

二维形状的透视不变性识别¹⁾

徐正伟 吴成柯

(西安电子科技大学信息工程系 西安 710071)

摘 要

在计算机视觉中, 二维形状的识别有着十分重要的意义. 为了实现二维形状的透视投影不变性识别, 本文推导出了一种共面二次曲线对的透视投影不变量, 提出了一种基于椭圆的平面曲线的透视不变性表示方法, 并且给出了用该不变量和不变性表示方法实现二维形状识别的算法. 实验结果证实了该算法的有效性.

关键词: 二维形状识别, 透视投影不变量, 透视投影不变性表示, 透视变换.

1 引言

在计算机视觉中, 三维形状的识别有着广泛的应用价值. 有许多物体和符号可以用二维形状来表示, 如染色体、文字、地图、各种牌照以及遥感图象中的海岸线等. 也有许多三维物体, 是由多个二维形状构成的或可以用某种二维形状来特征化表示, 如工业零件、日用工具等. 因此通过二维形状的识别, 就可以实现这些物体和符号的识别.

摄像机的成像过程可以用透视投影模型来准确地表示. 对于空间的同一个二维形状, 当摄像机处于不同的视点位置时, 就会得到完全不同的图象, 所以从单幅图象中识别二维形状的关键是寻找与摄像机视点位置无关的形状描述方法.

不变矩^[1]、傅立叶描绘子^[2]、 R 描绘子^[3]等都是比较成熟的二维形状描述方法, 但是只有当空间平面垂直于摄像机的光轴时, 上述描述方法才能够被使用.

交比 (cross ratio) 是射影几何中最基本的射影不变量^[4], 用共面五点或共面五线的交比可以实现空间平面多边形的识别^[5,6], 但是这种不变量不能用于一般的二维形状识别.

本文提出了一种共面二次曲线对的透视投影不变量和一种基于椭圆的平面曲线透视不变性表示方法. 用这种透视投影不变量和不变性表示方法可以实现任意多连通区域的二维形状的透视不变性识别, 实验证明这种方法具有良好的识别和抗噪声性能.

2 空间平面的透视投影

为了考察空间平面和摄像机图象平面之间的透视投影关系, 我们建立如图 1 所示的

1) 本文得到国家自然科学基金和国防预研基金的资助.
本文于 1992 年 7 月 17 日收到

透视投影坐标系。

$O_v-X_vY_vZ_v$ 为摄像机的观察坐标系统,其中原点 O_v 为摄像机的视点位置,而 Z_v 轴和摄像机的光轴一致。图象平面 I 在 $Z_v = f$ (f 为摄像机的焦距)处,且垂直于 Z_v 轴。 $O_I-X_IY_I$ 是图象坐标系统,其中 X_I 轴和轴 Y_I 轴分别平行于观察坐标系的 X_v 轴和 Y_v 轴。在观察坐标系中,有一空间平面 π ,其方程为 $z_v = px_v + qy_v + r$, (p, q) 是 π 平面的方向导数, r 是 π 平面在 Z_v 轴上的截距。 π 平面上有一局部坐标系 $O_L-X_LY_L$, 在 $O_L-X_LY_L$ 坐标系下, π 平面上各点坐标是固定不变的,和 π 平面相对于摄像机的空间姿态无关。 $O_d-X_dY_d$ 是我们定义的推导坐标系,其中 O_d 为 Z_v 轴和 π 平面的交点,而 X_d 是坐标平面 $O_vX_vY_v$ 和空间 π 平面的交线, Y_d 轴位于 π 平面上且垂直于 X_d 轴。因为 $O_L-X_LY_L$ 和 $O_d-X_dY_d$ 都是 π 平面上的坐标系,所以只要经过 π 平面内的平移和绕 O_d 点的旋转, $O_L-X_LY_L$ 就可以变到 $O_d-X_dY_d$ 。假设该平移量和旋转角度分别为

