短 文

部分参数不准确的线性系统的鲁棒性控制[1)]

王 正 志
（中国国防科技大学自控系　长沙　410073）

摘　　要

研究了部分参数不准确的线性系统在有界能量噪声作用下的控制问题，即对于系统参数的鲁棒性控制问题. 先将它简化为一个带正参数 δ 的 H_∞ 控制问题，然后采用 J 无损分解方法，推导出调节问题的可解性条件和动态反馈控制器的全部显示通解.

关键词：鲁棒性控制，H_∞ 标准控制问题.

1　问题的提法

考虑连续时间域上的对象 P

$$\dot{x}(t)=(A+\Delta A(t))x(t)+(B+\Delta B(t))u(t)+B_w w(t), \tag{1.a}$$

$$y(t)=(C+\Delta C(t))x(t)+(D+\Delta D(t))u(t)+D_w w(t), \tag{1.b}$$

$$z(t)=C_z x(t)+D_z u(t). \tag{1.c}$$

其中 $x\in R^p$ 是状态变量，$u\in R^k$ 是控制变量，$w\in R^m$ 是噪声，$y\in R^r$ 是测量得到的输出量，$z\in R^p$ 是要被调节的量. A,B,C,D,C_z,D_z,B_w 和 D_w 都是已知的常实矩阵，它们是标称对象的全部参数. $\Delta A(t),\Delta B(t),\Delta C(t)$ 和 $\Delta D(t)$ 表达了对象中可随时间变化的参数不确定性. 假设

$$\begin{bmatrix}\Delta A(t) & \Delta B(t)\\ \Delta C(t) & \Delta D(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_1\\ H_2\end{bmatrix}F(t)\,[E_1\ \ E_2]. \tag{2}$$

其中 H_1,H_2,E_1,E_2 分别为已知的常实矩阵，它们反映了各不确定参数所处的位置和变化幅度. 而 $b_1\times b_2$ 维的未知矩阵 $F(t)$ 处在单位实数球中，

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I,\ \ \forall t. \tag{3}$$

(2),(3)式描写了对象模型的部分参数不确定的情况.

对由(1)—(3)式描写的具有部分参数不确定性的对象 P，寻找动态反馈控制器 C，

$$\dot{x}_c(t)=A_c x_c(t)+B_c y(t),\ \ x_c(0)=0, \tag{4.a}$$

1) 此课题得到国家自然科学基金资助.

本文于 1993 年 7 月 20 日收到

$$u(t) = K_c x_c(t). \tag{4.b}$$

它根据输出测量 $y(t)$ 给出控制 $u(t)$，使得从噪声 w 到被调节量 z 的传递函数 $T(s)$ 满足要求

$$\|T(s)\|_\infty \leqslant \gamma. \tag{5}$$

其中 γ 为小正数，(5)式要求对于各种噪声 w，被调节量 z 的输出值均比较小。

对象 P 和控制器 C 组成的闭环系统，其状态方程可写为

$$\dot{\xi} = (A_o + H_o F E_o)\xi + B_o w, \tag{6.a}$$

$$z = C_o \xi. \tag{6.b}$$

其中

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$A_o = \begin{bmatrix} A & BK_c \\ B_c C & A_c + B_c D K_c \end{bmatrix}, \tag{8.a}$$

$$B_o = \begin{bmatrix} B_w & \\ B_c & D_w \end{bmatrix}, \tag{8.b}$$

$$C_o = [C_z \quad D_z K_c], \tag{8.c}$$

$$H_o = \begin{bmatrix} H_1 & \\ B_c & H_2 \end{bmatrix}, \tag{8.d}$$

$$E_o = [E_1 \quad E_2 K_c], \tag{8.e}$$

于是从 w 到 z 的传递函数为

$$T(s) = C_o[sI - (A_o + H_o F E_o)]^{-1} B_o. \tag{9}$$

由(1)—(3)和(9)式可以看到，对象 P 和闭环传递函数 $T(s)$ 中含有处在单位实球内的未知量 F，造成了处理上的困难。为了克服这个困难，考虑如下带有正参数 δ 的对象 $\bar{P}_\delta$：

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu + [B_w \ \ \gamma\delta^{-1}H_1]\bar{w}, \tag{10.a}$$

$$\bar{y} = C\bar{x} + Du + [D_w \ \ \gamma\delta^{-1}H_2]\bar{w}, \tag{10.b}$$

$$\bar{\xi} = \begin{bmatrix} C_z \\ \delta E_1 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} D_z \\ \delta E_2 \end{bmatrix} u. \tag{10.c}$$

