第 29 卷 第 4 期
2003 年 7 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 29, No. 4
July, 2003

乘性随机离散系统的最优控制[1)]

赵明旺
（武汉科技大学信息科学与工程学院 武汉 430081）
（E-mail：zhaomw@mail. wust. edu. cn）

摘 要 基于对系统随机不确定因素的分析，文中定义了一种新型随机离散系统——乘性随机离散系统，并研究该类系统的线性二次型（LQ）最优控制问题. 首先给出了该类系统的有限时间和无限时间 LQ 最优控制律，并着重分析、证明了无限时间 LQ 最优控制问题的 Riccati 方程的正定矩阵解的存在性及相应数值求解算法与收敛性，以及闭环系统的稳定性等问题. 仿真结果表明了该方法的有效性.

关键词 随机离散系统，最优控制，噪声，乘性摄动
中图分类号

Optimal Control for Multiness Stochastic Discrete Systems

ZHAO Ming-Wang
(*School of Information Science & Engineering, Wuhan University of Science & Technology, Wuhan* 430081)
(E-mail: zhaomw@mail. wust. edu. cn)

Abstract Based on the analysis of stochastic uncertainty in dynamical systems, a new type of stochastic discrete systems, named as the multiness stochastic discrete systems, is defined and then the linear quadric(LQ) optimal control problem for the systems is discussed. Firstly, the LQ optimal control laws with finite time and infinite time are proposed respectively. Secondly, the existence of the positive define matrix solution to the Riccati equation for solving the infinite-time LQ control law, the convergence of the numerical algorithm for solving the equation, and the stability of the closed-loop systems are discussed in detail. Finally, the simulation results show the effectiveness of the method proposed in this paper.

Key words Stochastic discrete systems, optimal control, noise, multiness disturbance

1 引言

探讨对不确定性的处理始终是推动控制科学发展的主要因素之一，并相继诞生了随机

1) 湖北省自然科学基金和湖北省教育厅优秀中青年人才项目资助
Supported by Natural Science Foundation of Hubei Provence and Outstanding Young Teachers Foundation of Department of Eduation of Hubei Provence Government
收稿日期 2001-08-15 收修改稿日期 2002-04-17
Received August 15, 2001; in revised form April 17, 2002

控制、鲁棒控制和模糊控制等分支. 随机性可以说是研究最早的不确定性. 目前所考虑的随机性一般用加性随机噪声来表达,即系统可表示为[1,2]

$$A(z^{-1})y_k = B(z^{-1})u_{k-d} + v_k \tag{1}$$

其中随机因素 v_k 为测量噪声(误差)、内外扰动、建模误差等不确定性因素在输出端的综合反映. 加性随机噪声表达的优点是直观明了,便于数学处理. 但这种独立于系统的其它信号(如输出和输入)和系统参数,并满足一定统计规律的加性随机噪声表达也有其局限性.

1) 许多实际系统的模型参数呈现时变、随机特性. 如轧机的动力学模型参数因轧制不同材质、规格的型材而呈现一定的不确定性[3,4],太空中柔性臂的动力学模型参数呈现随机时变性和不确定性,大型控制系统网络中执行机构的随机时延导致控制模型参数也呈现随机性[5~9]. 这些具有随机时变或不确定参数的系统可以表述为[3,4].

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = (A + \Delta A)\boldsymbol{x}_k \tag{2}$$

其中 ΔA 为随机扰动参数. 在这里,随机扰动 ΔA 与状态变量 $\boldsymbol{x}_k$ 是一个乘性的关系.

实际上,乘性的未建模动态在鲁棒控制中已有讨论,并给予有界摄动的宽松描述,而无论是否满足某种分布规律. 由于鲁棒控制的思想为最坏情况下求最好的解,因此当摄动满足某种规律时,鲁棒控制方法有较大保守性,甚至本身控制问题有解,由于其保守性而不能求解.

2) 测量噪声的大小与被测信号的强弱及量程相关. 被测信号强或量程大,则伴随产生的测量噪声相应大. 因此,测量噪声与被测信号之间并不是独立的. 如输出的测量模型可表示为

$$y_k^c = (1 + v_k)y_k \tag{3}$$

其中 y_k, y_k^c 和 v_k 分别为输出、输出的测量值和相对测量噪声. 显然,这里噪声 v_k 与输出 y_k 不再是一个"加"而是一个"乘"的关系,而且可假定 v_k 满足一定的统计规律,并与 y_k 统计独立.

本文将具有如上述随机因素的系统称为乘性随机系统,该类系统在一定程度上刻划了一类系统的随机特性. 因此,研究它的辨识、稳定性、最优控制等问题具有重要的理论意义和广泛的应用背景. 本文主要讨论这类系统的线性二次型(LQ)最优控制.

