\varepsilon)^{-1}\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C} < 0. \tag{9}$$

则 $\bar{A}$ 渐近稳定，且 $\|\bar{H}(s)\|_\infty = \|\bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B}\|_\infty < \delta$.

定理 1. 令再生度 $\delta > 0$. 若存在正标量 ε 和正定阵 Q_0，使 Riccati 方程

$$(A - BK)^{\mathrm{T}}P_0 + P_0(A - BK) + \varepsilon\delta^{-1}P_0K^{\mathrm{T}}KP_0 + (\varepsilon\delta)^{-1}BB^{\mathrm{T}} - P_0C^{\mathrm{T}}CP_0 + Q_0 = 0. \tag{10}$$

有一对称正定解 P_0，则存在一个观测器增益阵

$$F = \gamma_0 P_0 C^{\mathrm{T}},\ \gamma_0 \geqslant 1/2, \tag{11}$$

满足 $\|M_0(s)\|_\infty < \delta$.

证明. 设 $P_0 = P_0^{\mathrm{T}} > 0$ 是式(10)的解. 令

$$\hat{Q}_0 = -(A - BK - FC)^{\mathrm{T}}P_0 - P_0(A - BK - FC) - \varepsilon\delta^{-1}P_0K^{\mathrm{T}}KP_0 - (\varepsilon\delta)^{-1}BB^{\mathrm{T}}. \tag{12}$$

因 $\|M_0(s)\|_\infty = \|M_0^{\mathrm{T}}(s)\|_\infty$，故由引理 2 知，欲证结论成立，仅需证 $\hat{Q}_0 > 0$. 由式(10)及(11)得

$$\hat{Q}_0 = -P_0C^{\mathrm{T}}CP_0 + 2FCP_0 = (2\gamma_0 - 1)P_0C^{\mathrm{T}}CP_0 + Q_0. \tag{13}$$

由于 $\gamma_0 \geqslant 1/2$，必有 $\hat{Q}_0 \geqslant Q_0 > 0$.

定理 1 表明，若取 $0 < \delta < 1$，则满足 H^∞ 范数要求的 F 是存在的，但不一定是分散的. 为此，在确定性系统(1)中，令 $A = \bar{A} + \Delta\bar{A}$，其中 $\bar{A}$ 分块对角，则由文[5]知

$$\Delta\bar{A} = \sum_{i=1}^{N-1}\Delta\bar{A}_i. \tag{14}$$

定理 2. 若对矩阵 $\Delta\bar{A}_i$ 进行奇异值分解

$$\Delta\bar{A}_i = (U\Sigma)(V\Sigma)^{\mathrm{T}} = X_iY_i^{\mathrm{T}}. \tag{15}$$

则必有

$$\begin{aligned} X_iX_i^{\mathrm{T}} &= \mathrm{diag}\{\bar{X}_{i1}, \bar{X}_{i2}, \cdots, \bar{X}_{iN}\}, \\ Y_iY_i^{\mathrm{T}} &= \mathrm{diag}\{\bar{Y}_{i1}, \bar{Y}_{i2}, \cdots, \bar{Y}_{iN}\}. \end{aligned} \tag{16}$$

证明. 令 $U = [U_1^{\mathrm{T}}U_2^{\mathrm{T}}\cdots U_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$V = [V_1^{\mathrm{T}}V_2^{\mathrm{T}}\cdots V_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，则

$$\Delta\bar{A}_i = \begin{bmatrix} U_1\Sigma^2V_1^{\mathrm{T}} & U_1\Sigma^2V_2^{\mathrm{T}}\cdots & U_1\Sigma^2V_N^{\mathrm{T}} \\ U_2\Sigma^2V_1^{\mathrm{T}} & U_2\Sigma^2V_2^{\mathrm{T}}\cdots & U_2\Sigma^2V_N^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_N\Sigma^2V_1^{\mathrm{T}} & U_N\Sigma^2V_2^{\mathrm{T}}\cdots & U_N\Sigma^2V_N^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

因 U 和 V 为酉阵，故 $U^{\mathrm{T}}U = \sum_{j=1}^{N}U_j^{\mathrm{T}}U_j = I$，$V^{\mathrm{T}}V = \sum_{j=1}^{N}V_j^{\mathrm{T}}V_j = I$. 于是 $U_1\Sigma^4U_2^{\mathrm{T}} =$

