第21卷 第4期　　自 动 化 学 报　　Vol. 21, No. 4
1995年7月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 1995

不变根分布的多项式的最大摄动界[1)]

赵克友
（青岛大学电气工程系　青岛　266071）

郭磊
（青岛大学应用数学系　青岛　266071）

摘　　要

已知不确定的特征多项式 $p(s,q)$，其系数依赖于参数向量 q，一个富有意义的问题是：可以允许 q 摄动多大而使摄动后的多项式仍保持标称多项式 $p(s,\mathbf{0})$ 所具有的惯性（亦称根分布）数？这就是所谓不变根分布的多项式的最大摄动界问题. 本文将就仿射线性及仿射双线性两情况给出上述问题的解答与算法.

关键词： 根分布鲁棒性，特征多项式，结构摄动，仿射线性，仿射双线性.

1　问题的叙述

对于 n 阶实系数多项式

$$p(s)=a_0+a_1s+\cdots+a_ns^n, \tag{1}$$

定义它的 Hurwitz 矩阵（$(n-1)$ 阶方阵）为：

$$H\triangleq\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & & \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & & \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_{n-1} \end{pmatrix} \tag{2}$$

以下的 Orlando 公式揭示了 $\det H$ 与 $p(s)$ 的诸根 $s_i, i=1,2,\cdots,n$ 之间的关系[1]：

$$\det H=(-1)^{n(n-1)/2}a_n^{n-1}\prod_{1\leqslant i<k\leqslant n}(s_i+s_k) \tag{3}$$

定义 1.1. 如果多项式(1)满足

$$A_1.\ \begin{cases} a_n\neq 0,\ a_0\neq 0 \\ \det H\neq 0 \end{cases}$$

则称它是 $\mathscr{N}$ 类多项式.

1）山东省自然科学基金资助项目.
本文于1993年7月9日收到.

由(3)可得 $\mathscr{N}$ 类多项式的等价而直观的描述：无零根以及关于复平面原点对称根的 n 阶实多项式的全体.

定义 1.2. 如果多项式(1)满足

$$A_2.\ \begin{cases} a_n \neq 0 \\ p(j\omega) \neq 0,\ \forall \omega \in \boldsymbol{R} \end{cases}$$

则称它是 $\mathscr{M}$ 类多项式.

$\mathscr{M}$ 类多项式的直观含义：无零根以及纯虚根的 n 阶实多项式的全体. 因实多项式若有复根必共轭出现,特别地,纯虚根一定对称于原点,故有如下关系:

$$\mathscr{N} \subset \mathscr{M} \tag{4}$$

当模型发生结构摄动时，线性时不变系统的特征多项式常呈如下的结构摄动形式:

$$p(s,\boldsymbol{q}) = a_0(\boldsymbol{q}) + a_1(\boldsymbol{q})s + \cdots + a_n(\boldsymbol{q})s^n \tag{5}$$

其中系数 $a_i(\boldsymbol{q})$ 连续地依赖于不确定参数向量 $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_l)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^l$. 在参量空间 $\boldsymbol{R}^l$ 中,记以原点为中心、半径为 r 的开球为

$$U(r) \triangleq \left\{\boldsymbol{q} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{l} q_i^2 < r^2\right\}$$

其边界球面为

$$\partial U(r) \triangleq \left\{\boldsymbol{q} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{l} q_i^2 = r^2\right\}$$

所谓 $\mathscr{N}$ 类多项式最大摄动界问题,系指

NP：设(5)的标称多项式 $p(s,\boldsymbol{0}) \in \mathscr{N}$, 其中 $\boldsymbol{0} = (0,\cdots 0)^{\mathrm{T}} \in R^l$, 求

$$r_{\max} = \max\{r \mid p(s,\boldsymbol{q}) \in \mathscr{N}, \forall \boldsymbol{q} \in U(r)\} \tag{6}$$

所谓 $\mathscr{M}$ 类多项式最大摄动界问题,系指

MP：设(5)的标称多项式 $p(s,\boldsymbol{0}) \in \mathscr{M}$, 求

$$\rho_{\max} = \max\{\rho \mid p(s,\boldsymbol{q}) \in \mathscr{M}, \forall \boldsymbol{q} \in U(\rho)\} \tag{7}$$

上述 NP 与 MP 是两个不尽相同但有一定联系的问题,由(4)可知 $r_{\max} \leqslant \rho_{\max}$. 关于 NP 以及它与 MP 之间的缺口 (Gap)，我们将另文讨论. 本文只限 NP 问题.

