第21卷 第3期 自动化学报 Vol. 21, No. 3
1995年5月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1995

研究简报

不确定时变线性系统的鲁棒一致渐近稳定的扰动界

奚宏生
(中国科学技术大学自动化系 合肥 230026)

关键词: 不确定时变线性系统，鲁棒一致渐近稳定，奇异值.

1 引言

在文献[1—3]中利用状态空间方法研究了结构不确定定常线性系统参数扰动的稳定区域。本文利用时变矩阵的奇异值，将这一研究推进到时变不确定线性系统.

考虑时变不确定系统

$$\dot{x}(t)=[A(t)+E(t)]x(t),\ t\in[0,+\infty). \tag{1.1}$$

其中 $x(t)\in C^n$; $A(t)\in C^{n\times n}$ 是分段连续、一致有界函数组成的矩阵; $E(t)\in C^{n\times n}$ 是时变不确定矩阵.

引理 1.1.[4] 设 $A(t)$ 是由分段连续、一致有界函数组成的 $n\times n$ 矩阵，则下列命题是等价的:

1) $A(t)$ 是一致渐近稳定的;

2) 存在一致有界、一致正定的 Hermite 矩阵 $P(t)$ 满足 Lyapunov 矩阵方程

$$-\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}=A^H(t)P(t)+P(t)A(t)+2I_n; \tag{1.2}$$

3) 存在具有无限小上界的二次型 Lyapunov 函数 $V(x,t)=x^HP(t)x$，满足 $\frac{\mathrm{d}V(x,t)}{\mathrm{d}t}\leqslant -C\|x\|^2, C>0$.

设 $B(t)\in C^{n\times n}$ 是定义在$[0,+\infty)$上一致有界矩阵，显然，对每一给定的 t 和 $i=1,2,\cdots,n$, $\sigma_i[B(t)]=\lambda_i^{\frac{1}{2}}[B(t)B^H(t)]$ 是$[0,+\infty)$上一致有界的函数. 定义 $B(t)$ 的最大奇异值为

$$\bar{\sigma}_{\max}[B(t)]=\max_i\{\sup_{t\geqslant 0}\sigma_i[B(t)], i=1,2,\cdots,n\}. \tag{1.3}$$

根据上述定义，利用三角不等式和 Schwary 不等式易证得 $\bar{\sigma}_{\max}[B(t)]$ 具有下述性质:

本文于1992年4月13日收到.

设 $B(t)$ 和 $D(t)$ 是定义在$[0,+\infty)$上一致有界矩阵,则

(1) $\bar{\sigma}_{\max}[B(t)+D(t)] \leqslant \bar{\sigma}_{\max}[B(t)]+\bar{\sigma}_{\max}[D(t)]$;

(2) $\bar{\sigma}_{\max}[B(t)D(t)] \leqslant \bar{\sigma}_{\max}[B(t)]\bar{\sigma}_{\max}[D(t)]$;

(3) $\bar{\sigma}_{\max}[B(t)] \leqslant \bar{\sigma}_{\max}[|B(t)|]$.

2 具有强结构扰动的界

假设$E(t)=[E_{ij}(t)], i,j=1,2,\cdots,n, E_{ij}(t) \leqslant |E_{ij}(t)|_{\max}=\varepsilon_{ij}, \varepsilon \triangleq \max\limits_{i,j}\varepsilon_{ij}$. $P(t)$ 满足引理 1.1，并且 $A(t)$ 是一致渐近稳定矩阵,则有:

定理 2.1. 如果

$$\varepsilon<\frac{1}{n\bar{\sigma}_{\max}[P(t)]}=\mu_1, \tag{2.1}$$

则系统(1.1)是一致渐近稳定的. (证明从略)

定理 2.2. 如果

$$\varepsilon<\frac{1}{\bar{\sigma}_{\max}[|P(t)|U_n]_s}=\mu_2, \tag{2.2}$$

则系统(1.1)是一致渐近稳定的. 其中 $U_n=[U_{nij}], U_{nij}=1, i,j=1,2,\cdots,n$.

证明. 设 $V(x,t)=x^HP(t)x$ 是系统(1.1)的 Lyapunov 函数,则

$$\frac{\mathrm{d}V(x,t)}{\mathrm{d}t}=x^H[E^H(t)P(t)+P(t)E(t)-2I_n]x. \tag{2.3}$$

由式(2.2)得到 $\bar{\sigma}_{\max}[|P(t)|\varepsilon U_n]_s<1 \to \bar{\sigma}_{\max}[P(t)E(t)]_s<1 \to \sup\limits_{t\geqslant 0}|\lambda_i[P(t)E(t)]_s|<1 \to$ 对每一 t 和 $i=1,2,\cdots,n, \lambda_i\{[P(t)E(t)]_s-I_n\}<0$, 即 $[E^H(t)P(t)+P(t)E(t)-2I_n]$ 是定负的,由引理 1.1,系统(1.1)是一致渐近稳定的. 证毕.