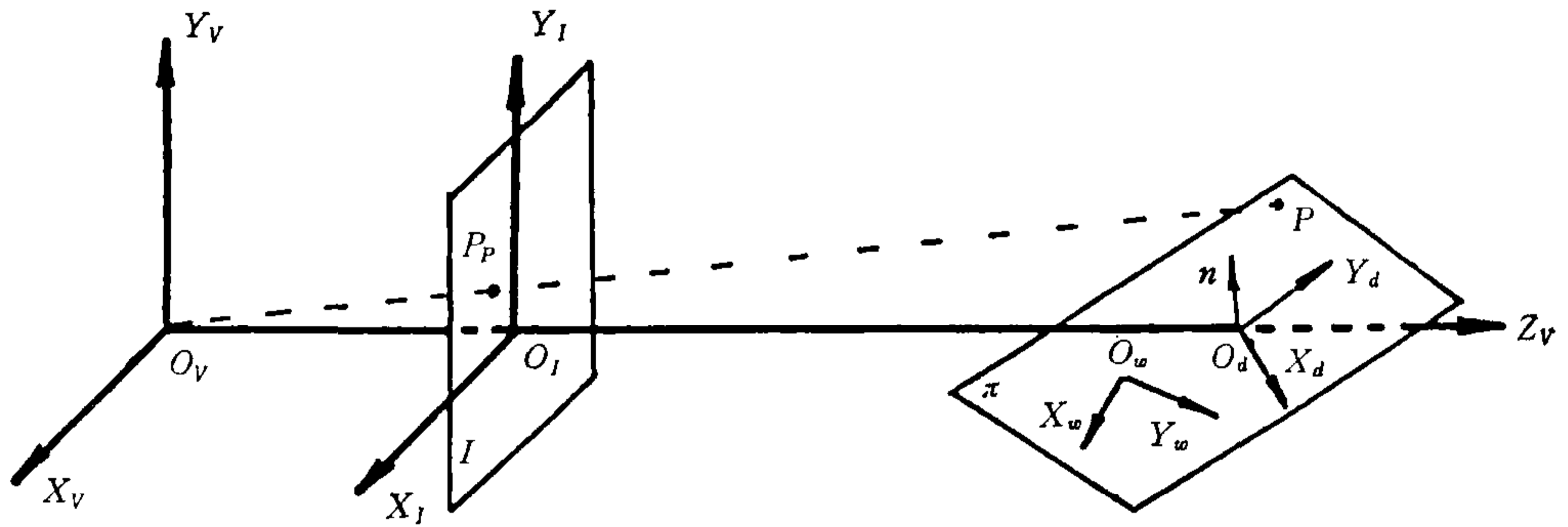


图 1 空间平面透视投影坐标系

(t_x, t_y) 和 θ , 可以证明空间平面上的任意一点 P 和该点在图象平面上的透视投影 P_p 之间存在如下变换关系^[5]

$$X_I = TX_L \tag{1}$$

其中 $X_L = (x_L, y_L, 1)$ 是点 P 在 $O_L-X_LY_L$ 坐标下的齐次坐标, $X_I = (x_I, y_I, 1)$ 是 P_p 点在 $O_I-X_IY_I$ 坐标系下的齐次坐标, 而 T 为如下变换矩阵

$$T = M(p, q, r, f)H(t_x, t_y, \theta), \tag{2}$$

$$M(p, q, r, f) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} & \frac{-pq}{\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{1+p^2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}} & 0 \\ \frac{p}{f\sqrt{1+p^2}} & \frac{q}{f\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{1+p^2}} & r/f \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$H(t_x, t_y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & -t_x \cos \theta + t_y \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & -t_x \sin \theta - t_y \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

从(2)、(3)、(4)式可看出,空间平面上点的透视投影由 $p, q, r, t_x, t_y, \theta, f$ 七个量唯一决定.