2 NP 与不变惯性摄动界之关系

本节将说明 NP 与不变惯性最大摄动界问题的联系.

定义 2.1 若多项式(1)在开左半复平面、虚轴及开右半复平面上的根的数目分别为 ξ、ζ 与 η, 则称三元数 (ξ,ζ,η) 为 $p(s)$ 的惯性数 (inertia number), 记为 $\mathrm{In}p(s) = (\xi, \zeta, \eta)$. 若一个多项式族 $\mathscr{P}$ 中的所有成员都有同样不变的惯性数,则称 $\mathscr{P}$ 有不变惯性 (invariant inertia).

显然，一个多项式族具有不变惯性的必要条件是它有不变阶次 (invariant order).

命题 2.1: 设(5)的标称多项式 $p(s,\boldsymbol{0}) \in \mathscr{N}$, 则必存在 $r > 0$, 使得 $p(s,\boldsymbol{q}) \in \mathscr{N}$, $\forall \boldsymbol{q} \in U(r)$; 进一步,对此 r 有 $\mathrm{In}p(s,\boldsymbol{q}) = \mathrm{In}p(s,\boldsymbol{0})$, $\forall \boldsymbol{q} \in U(r)$.

证明. 记 $p(s,\boldsymbol{q})$ 的 Hurwitz 矩阵为 $H(\boldsymbol{q})$. $p(s,\boldsymbol{0}) \in \mathscr{N}$ 意指 $a_n(\boldsymbol{0}) \neq 0$,

$a_0(\mathbf{0}) \neq 0$ 及 $\det H(\mathbf{0}) \neq 0$，由连续性假设知，在参数空间中必存在点 0 的邻域球 $U(r)$，使在其上有 $a_n(\boldsymbol{q}) \neq 0$，$a_0(\boldsymbol{q}) \neq 0$ 及 $\det H(\boldsymbol{q}) \neq 0$. 由定义 1.1 知 $p(s,\boldsymbol{q}) \in \mathscr{N}$，$\forall \boldsymbol{q} \in U(r)$. 下证命题的第二部分.

设存在 $r > 0$，有 $p(s,\boldsymbol{q}) \in \mathscr{N}, \forall \boldsymbol{q} \in U(r)$. 由 $p(s,\mathbf{0}) \in \mathscr{N}$ 知，$p(s,\mathbf{0}) \in \mathscr{M}$，即 $p(s,\mathbf{0})$ 无虚轴根. 假若存在某 $\tilde{\boldsymbol{q}} \in U(r)$，使 $\mathrm{In}p(s,\tilde{\boldsymbol{q}}) \neq \mathrm{In}p(s,\mathbf{0})$，根据多项式根对参数 $\boldsymbol{q}$ 的连续依赖关系，在 $\mathbf{0}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{q}}$ 的连线上必有一点 $\hat{\boldsymbol{q}} \in U(r)$，使 $p(s,\hat{\boldsymbol{q}})$ 有虚轴根，即 $p(s,\hat{\boldsymbol{q}}) \notin \mathscr{M}$，故 $p(s,\hat{\boldsymbol{q}}) \notin \mathscr{N}$，与假设矛盾. 命题得证. □

命题 2.1 指出了 $\mathscr{N}$ 类多项式最大摄动界与多项式不变惯性最大摄动界之间的关系，而后者是比单纯的鲁棒 Hurwitz 稳定意义下更广泛的一类问题[2]. 此外，我们的问题还具有实际应用方面的背景. 当我们对结构型摄动系统运用诸如 Nyquist 判据或者对非线性摄动系统运用圆判据时，首先应判明开环传函分母多项式族(结构摄动型)的不变惯性数，或者说由标称系统所推得的闭环稳定性不被破坏所允许的最大参数摄动范围. 不变惯性在某些文献中亦称根分布不变性，它是近期文献出现的热门问题之一(参见文献[2,3,4]).

不变惯性最大摄动界问题是在一般稳定性摄动界问题基础上的深化，其难度与(5)中各系数对 $\boldsymbol{q}$ 的依赖复杂性及 $\boldsymbol{q}$ 维数的高低有关. 因为低维参数情况在应用中特别常见[5]，因此以下各节只涉及二维参数情况. §3 讨论仿射线性摄动情形；§4 论及仿射双线性摄动情形；§5 为结语.