$U_1\Sigma^2\left(\sum_{j=1}^{N}V_j^{\mathrm{T}}V_j\right)\Sigma^2U_2^{\mathrm{T}}$. 由 $\Delta\bar{A}_i$ 的等价关系式知：当 $j \neq i+1$ 时，$U_1\Sigma^2V_j^{\mathrm{T}}=0$；当 $j=i+1$ 时，$U_2\Sigma^2V_j^{\mathrm{T}}=0$. 故 $U_1\Sigma^4U_2^{\mathrm{T}}=0$. 从而 $U_1\Sigma^2\left(\sum_{j=1}^{N}U_j^{\mathrm{T}}U_j\right)\Sigma^2U_2^{\mathrm{T}}=0$. 该式左乘 $(U_1\Sigma^2U_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，可得 $\Sigma U_1^{\mathrm{T}}U_1\Sigma^2U_2^{\mathrm{T}}=0$. 以 $U_2\Sigma$ 左乘该式两端，立即证得 $U_1\Sigma^2U_2^{\mathrm{T}}=0$. 同理可证 $X_iX_i^{\mathrm{T}}$ 的其他非对角块，以及 $Y_iY_i^{\mathrm{T}}$ 的所有非对角块为零.

定理 3. 令 $\delta>0$. 若存在正标量 ε、$\varepsilon_j(j=1,2,\cdots,N-1)$ 和矩阵 $Q_0=\mathrm{diag}\cdot\{Q_{01},Q_{02},\cdots,Q_{0N}\}>0$，使得 Riccati 方程

$$(\bar{A}-BK)^{\mathrm{T}}P_0+P_0(\bar{A}-BK)+\sum_{j=1}^{N-1}(\varepsilon_jP_0Y_jY_j^{\mathrm{T}}P_0+\varepsilon_j^{-1}X_jX_j^{\mathrm{T}})$$
$$+\varepsilon\delta^{-1}P_0K^{\mathrm{T}}KP_0+(\varepsilon\delta)^{-1}BB^{\mathrm{T}}-P_0C^{\mathrm{T}}CP_0+Q_0=0. \tag{18}$$

有一对称正定解 P_0，其中 X_j 和 Y_j 由定理 2 得到，则 $P_0=\mathrm{diag}\{P_{01},P_{02},\cdots,P_{0N}\}$，且存在一分散观测器增益阵

$$F=\mathrm{diag}\{F_1,F_2,\cdots,F_N\}=\gamma_0P_0C^{\mathrm{T}},\quad \gamma_0\geqslant 1/2, \tag{19}$$

使得 $\|M_0(s)\|_\infty<\delta$.

证明. 因矩阵 $\bar{A}$、B、C、K、Q_0、$X_jX_j^{\mathrm{T}}$ 和 $Y_jY_j^{\mathrm{T}}(j=1,2,\cdots,N-1)$ 均为块对角阵，所以若方程(18)有正定解，就必有一解为块对角阵. 令

$$\hat{Q}_0=-(\bar{A}-BK-FC)^{\mathrm{T}}P_0-P_0(\bar{A}-BK-FC)$$
$$-\varepsilon\delta^{-1}P_0K^{\mathrm{T}}KP_0-(\varepsilon\delta)^{-1}BB^{\mathrm{T}}. \tag{20}$$

由式(18)及(19)得

$$\hat{Q}_0=\sum_{j=1}^{N-1}(\varepsilon_jP_0Y_jY_j^{\mathrm{T}}P_0+\varepsilon_j^{-1}X_jX_j^{\mathrm{T}}-X_jY_j^{\mathrm{T}}P_0-P_0Y_jX_j^{\mathrm{T}})$$
$$+(2\gamma_0-1)P_0C^{\mathrm{T}}CP_0+Q_0\geqslant(2\gamma_0-1)P_0C^{\mathrm{T}}CP_0+Q_0\geqslant Q_0>0. \tag{21}$$

故由引理 2 知，结论为真.

