第21卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 21, No. 4
1995 年 7 月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1995

短文

选择采样周期的一种新方法

马 善 凯
(燕山大学自动化系 秦皇岛 066004)

摘　　要

该文定义了假频能量系数,以表征采样频谱的混叠程度. 通过对系统频谱能量的分析,提出了按系统的假频能量系数和时间常数选择采样周期的一种新方法.

关键词: 采样周期,频谱,假频能量系数.

1 引言

采样周期的选择原则上可按香农采样定理确定,但是,该定理并没有给出解决实际问题的条件公式. 比如,当系统频谱的最高频率为无穷大时,应当如何按系统的允许误差来选取采样周期,这个非常普遍的实际问题就不能由香农定理来解决. 因此,不少文献上给出了选择采样周期的实用公式或经验规则. 然而,这些规则却未建立采样周期与采样频谱的混叠程度或相对误差之间的定量关系. 本文试用频谱能量分析的方法,来寻求这种定量关系,从而找到选择采样周期的一种新方法.

2 一阶系统的采样公式及规则

把 $s=j\omega$ 代入一阶系统的传递函数

$$G(s)=K_1e^{-\tau s}/(T_1s+1) \tag{1}$$

后取其模,得一阶系统的幅频特性

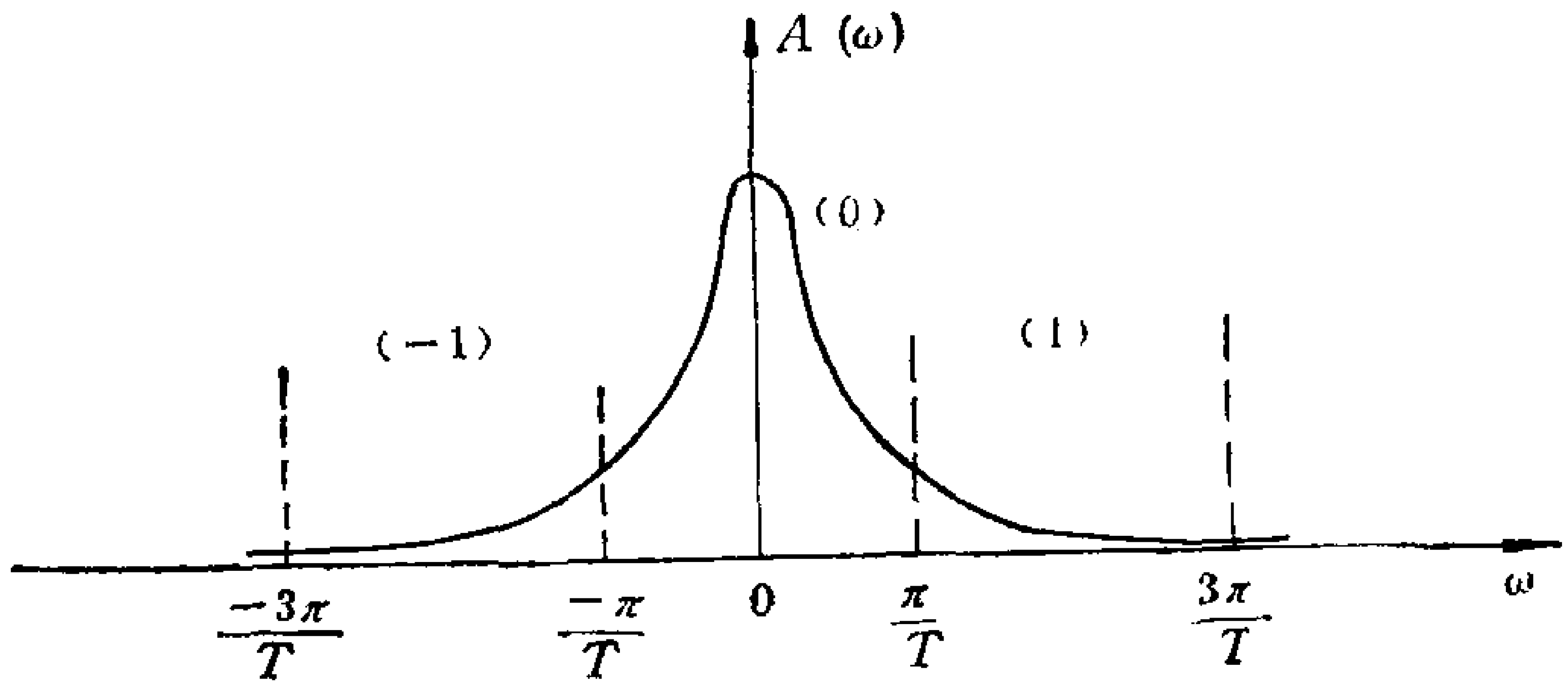
$$A(\omega)=|G(j\omega)|=\frac{K_1}{\sqrt{T_1^2\omega^2+1}}, \tag{2}$$