把动态反馈控制器 C 作用到对象 $\bar{P}_\delta$ 上，联立(4)，(10)式，组成的闭环系统可写为

$$\dot{\bar{\xi}} = A_o \bar{\xi} + \bar{B}_o \bar{w},$$

$$\bar{z} = \bar{C}_0 \bar{\xi}.$$

其中 $\bar{\xi} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{x}_c \end{bmatrix}$，$\bar{B}_o = [B_o \ \ \gamma\delta^{-1}H_o]$，$\bar{C}_o = \begin{bmatrix} C_o \\ \delta E_o \end{bmatrix}$. 从有界能量噪声 $\bar{w}$ 到被扩展了的调节量 $\bar{z}$ 的传递函数为

$$\bar{T}_\delta(s) = \bar{C}_o(sI - A_o)^{-1}\bar{B}_o. \tag{11}$$

引理 1[1]. 线性系统 $R(s) = C(sI - A)^{-1}B$ 满足 H_∞ 范数不等式

$$\|R(s)\|_\infty \leqslant \gamma, \tag{12}$$

当且仅当存在正实对称矩阵 X 满足 Riccati 不等式

$$A^{\mathrm{T}}X + XA + C^{\mathrm{T}}C + \gamma^{-2}XBB^{\mathrm{T}}X \leqslant 0. \tag{13}$$

定理 1. 若存在某个正实数 δ，带参数 δ 的对象 $\bar{P}_\delta$ 有一个动态反馈控制器，它与 $\bar{P}_\delta$ 组成的闭环传递函数 $\bar{T}_\delta(s)$ 满足

$$\|\bar{T}_\delta(s)\|_\infty \leqslant \gamma, \tag{14}$$

则此动态反馈控制器 C 与原来的部分参数不准确的对象组成的闭环传递函数 $T(s)$ 满足

$$\|T(s)\|_\infty \leqslant \gamma. \tag{15}$$

证明. 若(14)式成立，把引理 1 用到(14)式上，就存在正定对称矩阵 X 满足

$$A_o^{\mathrm{T}}X + XA_o + \begin{bmatrix} C_o \\ \delta E_o \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} C_o \\ \delta E_o \end{bmatrix} + \gamma^{-2}X[B_o \gamma\delta^{-1}H_o][B_o \ \gamma\delta^{-1}H_o]^{\mathrm{T}}X \leqslant 0. \tag{16}$$

由

$$\begin{aligned} E_o^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}H_o^{\mathrm{T}}X + XH_oFE_o &\leqslant \delta^{-2}XH_oH_o^{\mathrm{T}}X + \delta^2E_o^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}FE_o \\ &\leqslant \delta^{-2}XH_oH_o^{\mathrm{T}}X + \delta^2E_o^{\mathrm{T}}E_o, \end{aligned} \tag{17}$$

有

$$(A_o + H_oFE_o)^{\mathrm{T}}X + X(A_o + H_oFE_o) + C_o^{\mathrm{T}}C_o + \gamma^{-2}XB_oB_o^{\mathrm{T}}X \leqslant 0, \tag{18}$$

再应用引理 1，可知(15)式成立.

2　问题的通解

引进新的噪声 $\tilde{w} = \gamma\bar{w}$，从 $\tilde{w}$ 到 $\bar{z}$ 的闭环传递函数为

$$T_\delta(s) = \gamma^{-1}\bar{T}_\delta(s),$$

于是问题(14)就变为规范化的问题

$$\|T_\delta(s)\|_\infty \leqslant 1. \tag{19}$$

它可以放入 H_∞ 标准控制问题的框架中. 从 $\begin{bmatrix} \tilde{w} \\ u \end{bmatrix}$ 到 $\begin{bmatrix} \bar{z} \\ y \end{bmatrix}$ 的广义对象 $G(s)$ 的传递函数的状态空间表示式为

$$G(s) = \left\{A,\ [B_1B_2],\ \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}\right\}, \tag{20}$$

其中 A 与(1)式中标称对象的 A 相同，

$$B_1 = [\gamma^{-1}B_w \quad \delta^{-1}H_1], \quad B_2 = B,$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_z \\ \delta E_1 \end{bmatrix} \qquad C_2 = C,$$

$$D_{11} = 0, \qquad D_{12} = \begin{bmatrix} D_z \\ \delta E_2 \end{bmatrix},$$

$$D_{21} = [\gamma^{-1}D_w \ \ \delta^{-1}H_2], \ D_{22} = D.$$

H_∞ 标准控制问题已有多种解法，但多数解法采用的步骤比较复杂，解式与原对象的表示式的关系不太直观[3,4]. 作者最近推导出 H_∞ 标准控制问题的求解公式[5]，给出显式结果. 为此需要求解下面的 Riccati 方程(由于 $D_{11} = 0$，故已被简化):

$$(A - B_2D_{12}^{+}C_1)^{\mathrm{T}}X + X(A - B_2D_{12}^{+}C_1) + C_1^{\mathrm{T}}D_{12}^{+\mathrm{T}}D_{12}^{+}C_1$$

$$+X(B_1B_1^{\mathrm{T}}-B_2D_{12}^{+}D_{12}^{+\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}})X=0, \tag{21}$$

$$Y(A-B_1D_{21}^{+}C_2)^{\mathrm{T}}+(A-B_1D_{21}^{+}C_2)Y+B_1D_{21}^{+}D_{21}^{+\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}$$
$$+Y(C_1^{\mathrm{T}}C_1-C_2^{\mathrm{T}}D_{21}^{+\mathrm{T}}D_{21}^{+}C_2)Y=0. \tag{22}$$

选取 $X\geqslant 0$ 和 $Y\geqslant 0$，使得矩阵

$$A-B_2D_{12}^{+}C_1+(B_1B_1^{\mathrm{T}}-B_2D_{12}^{+}D_{12}^{+\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}})X,$$
$$A-B_1D_{21}^{+}C_2+Y(C_1^{\mathrm{T}}C_1-C_2^{\mathrm{T}}D_{21}^{+\mathrm{T}}D_{21}^{+}C_2)$$

均是稳定矩阵.