推论 1. 令 $\delta>0$. 若存在正标量 $\varepsilon_j(j=1,2,\cdots,N-1)$、$\varepsilon$ 和矩阵 $Q_{0i}>0(i=1,2,\cdots,N)$，使得 Riccati 方程

$$(\bar{A}_i-B_iK_i)^{\mathrm{T}}P_{0i}+P_{0i}(\bar{A}_i-B_iK_i)+\sum_{j=1}^{N-1}(\varepsilon_jP_{0i}\bar{Y}_{ji}P_{0i}+\varepsilon_j^{-1}\bar{X}_{ji})$$
$$+\varepsilon\delta^{-1}P_{0i}K_i^{\mathrm{T}}K_iP_{0i}+(\varepsilon\delta)^{-1}B_iB_i^{\mathrm{T}}-P_{0i}C_i^{\mathrm{T}}C_iP_{0i}+Q_{0i}=0 \tag{22}$$

存在一对称正定解 P_{0i}，则存在分散观测器增益阵 $F=\mathrm{diag}\{F_1,F_2,\cdots,F_N\}$，其中

$$F_i=\gamma_0P_{0i}C_i^{\mathrm{T}},\quad \gamma_0\geqslant 1/2(i=1,2,\cdots,N), \tag{23}$$

使 $\|M_0(s)\|_\infty<\delta$. 式中 $\bar{A}_i$、B_i、K_i、C_i、P_{0i}、$\bar{X}_{ji}$、$\bar{Y}_{ji}$ 和 Q_{0i} 分别为块对角阵 $\bar{A}$、B、K、C、P_0、$X_jX_j^{\mathrm{T}}$、$Y_jY_j^{\mathrm{T}}$ 和 Q_0 的对角块.

证明. 结论显然真.

根据定理 3 或推论 1，令 $0<\delta<1$，通过解 Riccati 方程(18)或(22)可以求得合适的分散观测器增益阵 F，以实现分散开环 LTR.

5 算例与仿真

考虑下列子系统组成的可稳可观大系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_1+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0.1 & 0 & 0.2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_2+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u_1+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}w_1,$$

$$y_1=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_1+0.1w_1,$$

$$z_1=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_1.$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_2+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ -0.2 & 0.1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_1+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u_2+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}w_2,$$

$$\boldsymbol{y}_2=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_2+\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix}w_2,$$

$$z_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_2.$$

其特征值为 $1, 1.2775\pm j0.3066, 0.7225\pm j0.2$. 一个可接受的分散状态反馈增益阵为 $K=\mathrm{diag}\{K_1, K_2\}$, 其中 $K_1=[7.2623 \quad 5.4765]$, $K_2=[18.8625 \quad 14.5184 \quad 8.0877]$. 相应的闭环特征值为 -3.8390, $-0.6279\pm j0.5278$, -1.5395, -1.9298. 取 $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon=0.001$, $\delta=0.5$, $Q_0=0.01I$, 得分散观测器增益阵 $F=\mathrm{diag}\{F_1, F_2\}$, 其中

$$F_1=\begin{bmatrix}0.4525\\ 21.2820\end{bmatrix},\quad F_2=\begin{bmatrix}2.2107 & 0.7420\\ -1.4372 & -0.2916\\ 1.6428 & 22.2061\end{bmatrix}.$$

相应的闭环特征值为 $-0.938\pm j0.8523$, -1.1212, -19.0547, -21.0987. 系统在扰动下的输出响应如图 1 所示. 图中, zs 表示分散状态反馈系统的被控输出, zo 表示分散开环 LTR 的被控输出. 仿真结果表明,两者具有类似的性能.