3 二维仿射线性摄动情况下的最大摄动球

下设 $\boldsymbol{q} = [q_1, q_2]'$，且(5)中诸系数满足

$$a_i(q_1,q_2) = a_{i0} + a_{i1}q_1 + a_{i2}q_2 \tag{8}$$

其中 a_{ik}, $i = 0,1,\cdots,n, k = 0,1,2$ 皆为给定实数. 令 $p_k(s) = \sum_{i=0}^{n} a_{ik}s^i$，$k = 0,1,2$，则(5)可重写为

$$p(s,q_1,q_2) = p_0(s) + q_1p_1(s) + q_2p_2(s) \tag{9}$$

(9)的标称多项式是 $p_0(s)$，而 $p_1(s)$ 与 $p_2(s)$ 可视为两个“摄动方向”.

将 $p(s,q_1,q_2)$、$p_k(s)(k = 0,1,2)$ 对应的 Hurwitz 矩阵分别记作 $H(q_1,q_2)$、$H_k(k = 0,1,2)$. 将(8)代入(2)，易得

$$H(q_1,q_2) = H_0 + q_1H_1 + q_2H_2 \tag{10}$$

在二维仿射线性摄动情况下 NP 问题为：设 $a_{n0} \neq 0, a_{00} \neq 0$ 及 $\det H_0 \neq 0$，求 $r_{\max} = \max\{r\}$，使对 $\forall (q_1,q_2) \in U(r)$ 同时成立：

1) $a_{n0} + a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 \neq 0$;

2) $a_{00} + a_{01}q_1 + a_{02}q_2 \neq 0$;

3) $\det(H_0 + q_1H_1 + q_2H_2) \neq 0$.

显然上述问题可分解为如下三个子问题.

NP_1：设 $a_{n0} \neq 0$，求

$$r_n^* = \min\{r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \mid a_{n0} + a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 = 0\}$$

NP_2：设 $a_{00} \neq 0$，求

$$r_0^* = \min\{r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \mid a_{00} + a_{01}q_1 + a_{02}q_2 = 0\}$$

NP_3：设 $\det H_0 \neq 0$，求

$$r^* = \min\{r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \mid \det(H_0 + q_1 H_1 + q_2 H_2) = 0\}$$

而 NP 问题的最终解为

$$r_{\max} = \min\{r_n^*, r_0^*, r^*\} \tag{11}$$

上面的 NP_1 与 NP_2 是简单的极值问题，其解为

$$r_n^* = \begin{cases} \dfrac{|a_{n0}|}{\sqrt{a_{n1}^2 + a_{n2}^2}}, & a_{n1}^2 + a_{n2}^2 \neq 0 \\ +\infty, & a_{n1}^2 + a_{n2}^2 = 0 \end{cases} \tag{12}$$

$$r_0^* = \begin{cases} \dfrac{|a_{00}|}{\sqrt{a_{01}^2 + a_{02}^2}}, & a_{01}^2 + a_{02}^2 \neq 0 \\ +\infty, & a_{01}^2 + a_{02}^2 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

为解 NP_3，作极坐标变换 $q_1 = r\cos\varphi, q_2 = r\sin\varphi$ 代入 $H(q_1, q_2)$ 的表达式(10)中得

$$\begin{aligned} \widetilde{H}(r,\varphi) &= H_0 + r(H_1\cos\varphi + H_2\sin\varphi) \\ &= rH_0\left[\frac{1}{r} I_{n-1} + H_0^{-1}(H_1\cos\varphi + H_2\sin\varphi)\right] \end{aligned}$$

这里 I_{n-1} 表示 $(n-1)$ 阶单位阵。由上式不难证明 NP_3 的解为

$$r^* = \min_{\varphi\in[0,2\pi)}\left\{r \,\middle|\, \frac{1}{r} = \lambda_{\max}^+\{-H_0^{-1}(H_1\cos\varphi + H_2\sin\varphi)\}\right\} \tag{14}$$

其中 $\lambda_{\max}^+\{\cdot\}$ 表矩阵的最大正实特征值，若无正实特征值，则令 $\lambda_{\max}^+\{\cdot\} = 0^+$。

综上所述可得二维仿射线性摄动情况下 NP 问题求解步骤：

第一步。输入 a_{ik}，$i = 0, 1, \cdots, n$；$k = 0, 1, 2$（须有 $a_{n0} \neq 0$，$a_{00} \neq 0$）；定义 $(n-1)$ 阶矩阵 H_k，$k = 0,1,2$（须有 $\det H_0 \neq 0$）。