式中 K_1、T_1 和 τ 分别为系统的增益系数、时间常数和纯滞后时间.

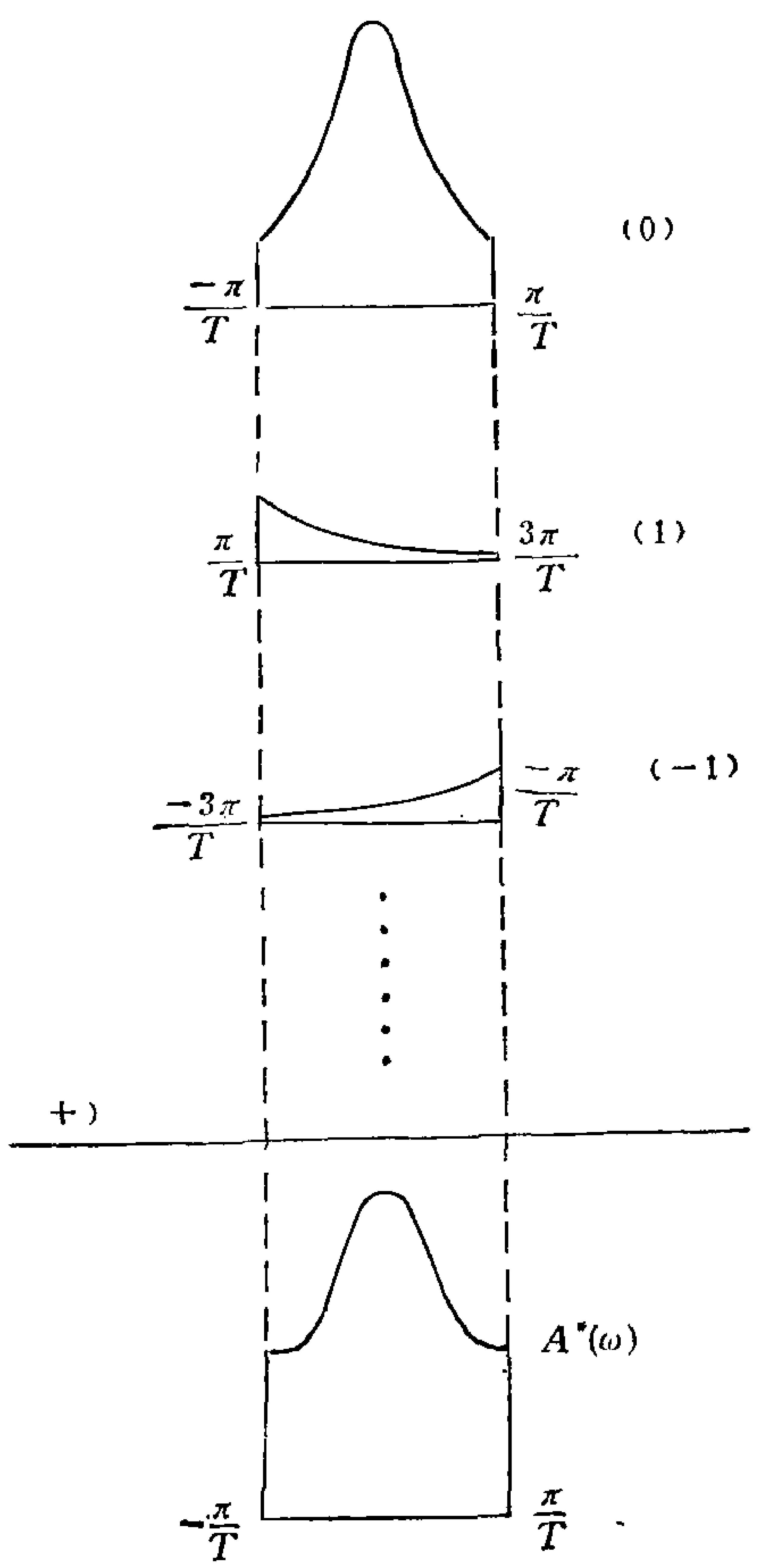
由(2)式可见,一阶系统具有低通滤波特性,但是,其频谱的最高频率为无穷大. 若按香农采样定理做到采样频谱 $A^*(\omega)$ 不发生混叠现象,则采样周期趋于零. 显然,这是办不到也无必要的. 这时,应当按系统的允许误差来选取适当的采样周期.