如果考虑到系统矩阵的结构信息，则可以应用文献[2]中的矩阵 $U_e=[U_{eij}]$，其中标量为

(1) 当 ε_{ij} 已知时,

$$U_{e_{ij}}=\begin{cases}0 & E_{ij}(t)=0,\ \text{即}\ A_{ij}(t)\ \text{不受到扰动;}\\ \dfrac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon} & E_{ij}(t)\neq 0,\ \text{即}\ A_{ij}(t)\ \text{受到扰动.}\end{cases}$$

(2) 当 ε_{ij} 不确切知道时,

$$U_{eij}=\begin{cases}0 & E_{ij}(t)=0,\ \text{即}\ A_{ij}(t)\ \text{不受到扰动;}\\ 1 & E_{ij}(t)\neq 0,\ \text{即}\ A_{ij}(t)\ \text{受到扰动.}\end{cases}$$

可以得到有关定理 2.2 的改进边界.

定理 2.3. 如果

$$\varepsilon<\frac{1}{\bar{\sigma}_{\max}[|P(t)|U_e]_s}=\mu_3, \tag{2.4}$$

则系统(1.1)是一致渐近稳定的. (证明同定理 2.2,从略.)

由于 $\bar{\sigma}_{\max}[|P(t)|U_e]_s \leqslant \bar{\sigma}_{\max}[|P(t)|U_n]_s$，所以 $\mu_3 \geqslant \mu_2$.

设系统(1.1)的扰动 $E(t)$ 具有如下形式：

$$E(t) = \sum_{i=1}^{m} k_i(t)E_i(t), \tag{2.5}$$

其中 $E_i(t) \in C^{n\times n}$ 是有界确定性矩阵，$k_i(t)$ 是不确定函数，并且 $|k_i(t)| \leqslant \varepsilon_i$，$i = 1, 2, \cdots, m$. 此时系统(1.1)为

$$\dot{x}(t) = [A(t) + \sum_{i=1}^{m} k_i(t)E_i(t)]x(t). \tag{2.6}$$

定义 $P_i(t) = [P(t)E_i(t)]_s, i = 1, 2, \cdots, m$，则有

定理 2.4. 如果

$$(1)\quad \sum_{i=1}^{m} |k_i(t)|\bar{\sigma}_{\max}[P_i(t)] < 1 \tag{2.7}$$

或者

$$(2)\quad |k_j(t)| < \frac{1}{\bar{\sigma}_{\max}\left[\sum_{i=1}^{m} |P_i(t)|\right]}, \ j = 1, 2, \cdots, m, \tag{2.8}$$

则系统(1.1)是一致渐近稳定的.

证明. 设 $V(x,t) = x^H P(t)x$，则 $\dfrac{dV(x,t)}{dt} = 2x^H\left[\sum_{i=1}^{m} k_i(t)P_i(t) - I_n\right]x$.

只须证明

$$\bar{\sigma}_{\max}\left[\sum_{i=1}^{m} k_i(t)P_i(t)\right] < 1. \tag{2.9}$$

由于 $\bar{\sigma}_{\max}\left[\sum_{i=1}^{m} k_i(t)P_i(t)\right] \leqslant \sum_{i=1}^{m} \bar{\sigma}_{\max}[k_i(t)P_i(t)] \leqslant \sum_{i=1}^{m} |k_i(t)|\bar{\sigma}_{\max}[P_i(t)]$，所以，当式(2.7)成立时，式(2.9)也成立. 又因为 $\bar{\sigma}_{\max}\left[\sum_{i=1}^{m} k_i(t)P_i(t)\right] \leqslant \bar{\sigma}_{\max}\left[\sum_{i=1}^{m} |k_i(t)P_i(t)|\right] \leqslant \max_j |k_j(t)|\bar{\sigma}_{\max}\left[\sum_{i=1}^{m} |P_i(t)|\right]$，所以，式(2.7)成立，也意味着式(2.9)成立.　证毕.

3　具有弱结构扰动的界

当系统(1.1)的扰动矩阵 $E(t)$ 的谱模的界已知，而它的元素扰动的界未知时，称系统具有弱结构扰动. 对应于文献[2]中的结果，则有

定理 3.1. 如果

$$\bar{\sigma}_{\max}[E(t)] < \frac{1}{\bar{\sigma}_{\max}[P(t)]} = \mu_4 \tag{3.1}$$

则系统(1.1)是一致渐近稳定的.

证明. 设 $V(x, t) = x^H P(t)x$ 是系统 (1.1) 的 Lyapunov 函数, 则由式 (3.1), $\bar{\sigma}_{\max}[E(t)]\bar{\sigma}_{\max}[P(t)] < 1 \rightarrow \bar{\sigma}_{\max}[E(t)P(t)] < 1$, 即可得式 (2.3) 关于 t 是一致定负的, 故系统(1.1)是一致渐近稳定的. 证毕.

参 考 文 献

[1] Patel RV, Tada M. Quantitative measure of robustness for multivariable systems. proc. Joint Automat. Contr. Conf., San Francisco, CA, 1980, paper TP8-A.

[2] Yedavalli R K. Perturbation bounds for robust stability in linear state space models. *Int. J. Control.* 1985, **42**(6): 1507—1517.

[3] Kenmin Zhou, Pramond P Khargonekar. Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainty. *IEEE Trans. A-C*, 1987, **32**(7):621—623.

[4] 须田信英等著,曹长修译,自动控制中的矩阵理论,北京: 科学出版社,1979.

PERTURBATION BOUNDS FOR ROBUST UNIFORMLY ASYMPTOTIC STABILITY OF UNCERTAIN TIME-VARIANT LINEAR SYSTEM

XI HONGSHENG

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Key words: Uncertain time-variant linear system, robust uniformly asymptotic stability, singular values.