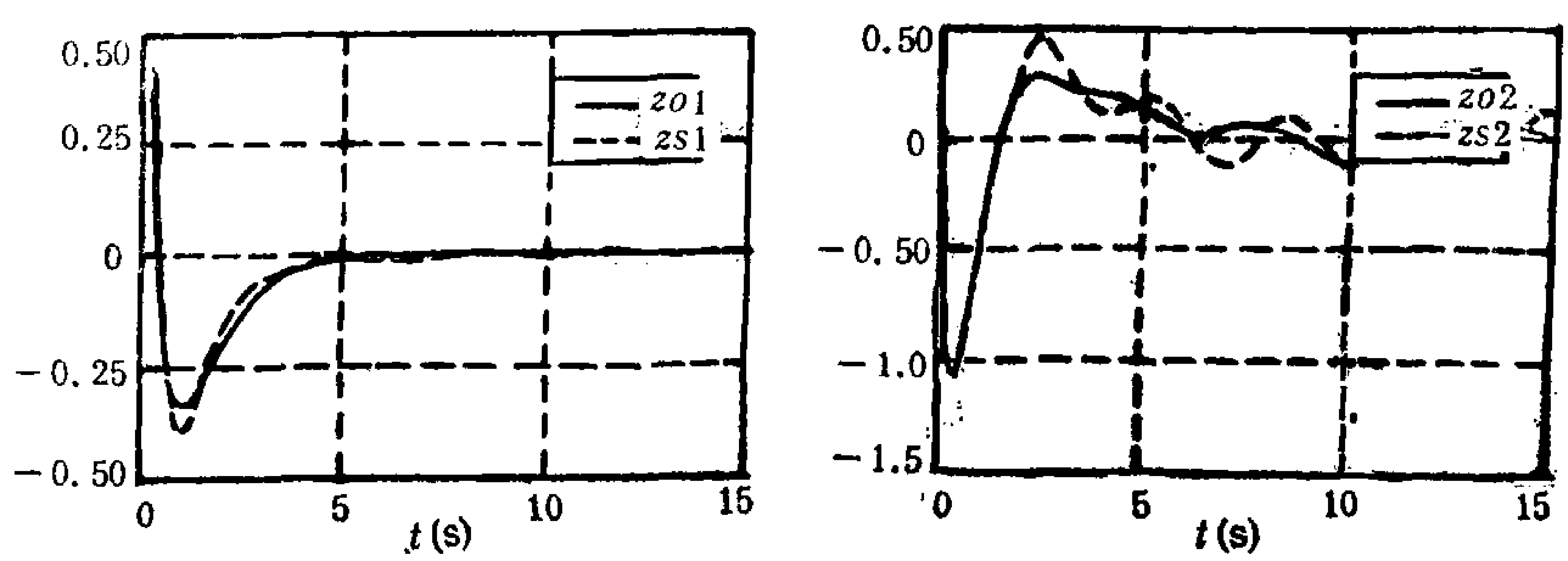

图 1 分散开环 LTR 输出响应

参 考 文 献

[1] Doyle J C. Robustness with Observers. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1979, **AC-24**: 492—498.

[2] Saberi A, Sannuti P. Observer Design for Loop Transfer Recovery and for Uncertain Dynamical Systems. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1990, **AC-35**: 878—897.

[3] Saeki M. H^∞/LTR Procedure with Specified Degree of Recovery. *Automatica*, 1992, **28**: 509—517.

[4] Wang Y J, Shieh L S. Observer Based Robust H^∞ Control Laws for Uncertain Linear Systems. AIAA J. Guidance, *Control and Dynamic*, 1991, **14**: 741—751.

[5] 胡寿松，范存海，何亚群. 关联大系统的分散 H^∞/LTR 控制. 自动化学报，1995，**21**(1)：9—16.

DECENTRALIZED OPEN LOOP TRANSFER RECOVERY FOR LARGE SCALE INTERCONNECTED SYSTEMS

Hu Shousong　Fan Cunhai

(Dept. of Automatic Control, Nanjing Univ. of Aero. & Astro. Nanjing 210016)

Abstract

A method of decentralized open-loop transfer recovery is proposed for uncertainly interconnected large-scale systems, which is based on the H^∞ theory and decentralized state observers. The existence of those observers which satisfies the requirement for the recovery matrix H^∞-norm, is given. Based on the block-diagnal singular value decomposition to the interconnections of the large-scale systems, we proved that the decentralized observer gain matrix can be obtained by solving Riccati equations, and open-loop recovery difference matrix satisfies the requirement. The decentralized open-loop transfer recovery is then realized. The experiment results show that the control performance of the decentralized open-loop transfer recovery are similar to that of the decentralized state feedback.

Key words: Interconnected large-scale system, open-loop transfer recovery, decentralized observer, H^∞-norm.

胡寿松　照片及简介见本刊第 21 卷第 1 期.

范存海　1993 年毕业于南京航空航天大学自动控制系，获工学硕士学位. 现任南京中电电力科技开发公司主管工程师. 感兴趣的研究领域为可靠控制、H^∞鲁棒控制及大系统分散控制等.