定理 2. 带参数 δ 的对象 $\bar{P}_\delta$ 的 H_∞ 调节问题(14)的可解性条件为

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}<0, \tag{23}$$

它的动态反馈控制器 C 的显式通解为

$$C=(L_{11}\Phi+L_{12})(L_{21}\Phi+L_{22})^{-1},\quad \Phi\in BH_\infty^{k\times r}, \tag{24}$$

其中 L_{ij} 由 L 按如下方式划分而成:

$$L=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} k \\ r \end{array} \\ \begin{array}{cc} k \quad & \quad r \end{array} & \end{array}.$$

L 的状态空间表示式为

$$L=\left[\begin{array}{c|c} -sI+A_L & B_L \\ \hline C_L & D_L \end{array}\right], \tag{25}$$

$$A_L=-(A^{\mathrm{T}}+C_1^{\mathrm{T}}lX^{+}),$$
$$B_L=[(I-XY)^{-1}(l^{\mathrm{T}}-XYC_1^{\mathrm{T}})F\quad (I-XY)^{-1}X(w^{\mathrm{T}}-B_1)H],$$
$$C_L=\begin{bmatrix} D_{12}^{+}(C_1-l)X^{+} \\ -C_2X^{+}-D_{21}B_1^{\mathrm{T}}+D_{22}D_{12}^{+}(C_1-l)X^{+} \end{bmatrix},$$
$$D_L=\begin{bmatrix} D_{12}^{+}F & 0 \\ D_{22}D_{12}^{+}F & D_{21}H \end{bmatrix}.$$

其中

$$l=D_{12}^{+\mathrm{T}}D_{12}^{+}C_1-D_{12}^{+\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}X,$$
$$w=D_{21}^{+}D_{21}^{+\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}-D_{21}^{+}C_2Y,$$
$$F=D_{12}[D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12}]^{-1/2},$$
$$H=D_{21}^{\mathrm{T}}[D_{21}D_{21}^{\mathrm{T}}]^{-1/2},$$

而且 $X^{+},D_{12}^{+},D_{21}^{+}$ 分别是 X,D_{12},D_{21} 的广义逆，$D_{12}^{\perp}$ 和 $D_{21}^{\perp}$ 分别是 D_{12} 和 D_{21} 的正交补. $BH_\infty^{k\times r}$ 是 $H_\infty^{k\times r}$ 空间中的单位球.

证明见文[5].

3 结语

本文研究了部分参数确定而另一部分参数在一定范围内变化的对象，在未知谱密度

的有界噪声作用下的控制问题．可以设法把这些参数不准确造成的影响等效为一组新的有界噪声所造成的影响．这样上述问题就可以转化为某个确定性系统在扩展了的有界噪声作用下的 H_∞ 控制问题．从而进一步求出对于参数的鲁棒性控制问题的显式通解．此通解式与被控对象的标称参数、参数变化范围以及设计指标直接显式相关，可以方便地用计算机编程计算，并进行理论分析．这些结果具有明显的实际工程应用前景．

参 考 文 献

[1] Francis B A. A course in H_∞ control theory. Springer-Verlag, 1987.

[2] Wang Y, Xie L, de Souza C E. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 1992, **19**: 139—149.

[3] Kimura H, Lu Y, Kawatani R. On the structure of H_∞ control systems and related extensions. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, **36**(6): 653—667.

[4] Glover K, Doyle JC. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞—norm bound and relations to risk sensitivity. *Systems & Control Letters*, 1988, **11**: 167—172.

[5] 王正志，周宗潭．状态空间中标准 H_∞ 控制问题的直接求解公式．中国控制会议论文集，1994: 146—150.

ROBUST CONTROL OF LINEAR SYSTEMS WITH PARTIAL PARAMETERS UNCERTAINTY

Wang Zhengzhi

(*National University of Defence Science and Technology Changsha* 410073)

Abstract

This paper discusses the control problems for linear systems with partial parameters uncertainty under bounded energy noises——the robust control problem about system parameters. This problem can be simplified to a H_∞ control problem with a free scaling parameter. we deduce a solvability condition and give an explicit expression of the complete solution set of the dynamic feedback controllers for the regulation problem by J-lossless factorization method.

Key words: Robust control, H_∞ standard control problem.