3 二次曲线的透视投影

设 c 是空间平面 π 上的二次曲线,在 $O_L-X_L Y_L$ 坐标系下,其方程为

$$Q(x_L, y_L) = Ax_L^2 + Bx_L y_L + Cy_L^2 + Dx_L + Ey_L + F = 0, \quad (5)$$

也可以用矩阵形式表示为

$$X_L^T P X_L = 0. \quad (6)$$

系数矩阵 P 为如下对称矩阵

$$P = \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix}.$$

因为(6)式是二次曲线 c 的方程,所以

$$\lambda X_L^T P X_L = 0 \quad (\lambda \text{ 是不为零的常数}) \quad (7)$$

也一定是该二次曲线的方程. 因此同一根平面二次曲线,可能对应着无穷多个二次多项式.

上述二次曲线在(1)式所示的透视投影的作用下,变成如下形式

$$\lambda X_I^T P X_L = \lambda (T^{-1} X_I)^T P (T^{-1} X_I) = \lambda X_I^T (T^{-1})^T P T^{-1} X_I.$$

$$\begin{aligned} \text{令} \quad & P' = \lambda (T^{-1})^T P T^{-1}, \\ \text{则} \quad & X_I^T P' X_I = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

又因为

$$(P')^T = [\lambda (T^{-1})^T P T^{-1}]^T = \lambda (T^{-1})^T P^T T^{-1}, \quad P^T = P,$$

从而有 $(P')^T = P'$, 即 P 是对称矩阵,所以(8)式表示的也是二次曲线方程. 也就是说二次曲线的透视投影仍然是二次曲线.

现设 π 平面上有两根不同的二次曲线 C_1 和 C_2 , 其系数矩阵分别为 $P_i (i = 1, 2)$, 经过透视投影后,得到二次曲线系数矩阵为 P'_i , 那么有

$$P'_i = \lambda_i^3 (T^{-1})^T P_i T^{-1}, \quad (9)$$

对上式两边取行列式得到

$$|P'_i| = \lambda_i^3 |T^{-1}|^2 |P_i|. \quad (10)$$

根据(9)和(10),可以进行如下推导:

$$\begin{aligned} \left(\frac{|P'_1|}{|P'_2|} \right)^{1/3} [(P'_1)^{-1} P'_2] &= \left(\frac{\lambda_1^3 |T^{-1}|^2 |P_1|}{\lambda_2^3 |T^{-1}|^2 |P_2|} \right)^{1/3} \left\{ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} T P_1^{-1} [(T^{-1})^T]^{-1} \cdot (T^{-1})^T P_2 T^{-1} \right\} \\ &= \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{1/3} \cdot [T P_1^{-1} P_2 T^{-1}] = T \left[\left(\frac{|P_1|}{|P_2|} \right)^{1/3} P_1^{-1} P_2 \right] T^{-1}. \end{aligned}$$

从上述推导可以看出, $\left(\frac{|P'_1|}{|P'_2|} \right)^{1/3} (P'_1)^{-1} P'_2$ 和 $\left(\frac{|P_1|}{|P_2|} \right)^{1/3} P_1^{-1} P_2$ 是相似矩阵,所以它们有相同的迹:

$$\text{Tr} \left[\left(\frac{|P'_1|}{|P'_2|} \right)^{1/3} (P'_1)^{-1} P'_2 \right] = \text{Tr} \left[\left(\frac{|P_1|}{|P_2|} \right)^{1/3} P_1^{-1} P_2 \right],$$

即

$$\left(\frac{|P'_1|}{|P'_2|} \right)^{1/3} \text{Tr} [(P'_1)^{-1} P'_2] = \left(\frac{|P_1|}{|P_2|} \right)^{1/3} \text{Tr} [P_1^{-1} P_2]. \quad (11)$$

令

$$ID_1 = \left(\frac{|P_1|}{|P_2|} \right)^{1/3} \text{Tr} [P_1^{-1} P_2], \quad ID'_1 = \left(\frac{|P'_1|}{|P'_2|} \right)^{1/3} \text{Tr} [(P'_1)^{-1} P'_2], \quad (12)$$

则

$$ID_1 = ID'_1.$$

因为 ID_1 是定义在局部坐标系 $O_L-X_L Y_L$ 下的量, 所以它和二次曲线对 C_1, C_2 相对于摄像机的姿态以及位置无关, 也和摄像机的焦距无关, 即和参数 $p, q, r, t_x, t_y, \theta, f$ 无关. 又因为 $ID_1 = ID'_1$, 所以 ID_1 是共面二次曲线对的透视投影不变量.