本文于 1993 年 10 月 13 日收到

当采样周期的取值不能满足香农采样定理的要求时,采样频谱中要产生假频现象,如图 1 所示[1]. 由图 1 可见,采样周期越大,假频(即原频谱中大于奈魁斯特频率的高频部分)在原频谱中所占的百分比就越大,因而,假频谱与原频谱之间的差别,亦即采样频谱的混叠程度或相对误差也越大.



(a) 原频谱 $A^*(\omega)$



(b) 由原频谱各段叠加得到的假频谱 $A^*(\omega)$

图 1　假频现象示意图

定义 1. 设原频谱与假频频带的能量积分分别为 J 和 J_t，则称

$$\alpha = J_t/J \tag{3}$$

为假频能量系数．

显然，假频能量系数可以作为表征采样频谱的混叠程度或相对误差的一种定量指标．

参考图 1(a)，根据式(2)、(3)求出一阶系统的原频谱总能量 J、假频能量 J_t 及假频能量系数 α 为

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega)\mathrm{d}\omega = \frac{\pi K_1^2}{T_1}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} J_t &= \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{T}} A^2(\omega)\mathrm{d}\omega + \int_{\frac{\pi}{T}}^{\infty} A^2(\omega)\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{2K_1^2}{T_1}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{tg}^{-1}\frac{\pi T_1}{T}\right), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\alpha = \frac{J_t}{J} = 1 - \frac{2}{\pi}\mathrm{tg}^{-1}\frac{\pi T_1}{T}. \tag{6}$$

式中，T 为采样周期，下同．由(6)式得

$$\frac{T_1}{T} = \frac{1}{\pi}\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}(1-\alpha). \tag{7}$$

注意到在一阶系统的阶跃响应中，按 5% 稳态误差计算的调整时间 $T_{95} = 3T_1$，则由(7)式还可得

$$\frac{T_{95}}{T} = \frac{3}{\pi}\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}(1-\alpha). \tag{8}$$

(7)，(8)式，给出了采样周期与系统的假频能量系数和时间常数三者间的定量关系．实际使用时，可以按系统的允许误差来选择采样周期，或对采样频谱的混叠程度进行定量分析．所以，这两式是重要的基本关系式，称之为一阶系统的采样公式．按这两式计算的一些典型值列于表1．由表 1 可见

1) 当 $\alpha \to 0$ 时，$T \to 0$.