第二步。设 φ 为区间 $[0, 2\pi)$ 的分割步长，按 $(N+1)\varphi = 2\pi$ 算出最大叠代次数 N。

第三步。从 $m = 0$ 起，依次计算

$$1/\lambda_{\max}^+\{-H_0^{-1}(H_1\cos m\varphi + H_2\sin m\varphi)\}$$

直到 $m = N$ 为止。每一次的计算结果与上一次的作比较，舍掉大的保留小的，设第 m 次所得结果为 R_m。

第四步。令 $m = m + 1$。若 $m < N$，则返回第三步；若 $m = N$，得 R_N，进入下一步。

第五步。R_N 与按(12)、(13)式算得的 r_n^* 与 r_0^* 作比较，取最小者即为所求的 $r_{\max}$。结束。

算例(略)。

4　二维仿射双线性摄动情况下的最大摄动球

设(5)中的诸系数满足

$$a_i(q_1,q_2)=a_{i0}+a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+2a_{i3}q_1q_2 \tag{15}$$

其中 a_{ik} $(i=0,1,\cdots,n,k=0,1,2,3)$ 皆为已给实数．令 $p_k(s)=\sum_{i=0}^{n}a_{ik}s^i$，$k=0,1,2,3$，将(15)代入(5)并重新归并，可得

$$p(s,q_1,q_2)=p_0(s)+q_1p_1(s)+q_2p_2(s)+2q_1q_2p_3(s)$$

同样，与(16)式中左右两边各多项式相对应的各 Hurwitz 矩阵有如下关系

$$H(q_1,q_2)=H_0+q_1H_1+q_2H_2+2q_1q_2H_3 \tag{16}$$

将变换 $q_1=\rho\cos\theta$，$q_2=\rho\sin\theta$ 分别代入(15)及(16)式后，得到替换变量后的相应表达式

$$\tilde{a}_n(\rho,\theta)=a_{n0}+\rho(a_{n1}\cos\theta+a_{n2}\sin\theta)+\rho^2a_{n3}\sin2\theta$$

$$\tilde{a}_0(\rho,\theta)=a_{00}+\rho(a_{01}\cos\theta+a_{02}\sin\theta)+\rho^2a_{03}\sin2\theta$$

$$\tilde{H}(\rho,\theta)=H_0+\rho(H_1\cos\theta+H_2\sin\theta)+\rho^2H_3\sin2\theta$$

类似地，此种情形下的 NP 问题可分解如下三个子问题．

NP_4：设 $a_{n0}\neq0$，求

$$\rho_n^*=\min_{\theta\in[0,2\pi)}\{\rho\,|\,a_{n0}+\rho(a_{n1}\cos\theta+a_{n2}\sin\theta)+\rho^2a_{n3}\sin2\theta=0\}$$

NP_5：设 $a_{00}\neq0$，求

$$\rho_0^*=\min_{\theta\in[0,2\pi)}\{\rho\,|\,a_{00}+\rho(a_{01}\cos\theta+a_{02}\sin\theta)+\rho^2a_{03}\sin2\theta=0\}$$

NP_6：设 $\det H_0\neq0$，求

$$\rho^*=\min_{\theta\in[0,2\pi)}\{\rho\,|\,\det(H_0+\rho(H_1\cos\theta+H_2\sin\theta)+\rho^2H_3\sin2\theta)=0\}$$

为求解上面三个子问题，作如下辅助方阵

$$J_n(\theta)\triangleq\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{a_{n3}}{a_{n0}}\sin2\theta & -\left(\dfrac{a_{n1}}{a_{n0}}\cos\theta+\dfrac{a_{n2}}{a_{n0}}\sin\theta\right)\end{pmatrix}_{2\times2}$$

$$J_0(\theta)\triangleq\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{a_{03}}{a_{00}}\sin2\theta & -\left(\dfrac{a_{01}}{a_{00}}\cos\theta+\dfrac{a_{02}}{a_{00}}\sin\theta\right)\end{pmatrix}_{2\times2}$$

$$J(\theta)\triangleq\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ -H_0^{-1}H_3\sin2\theta & -H_0^{-1}(H_1\cos\theta+H_2\sin\theta)\end{pmatrix}_{2(n-1)\times2(n-1)}$$

不难验证如下代数关系

$$a_{n0}+\rho(a_{n1}\cos\theta+a_{n2}\sin\theta)+\rho^2a_{n3}\sin2\theta=\rho^2a_{n0}\det\left(\frac{1}{\rho}I_2-J_n(\theta)\right) \tag{17}$$

$$a_{00}+\rho(a_{01}\cos\theta+a_{02}\sin\theta)+\rho^2a_{03}\sin2\theta=\rho^2q_{00}\det\left(\frac{1}{\rho}I_2-J_0(\theta)\right) \tag{18}$$

$$H_0 + \rho(H_1\cos\theta + H_2\sin\theta) + \rho^2 H_3 \sin 2\theta$$
$$= \rho^{2(n-1)}(\det H_0)\cdot\det\left(\frac{1}{\rho}I_{2(n-1)} - J(\theta)\right) \tag{19}$$

其中 I_2 与 $I_{2(n-1)}$ 分别表示 2 阶与 $2(n-1)$ 阶单位方阵.