同理可以证明

$$ID_2 = \left(\frac{|P_2|}{|P_1|} \right)^{1/3} \text{Tr} [P_2^{-1} P_1] \quad (13)$$

是共面二次曲线对的另一个透视投影不变量.

如果对二次曲线的系数矩阵归一化, 即

$$|P_1| = |P_2| = 1,$$

那么上述两个透视投影不变量变成

$$ID_1 = \text{Tr}(P_1^{-1} P_2), \quad (14-a)$$

$$ID_2 = \text{Tr}(P_2^{-1} P_1). \quad (14-b)$$

4 二次曲线的透视不变性拟合

为了利用二次曲线对的透视投影不变量来描述一般的二维形状, 必须讨论二次曲线的透视不变性拟合问题.

定义. 设 l 为空间平面上的一条曲线, 经过任一透视投影 T , 在图象平面上得到曲线 l' , 如果存在某种二次曲线拟合, 使空间平面上拟合 l 的二次曲线 c 和图象平面上拟合 l' 的二次曲线 c' 满足同样的透视投影关系 T , 那么称这种拟合为二次曲线的透视不变性拟合.

平面透视投影是二维射影变换的子集, 适合于射影变换的许多有用的结论可以直接用于透视投影. 文献[7]在研究二次曲线射影不变性拟合时发现, 在二次曲线的系数矩阵满足归一化约束条件时, 即 $|P| = 1$, 二次曲线的最小二乘法拟合满足射影不变性.

给定平面上的点集 $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_M, y_M)\}$, 如果用二次曲线

$$Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (15)$$

拟合该点集, 则根据 Lagrangian 乘数法, 上述不变性拟合问题转化为求解下列三次七元非线性方程组

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^M x_i^2 Q(x_i, y_i) + \lambda \left(CF - \frac{E^2}{4} \right) = 0, \\
 \sum_{i=1}^M x_i y_i Q(x_i, y_i) + \lambda \left(\frac{DE}{4} - \frac{BF}{2} \right) = 0, \\
 \sum_{i=1}^M y_i^2 Q(x_i, y_i) + \lambda \left(AF - \frac{D^2}{4} \right) = 0, \\
 \sum_{i=1}^M x_i Q(x_i, y_i) + \lambda \left(\frac{BE}{4} - \frac{CD}{2} \right) = 0 \\
 \sum_{i=1}^M y_i Q(x_i, y_i) + \lambda \left(\frac{BD}{4} - \frac{AE}{2} \right) = 0, \\
 \sum_{i=1}^M Q(x_i, y_i) + \lambda \left(AC - \frac{B^2}{2} \right) = 0, \\
 ACF + \frac{BDE}{4} - \frac{CD^2}{4} - \frac{BF^2}{4} - \frac{AE^2}{4} - 1 = 0,
 \end{array} \right. \quad (16)$$

其中 λ 为 Lagrangian 常数.

因为上述方程组有多重解, 所以求解上述非线性方程组的数值解时, 给定不同的初始值, 这些解分别是椭圆、双曲线和抛物线等二次曲线的方程系数.

用二次曲线的透视投影不变量描述封闭曲线构成的二维形状时, 相比于双曲线和抛物线, 用椭圆拟合封闭曲线更能反映封闭曲线的形状特征, 而且在如图 1 所示的摄像机透视投影模型中, 空间平面 π 上的封闭椭圆在图像平面 l 上的透视投影仍是封闭椭圆.

这样我们可以利用不等式

$$B^2 - 4AC < 0 \quad (17)$$

对上述射影不变性拟合方法作进一步约束, 从而得到一种透视不变性拟合方法.