此种情况采样频谱无混叠现象，但不可实现．

2) 当 $0.02 \leqslant \alpha \leqslant 0.05$ 时，

$$10.13 \geqslant \frac{T_1}{T} \geqslant 4.04, \tag{9}$$

$$30.39 \geqslant \frac{T_{95}}{T} \geqslant 12.13. \tag{9a}$$

此种情况，假频能量只占原频谱总能量的 2%—5%，所以，因假频现象而产生的频谱能量相对误差不会大于一般系统的允许误差．因此，式(9)，(9a)应当是在系统的准确性优先时的采样周期取值规则．

3) 当 $0.05 \leqslant \alpha \leqslant 0.25$ 时，

$$4.04 \geqslant \frac{T_1}{T} \geqslant 0.77, \tag{10}$$

$$12.13 \geqslant \frac{T_{95}}{T} \geqslant 2.31. \tag{10a}$$

此种情况，假频能量占原频谱总能量的5%—25%，所以，因假频现象而产生的频谱能量相对误差不会大于系统的$\frac{1}{4}$超调误差。由于系统的快速性主要依赖于低频特性，通常在低频段系统是允许$\frac{1}{4}$超调误差的。因此，式(10)，(10a)可以作为在系统的快速性优先时的采样周期取值规则。

表 1

α	$\frac{T_1}{T}$	$\frac{T_{95}}{T}$	α	$\frac{T_1}{T}$	$\frac{T_{95}}{T}$
0	∞	∞	0.10	2.01	6.03
0.01	20.26	60.79	0.15	1.33	3.98
0.02	10.13	30.39	0.20	0.98	2.94
0.03	6.75	20.25	0.25	0.77	2.31
0.04	5.06	15.18	0.50	0.32	0.95
0.05	4.04	12.13	1	0	0

3 选择采样周期的经验规则在一阶和二阶系统中的应用分析

表2列出了几个典型的选择采样周期经验规则及其在一阶和二阶系统中的应用分析。在一阶系统中，$\omega_b = \omega_c = \frac{1}{T_1}$，上升时间 $t_r = 2.1972T_1, T_{95} = 3T_1, T_0 = T$；$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$。所以，经过简单计算可求出这些规则相应的$\frac{T_1}{T}$值，将此$\frac{T_1}{T}$值代入(6)式又可求出其

表 2

选择采样周期的经验规则		在一阶系统中的应用分析		在二阶系统中的应用分析	
序号	内　容	T_1/T	α	$1/\xi\omega_n T$	α
1	取采样频率 $\omega_s = (5—15)\omega_b$[3]	0.7958—2.3873	0.2422—0.0844	0.8663—8.2035	0.2242—0.0247
2	取采样频率 $\omega_s = 10\omega_c$	1.5915	0.1257	1.2434—3.9789	0.1595—0.0508
3	在闭环系统阶跃响应的上升时间采样2—4次[3]	0.9102—1.8205	0.2142—0.1102	0.6005—4.6235	0.3103—0.0438
4	取 $T_{95}/T_0 = 6, 7, \cdots, 15$[1)]	2—5	0.1005—0.0405	2—5	0.1005—0.0405
5	在闭环系统的响应中，一个振荡周期内至少采样6—10次[3]			0.7162—3.6470	0.2662—0.0554

1) 南开大学控制理论教研室，第五届IFAC辨识与系统参数估计会议(1979年)指导报告之六，天津：1979.12

α 值. 由表 2 可见，对于一阶系统而言，采样周期的经验取值规则多属于系统的快速性优先的采样周期取值规则，仅规则 4 兼顾了系统的快速性与准确性.