2 问题描述

考虑如下乘性随机离散系统

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = G_{k+1}\boldsymbol{x}_k + H_{k+1}\boldsymbol{u}_k \tag{4}$$

其中 x_k 和 u_k 分别为可测的 n 维状态和 r 维输入,G_k 和 H_k 为如下描述的随机变参数矩阵

$$G_k = A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i v_{i,k}, \quad H_k = B_0 + \sum_{i=1}^{m} B_i v_{i,k} \tag{5}$$

其中 A_i 和 $B_i(i=\overline{0,m})$ 为定常矩阵,$v_{i,k}(i=\overline{1,m})$ 为区间$[-\delta_i, \delta_i]$内满足某种分布的不可测白噪声,其均值为 0,方差为 σ_i^2. 为方便讨论起见,对随机因素 $v_{i,k}$ 的分布区间和方差作归一化处理. 即将 $v_{i,k}$ 变换为区间$[-\delta, \delta]$内分布,其均值为 0,方差为 σ^2. 当然也要相应地对常数阵 A_i 和 B_i 进行处理.

类似一般最优控制问题,对乘性随机系统(4)有如下有限/无限时间 LQ 最优控制问题.

1) 有限时间的 LQ 最优控制问题. 该最优控制问题的 LQ 最优指标为

$$J = E\Big[x_N^{\tau}F_N x_N + \sum_{k=0}^{N-1}(x_k^{\tau}Q_k x_k + u_k^{\tau}R_k u_k)\Big], \quad F_N \geqslant 0, Q_k \geqslant 0, R_k > 0 \tag{6}$$

2) 无限时间的 LQ 最优控制问题. 该最优控制问题的 LQ 最优指标为

$$J = E\Big[\sum_{k=0}^{\infty}(x_k^{\tau}Qx_k + u_k^{\tau}Ru_k)\Big], \quad Q \geqslant 0 \text{ 和 } R > 0 \tag{7}$$

在研究乘性随机系统的最优控制问题之前，下面先给出其稳定性的定义和稳定性判据.

定义 1. 自治乘性随机离散系统

$$x_{k+1} = G_{k+1}x_k \tag{8}$$

的平衡态 $x_e=0$ 称为状态均方稳定的，仅当下式成立

$$E[x_{k+1}^{\tau}Px_{k+1} \mid Z_k] \leqslant x_k^{\tau}Px_k, \quad \exists P > 0, \forall k, \forall x_k \in R^n \tag{9}$$

其中 Z_k 为由可测的状态和输入在 k 时刻及 k 时刻以前的信息所组成的集合(非减的 σ 子代数). 平衡态 x_e 称为状态均方渐近稳定的，仅当下式成立

$$E[x_{k+1}^{\tau}Px_{k+1} \mid Z_k] < x_k^{\tau}Px_k, \quad \exists P > 0, \forall k, \forall x_k \in R^n \tag{10}$$

由上述关于乘性随机离散系统均方稳定性定义，我们有如下定理.

定理 1. 自治乘性随机离散系统 $x_{k+1}=G_{k+1}x_k$ 均方渐近稳定的充要条件为

$$A_0^{\tau}PA_0 + \sum_{i=1}^{m}A_i^{\tau}PA_i\sigma^2 < P, \quad \exists P > 0 \tag{11}$$

证明. 由系统状态方程(8)有

$$E[x_{k+1}^{\tau}Px_{k+1} \mid Z_k] = E[x_k^{\tau}G_{k+1}^{\tau}PG_{k+1}x_k \mid Z_k] =$$

$$x_k^{\tau}E\Big[\big(A_0 + \sum_{i=1}^{m}A_i v_{i,k+1}\big)^{\tau}P\big(A_0 + \sum_{i=1}^{m}A_i v_{i,k+1}\big) \mid Z_k\Big]x_k =$$

$$x_k^{\tau}\big(A_0^{\tau}PA_0 + \sum_{i=1}^{m}A_i^{\tau}PA_i\sigma^2\big)x_k.$$

因此，由状态均方渐近稳定定义可知，自治乘性随机离散系统均方渐近稳定的充要条件为

$$A_0^{\tau}PA_0 + \sum_{i=1}^{m}A_i^{\tau}PA_i\sigma^2 < P, \quad \exists P > 0.$$

证毕.

3 有限时间最优控制问题求解

类似一般 LQ 最优控制，有如下乘性随机离散系统的有限时间 LQ 最优控制解的定理.

