



问题讨论

关于文“LQ 逆问题研究”的问题讨论

傅 诒 辉

(华中理工大学自控系 武汉 430074)

关键词: LQ 逆问题, 加权矩阵, 极点配置.

文[1]定理 2 给出了连续系统 LQ 逆问题有解的充分条件以及确定加权矩阵 Q 和 R 的参数化方法. 本文构造性地给出了满足文[1]定理 2 全部条件的参数阵 (S, T_1, T_2) , 但由其参数化方法确定的加权矩阵 Q 和 R 却非其相应的连续系统 LQ 逆问题解的一个反例. 这就表明该定理的条件是不充分的.

例. 设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R^{2 \times 2}$, $B = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 状态反馈增益阵 $K = 2 \cdot I_2$, 加权矩阵 $R = I_2$, 参数阵 $T_1 = I_2$, $T_2 = 2 \cdot I_2$, $S = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 期望稳定闭环极点集 $\Lambda_c = \{-3, -1\}$, 则有系统 (A, B) 可控.

$$A_c = A - B \cdot K = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = S, \tag{1}$$

$$\Lambda_c = \sigma(A_c) = \{-3, -1\}, \sigma(A) = \{-1, 1\}, \tag{2}$$

$$F(s)^{[2]} = I_2 + K \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} (s+1)^{-1} \cdot (s+3) & 0 \\ 0 & (s-1)^{-1} \cdot (s+1) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\phi(s)^{[2]} = R^{-\frac{1}{2}} \cdot F(-s)^T \cdot F(s) \cdot R^{-\frac{1}{2}} - I_2 = \begin{pmatrix} 8 \cdot (1-s^2)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

由式(2) \Rightarrow 文[1]定理 1 中的式(5)满足, 以及 $K = 2 \cdot I_2$ 为稳定的配置闭环极点反馈增益阵^[2]. 由式(4) $\Rightarrow \phi(i \cdot \omega) \geq 0, \forall \omega \in R$ 成立. (5)

其中 $i^2 = -1$. 应用文[1]定理 2 确定 LQ 逆问题的加权矩阵为

$$Q = -(A^T \cdot T_2 + T_2 \cdot S) \cdot T_1^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0. \tag{6}$$

至此, 给定的线性系统 (A, B) 和状态反馈增益阵 K 使 $A_c = A - B \cdot K$ 具有指定的期望稳定极点集 Λ_c , 参数阵 $S = A_c$ 满足文[1]定理 2 的题设条件, $T_1 = I_2$ 为非奇异阵, $R = I_2 > 0$, 参数阵 T_1, T_2 满足矩阵方程 $A \cdot T_1 - T_1 S = 2 \cdot I_2 = B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot T_2 = T_2$, 即上述给出的参数阵 (S, T_1, T_2) 以及由文[1]定理 2 参数化方法确定的加权矩阵 Q 满足文[1]定理 2 的全部假设条件. 依据文[1]定理 2, 对于上述确定的加权矩阵 Q (满足

式(6))应有 K 为最优反馈增益矩阵^[2]。但是另一方面,由系统 (A, B) 可控, K 为稳定的配置闭环极点反馈增益阵, 以及式(5)—(6)成立, 可知文[2]命题 3.1 (这是大家熟知的关于 LQ 逆问题的一个结果) 的假设条件全部满足。因此, 若 K 为最优反馈增益矩阵(即 Q, R 为给定系统 (A, B) 和状态反馈增益阵 K 的 LQ 逆问题的解) 则必有下式成立:

$$Q = C^T \cdot C, C \in R^{1 \times 2}, \text{rank}(C) = \text{rank}(Q) = 1, (A, C) \text{ 能检测}^{[2]}, \quad (7)$$

事实上, 若 Q 满足式(7), (A, C) 能检测^[3] \Rightarrow

$$\text{Ker}(A - sI_2) \cap \text{Ker}(Q) = \{O_2\}, \forall \text{Re}(s) \geq 0 \text{ 成立}. \quad (8)$$

取 $s_0 = 1$, 则有 $\text{Re}(s_0) = 1 > 0$,

$$\text{Ker}(A - s_0 I_2) \cap \text{Ker}(Q) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} \mid \beta \in R \right\} \neq \{O_2\}. \quad (9)$$

此式与式(8)矛盾, 所以满足式(6)的加权矩阵 Q 不满足式(7)。

参 考 文 献

- [1] 李人厚, 谢宋和, 朱荣华. LQ 逆问题研究, 自动化学报, 1992, 18(4): 475—481.
- [2] Fujii T, Narazaki M. A complete optimality condition in the inverse problem of optimal control, *SIAM J. Control and Optimization*, 1984, 22(2): 327—341.
- [3] 韩京清, 何关钰, 许可康. 线性系统理论代数基础, 辽宁科学技术出版社, 1985.

COMMENTS ON “A STUDY ON THE LQ INVERSE PROBLEMS”

FU YIHUI

(Dept. of Automatic Control, Huazhong University of Science and
Technology Wuhan 430074 China)

Key words: LQ inverse problem, weighting matrix, pole placement.