通过图 2 所示的空间平面上的封闭曲线以及其它空间平面上的封闭曲线在不同视点位置上的图像进行不变性拟合发现, 在求解式(17)所示的不等式约束条件下的非线性方程组(16)的数值解时, 无论如何改变非线性方程组的初始值, 所得到的解都是相同的. 所以这种透视不变性拟合方法所得到的拟合椭圆一般具有唯一性.

5 空间二维形状的分类识别

用二次曲线对的透视不变量(14)和第四节提出的透视不变性拟合方法可以实现空间二维形状的分类. 识别算法由特征描述和分类两部分组成.

首先按下列步骤提取二维形状的透视不变量特征:

1) 检测二维形状包含的封闭曲线数 N ;

2) 用透视不变性拟合方法拟合二维形状所包含的各条封闭曲线, 并用数值延拓法^[8]求解(16)式所示的非线性方程组, 其中满足不等式(17)的解就是拟合椭圆的系数. 这样 N 条封闭曲线就可以用 N 个椭圆 e_1, e_2, \dots, e_N 来表示.

3) 根据二维形状的各条封闭曲线之间的相互包含关系, 对每条封闭曲线与其内部的

各条封闭曲线,分别按式(14-a)或式(14-b)计算其拟合椭圆之间的透视不变量,得到如下特征序列

$$ID = (ID_1, ID_2, \dots, ID_{N-1}), \quad (18)$$

式中 $ID_i (i = 1, 2, \dots, N-1)$ 是拟合椭圆之间的透视投影不变量。

有了上述二维形状的透视不变性描述以后,采用树分类法按如下步骤对所描述的二维形状进行分类识别:

1) 根据封闭曲线数进行差别分类,具有相同封闭曲线数的二维形状被分为一类;

2) 对具有相同封闭曲线数的二维形状,采用透视不变量特征序列进行差别分类。设具有相同封闭曲线数的两个二维形状 A 和 B , 其特征序列分别为

$$ID_A = (ID_{A,1}, ID_{A,2}, \dots, ID_{A,N-1}), \quad (19)$$

$$ID_B = (ID_{B,1}, ID_{B,2}, \dots, ID_{B,N-1}). \quad (20)$$

其中 $ID_{A,i} \leq ID_{A,i+1}$, $ID_{B,i} \leq ID_{B,i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, N-2$)。 ID_A 和 ID_B 之间的分类误差为

$$e_{AB} = |ID_A - ID_B| = \sum_{i=1}^{N-1} |ID_{A,i} - ID_{B,i}|. \quad (21)$$

如果预先设置一个判决门限 t_c , 当 e_{AB} 满足条件

$$e_{AB} \leq t_c \quad (22)$$

时,认为 A 和 B 属于同一二维形状在不同摄像机视点位置上的透视投影,否则 A 和 B 不是同一类二维形状。

6 实验结果

图 2-1(a) 和图 2-2(a) 分别是张角为 0° 的剪刀在两个不同视点位置上的图象,图 2-3(a) 和图 2-4(a) 分别是张角为 120° 的剪刀在两个不同视点位置上的图象。这些图象分别可以用图 2-1(b)、2-2(b)、2-3(b)、2-4(b) 所示的二维形状来表示,其中每个二维形状都包含三条封闭曲线。图 2-1(c)、2-2(c)、2-3(c)、2-4(c) 给出的椭圆分别是上述二维形状的透视不变性拟合结果。计算椭圆间的透视不变量得到表 1 所示的结果。

表 1 图 2 所示模型的透视不变量

| | 透视不变量 (1) | 透视不变量 (2) |
|----------|--------------|--------------|
| 图 2-1(c) | 2.632232 | 2.590745 |
| 图 2-2(c) | 2.636847 | 2.608565 |
| 图 2-3(c) | 2.877027 | 2.877921 |
| 图 2-4(c) | 2.852195 | 2.877923 |

从表中可以看出,由于剪刀的张角不同,其形状也各不相同,计算得到的透视不变量也各不相同。但是相同张角的剪刀的不变量和摄像机的视点位置无关。

综上所述,我们的二维形状透视不变性识别算法具有如下特点:

1) 对具有两个或两个以上连通域的任何二维形状都能够实现定量的描述和准确的分类。

2) 对组成二维形状的各条封闭曲线进行全局透视不变性拟合,使该算法具有较好的抗噪声性能。

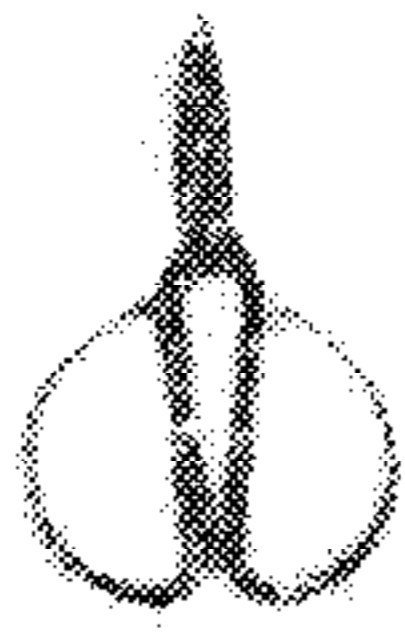


图 2-1(a)

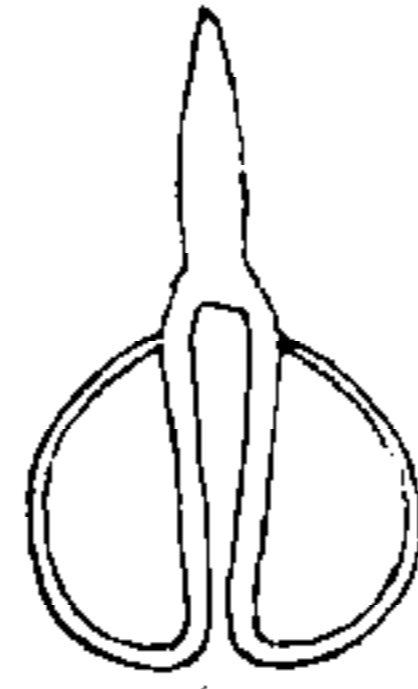


图 2-1(b)



图 2-1(c)

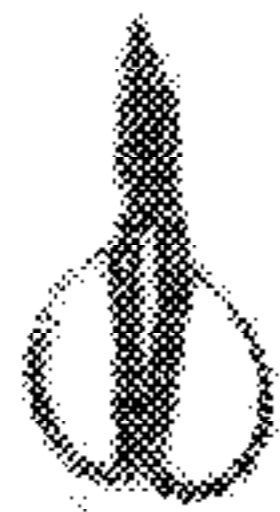


图 2-2(a)



图 2-2(b)



图 2-2(c)

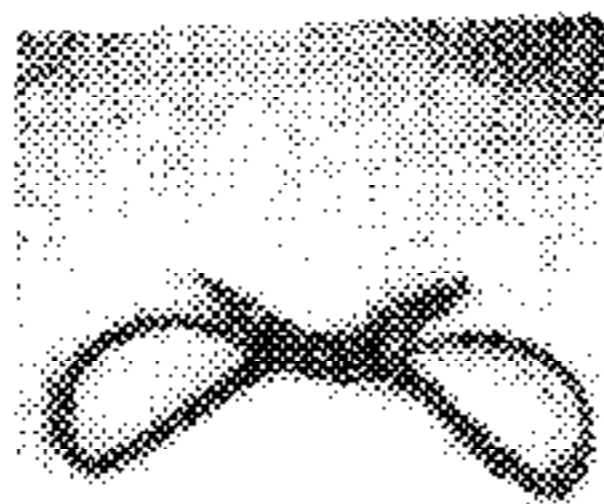


图 2-3(a)



图 2-3(b)



图 2-3(c)