由(17)—(19)并参考 § 3 的方法,可得 NP_4—NP_6 的解为

$$\rho_n^* = \min_{\theta\in[0,2\pi)}\left\{\rho\,\middle|\,\frac{1}{\rho} = \lambda_{\max}^{+}\{J_n(\theta)\}\right\}$$

$$\rho_0^* = \min_{\theta\in[0,2\pi)}\left\{\rho\,\middle|\,\frac{1}{\rho} = \lambda_{\max}^{+}\{J_0(\theta)\}\right\}$$

$$\rho^* = \min_{\theta\in[0,2\pi)}\left\{\rho\,\middle|\,\frac{1}{\rho} = \lambda_{\max}^{+}\{J(\theta)\}\right\}$$

这里 $\lambda_{\max}^{+}\{\cdot\}$ 的意义同 § 3. 至此可得二维仿射双线性情形下 NP 问题的解为

$$\rho_{\max} = \min\{\rho_n^*, \rho_0^*, \rho^*\} \tag{20}$$

根据上述推导,不难写出此种情况下 NP 问题的求解步骤. 限于篇幅此处略.

算例(略).

5 结束语

本文提出了结构型摄动多项式的两类最大摄动界问题(NP 与 MP),指出了它们之间以及它们与不变惯性最大摄动界问题间的内在联系. 对于含二维参数的结构摄动中的两种重要特例——仿射线性与仿射双线性依赖关系情况,给出了最大摄动球半径的求解公式. 借助一般的计算软件,按文中所给步骤就可算得最大半径.

需指出的是,我们的算法可推广至高维仿射线性与仿射多线性的摄动情况,至于一般的非线性摄动情况须做进一步的研究.

参 考 文 献

[1] Ackermann J, Kaesbauer D, Muench R. Robust gamma-stability analysis in a plant parameter space. AUTOMATICA, 1991, **27**(1):75—85.

[2] 王龙,黄琳. 多项式族的根分布不变性. 中国科学 (A), 1993, **23**(1):75—82.

[3] Kokame H, Mori T. A root distribution criterion for interval polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, **36**(3):362—364.

[4] 赵克友. 区间多项式左扇区的稳定鲁棒性及不变惯性定理. 自动化学报, 1993,**19**(5): 604—608.

[5] Kaesbauer D. On robust stability of polynomials with polynoamil parameter dependency: two/three parameter cases. *AUTOMATICA*, 1993, **29**(1):215—217.

MAXIMAL PERTURBATION BOUNDS FOR INVARIANT ROOT DISTRIBUTION OF POLYNOMIALS

ZHAO KEYOU
(*Department of Electrical Engineering, Qingdao University Qingdao* 266071)

GUO LEI
(*Department of Applied Mathematics, Qingdao University Qingdao* 266071)

ABSTRACT

Given an uncertain characteristic polynomial p(s, $\boldsymbol{q}$) whose coefficients depend on a parameter vector $\boldsymbol{q}$. A meaningful question is how large perturbation for vector q can be permitted so that the perturbed polynomial preserves the same root distribution with the nominal polynomial p(s, $\mathbf{0}$). This is called the maximal perturbation bounds for invariant root distribution of polynomials. For affine linear and bilinear perturbation cases this paper gives the answers and an algorithm for the above question.

Key words: Root distribution robustness, characteristic polynomial, structured perturbation, affine linearity, affine bilinearity.

赵克友　1945 年生. 1968 年毕业于山东大学数学系后在企业从事电气技术工作. 1978 年后主要从事控制理论及应用方面的教学与研究. 先后从教于山东大学数学系, 青岛大学数学系及青岛大学电气工程系, 现为青岛大学电气工程系教授. 近期主要的研究领域有: 不确定系统理论; H^∞ 控制; 电力系统的分析与控制.

郭　磊　1991 年于山东曲阜师范大学获控制论专业硕士学位. 现任青岛大学数学系讲师, 1994 年 9 月起为东南大学自动化所博士研究生. 目前的研究兴趣为不确定系统的分析与综合; H^∞ 控制理论等.