在二阶系统中[4,5]，$\omega_b = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{2-4\xi^2+4\xi^4}}$，$\omega_c = \begin{cases}\omega_n, & \xi \leqslant 0.5\\ \dfrac{\omega_n}{2\xi}, & \xi > 0.5\end{cases}$，$t_r = (\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^{-1}\mathrm{tg}^{-1}(-\xi^{-1}\sqrt{1-\xi^2})$，振荡周期 $t_d = \dfrac{2\pi}{\omega_d} = 2\pi(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^{-1}$，$T_{95} = \dfrac{3}{\xi\omega_n}$，$T_0 = T$；$\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$. 所以，经过简单计算可求出在恰当阻尼范围（$0.4 \leqslant \xi \leqslant 0.8$[2]）的 $\dfrac{1}{\xi\omega_n T}$ 值，将此值作为 $\dfrac{T_1}{T}$ 代入(6)式又可求出其 α 值. 由表 2 可见，对于二阶系统，选择采样周期的经验规则多属于系统的快速性与准确性兼顾的采样周期取值规则.

4 二阶和高阶系统的采样周期选择方法

因二阶和高阶系统的假频能量系数计算较难，所以，可把前面对一阶系统的分析结论推广应用过来. 为此，需要先求出其一阶近似时间常数 T_1，再应用一阶系统的采样公式或规则(7)—(10)来选择采样周期. 当然，这是一种近似方法. 系统的一阶近似时间常数的求法如下：

1）二阶系统，用其阶跃响应包络线的时间常数 $\dfrac{1}{\xi\omega_n}$ 作为其一阶近似时间常数 T_1.

这样近似，不仅使计算裕量大些，而且能保证被近似的二阶系统与近似成的一阶系统的调整时间相同. 实际的二阶系统的阻尼都要调整到恰当阻尼范围[2]，这时，二阶系统按 5% 稳态误差计算的调整时间近似为 $t_s = \dfrac{3}{\xi\omega_n} = 3T_1$，这种关系正好与一阶系统中的一样. 此外，由拉氏变换的终值定理可知，以调整时间相同为依据把二阶系统近似为一阶的作法，能够保证在系统频谱的关键性的低频段上二者基本相同. 再者，从表 2 的选择采样周期经验规则在二阶系统中的应用分析来看，用 $\dfrac{1}{\xi\omega_n}$ 作为二阶系统的一阶近似时间常数 T_1 所得的 $\dfrac{1}{\xi\omega_n T}$ 即 $\dfrac{T_1}{T}$ 与 α 值较为合理，所以，这样近似是可行的.

2）高阶系统，按系统的低阶近似法近似成一阶或二阶系统. 若近似成一阶的，则其时间常数即为所求；若近似成二阶的，则按 1）求出其一阶近似时间常数.

5 结束语

按系统的一阶或一阶近似时间常数和假频能量系数选择采样周期是一种新方法，其取值的公式及规则为(7)—(10)式，其正确性则由对几个典型的选择采样周期的经验规则在一阶和二阶系统中的应用分析得到验证.

参 考 文 献

[1] 程乾生. 信号数字处理的数学原理. 北京: 石油工业出版社,1979.57,66.
[2] 绪方胜彦著,卢伯英译. 现代控制工程. 北京: 科学出版社,1976. 177,180,191.
[3] 孙增圻. 计算机控制理论及应用. 北京: 清华大学出版社,1989. 288.
[4] 蔡尚峰. 自动控制理论. 北京: 机械工业出版社,1980. 248,112,114.
[5] 戴冠中. 计算机控制原理. 北京: 国防工业出版社,1980.87.

THE NEW METHOD OF SELECTING THE SAMPLING PERIOD

MA SHANKAI

(Department of Automation, Yanshan University Qinhuangdao 066004)

ABSTRACT

In this paper, the energy coefficient of pseudo-frequency is defined to represent the overlaping extent of the sampling frequency spectrum. The new method of selecting the sampling period is presented according to time constant and energy coefficient of pseudo-frequency.

Key words: Sampling period; frequency spectrum; energy coefficient of pseudo-frequency.