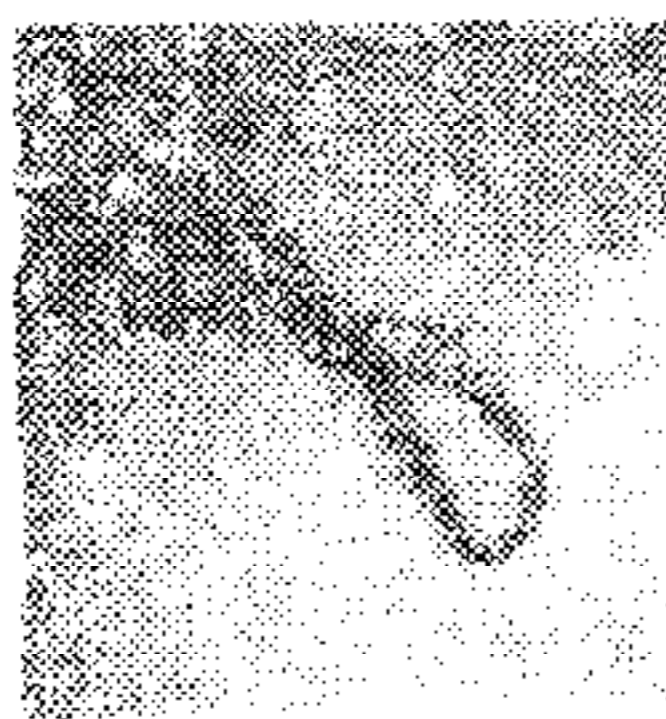


图 2-4(a)



图 2-4(b)



图 2-4(c)

图 2 张角为 0 度和张角 120 度的剪刀在不同视点位置上的图像描述

参 考 文 献

[1] Hu MK. Visual Pattern Recognition by Moment Invariants. IRE Tran. on IT, 1962:179—182.

- [2] Zahn CT and Roskies RZ. Fourier Descriptors for Plane Closed Curves. *IEEE Trans. on Computer*, 1972, **21**:269—281.
- [3] Ma Jun, Wu Chengke and Lu Xinru. A Fast Shape Descriptor. *CVGIP* 1986, **34**:282—291.
- [4] 朱德祥. 高等几何. 高等教育出版社, 1983.
- [5] 徐正伟, 吴成柯. 基于透视不变性的平面多边形的识别. *电子学报*, 1993, **21**(7): 8—15
- [6] Guo Lei. Recognition of Planar Objects in 3D Space from Perspective Views Using Cross Ratio. *IEEE Tran. on Robotics and Automation*, 1990, **6**(4):432—437.
- [7] Forsyth DA et al. Projectively Invariant Data Representation by Implicit Algebraic Curves. *Proc. 1st European Conference Computer Science*, 1990, 427—436.
- [8] 李庆扬, 莫孜中, 祁力群著. 非线性方程组的数值解法. 科学教育出版社, 1987.

PERSPECTIVE INVARIANT RECOGNITION OF 2D SHAPES

XU ZHENGWEI WU CHENGKE

(*Department of Information Engineering, Xi'an University 710071*)

ABSTRACT

The recognition of 2D shapes is important in computer vision. In order to recognize the 2D shapes, we proposed a set of perspective invariants of a pair of coplanar conics in this paper, we suggest a perspective invariant representation of general planar curve based on ellipse, and give an algorithm using the invariants and the representation to recognize 2D shapes. The effectiveness of the algorithm is demonstrated by the experiments.

Key words: Recognition of 2D shapes, perspective projection invariants, perspective invariant representation, perspective projection.



徐正伟 生于1965年12月, 1992年12月毕业于西安电子科技大学, 获工学博士学位, 发表论文十余篇。现为西安电子科技大学信息工程系副教授, 主要从事计算机视觉、图象处理的教学与科研工作。



吴成柯 1962年毕业于原西北电讯工程学院无线电通讯专业, 1980年至1982年在美国宾夕法尼亚大学作访问学者, 1990年至1991年受聘为法国南锡大学计算机系客座教授。现为西安电子科技大学信息工程系教授, 博士生导师, 从事计算机图形、图像处理与识别的研究工作。