定理 2. 乘性随机离散系统(4)在 LQ 指标(6)下的最优指标和最优控制律分别为

$$J = E[x_0^{\tau}P_0x_0], \quad u_k = -K_kx_k \tag{12),(13}$$

其中 x_0 为系统的初始状态，矩阵 K_k 和 P_k 满足如下 Riccati 方程

$$P_k = Q_k + K_k^{\tau}R_kK_k + A_{c,0,k}^{\tau}P_{k+1}A_{c,0,k} + \sum_{i=1}^{m}A_{c,i,k}^{\tau}P_{k+1}A_{c,i,k}\sigma^2, \; k = \overline{0, N-1}, P_N = F_N \tag{14}$$

$$K_k = \big(R_k + B_0^{\tau}P_{k+1}B_0 + \sum_{i=1}^{m}B_i^{\tau}P_{k+1}B_i\sigma^2\big)^{-1}\big(B_0^{\tau}P_{k+1}A_0 + \sum_{i=1}^{m}B_i^{\tau}P_{k+1}A_i\sigma^2\big) \tag{15}$$

其中 $A_{c,i,k}=A_i-B_iK_k$, $i=\overline{0,m}$.

证明. 类似于一般 LQ 最优控制解的推导[10]，对乘性随机系统(4)在最优指标(6)下有限时间最优控制问题，也可采用动态规划来证明.

根据贝尔曼的动态规划法，对式(6)的最优指标有如下递推定义

$$J_k = \min_{u_k} E[x_k^{\tau} Q_k x_k + u_k^{\tau} R_k u_k + J_{k+1} \mid Z_k], \quad k = \overline{0, N-1} \tag{16}$$

$$J_N = E[x_N^{\tau} F_N x_N \mid Z_N] = x_N^{\tau} F_N x_N \tag{17}$$

因此，对 $k=N-1$，有

$$\begin{aligned} J_{N-1} = &\min_{u_{N-1}} E[x_{N-1}^{\tau} Q_{N-1} x_{N-1} + u_{N-1}^{\tau} R_{N-1} u_{N-1} + J_N \mid Z_{N-1}] = \\ &\min_{u_{N-1}} x_{N-1}^{\tau} Q_{N-1} x_{N-1} + u_{N-1}^{\tau} R_{N-1} u_{N-1} + E[x_N^{\tau} F_N x_N \mid Z_{N-1}] = \\ &\min_{u_{N-1}} x_{N-1}^{\tau} Q_{N-1} x_{N-1} + u_{N-1}^{\tau} R_{N-1} u_{N-1} + E\Big[\{(A_0 + \\ &\sum_{i=1}^{m} A_i v_{i,N}) x_{N-1} + \Big(B_0 + \sum_{i=1}^{m} B_i v_{i,N}\Big) u_{N-1}\}^{\tau} F_N \{(A_0 + \\ &\sum_{i=1}^{m} A_i v_{i,N}) x_{N-1} + \Big(B_0 + \sum_{i=1}^{m} B_i v_{i,N}\Big) u_{N-1}\} \mid Z_{N-1}\Big] \end{aligned} \tag{18}$$

考虑到 $v_{i,N}$ 独立于 x_{N-1} 和 u_{N-1}，因此，由上式有

$$\begin{aligned} J_{N-1} = &\min_{u_{N-1}} x_{N-1}^{\tau} Q_{N-1} x_{N-1} + u_{N-1}^{\tau} R_{N-1} u_{N-1} + (A_0 x_{N-1} + B_0 u_{N-1})^{\tau} F_N (A_0 x_{N-1} + \\ &B_0 u_{N-1}) + \sum_{i=1}^{m} (A_i x_{N-1} + B_i u_{N-1})^{\tau} F_N (A_i x_{N-1} + B_i u_{N-1}) \sigma^2 \end{aligned} \tag{19}$$

由最优化原理，将上式对 u_{N-1} 求导后有

$$\frac{\partial J_{N-1}}{\partial u_{N-1}} = 2R_{N-1} u_{N-1} + 2B_0^{\tau} F_N (A_0 x_{N-1} + B_0 u_{N-1}) + 2\sum_{i=1}^{m} B_i^{\tau} F_N (A_i x_{N-1} + B_i u_{N-1}) \sigma^2 = 0,$$

因此，最优 u_{N-1} 的解为

$$\begin{aligned} u_{N-1} = &-\Big(R_{N-1} + B_0^{\tau} P_N B_0 + \sum_{i=1}^{m} B_i^{\tau} P_N B_i \sigma^2\Big)^{-1} \Big(B_0^{\tau} P_N A_0 + \sum_{i=1}^{m} B_i^{\tau} P_N A_i \sigma^2\Big) x_{N-1} = \\ &-K_{N-1} x_{N-1}, \end{aligned}$$

其中矩阵 K_{N-1} 和 P_N 的定义如式(14)和式(15)所示. 此时有

$$\begin{aligned} J_{N-1} = &x_{N-1}^{\tau}\Big[Q_{N-1} + K_{N-1}^{\tau} R_{N-1} K_{N-1} + A_{c,0,N-1}^{\tau} P_N A_{c,0,N-1} + \\ &\sum_{i=1}^{m} A_{c,i,N-1}^{\tau} P_N A_{c,i,N-1} \sigma^2\Big] x_{N-1} = x_{N-1}^{\tau} P_{N-1} x_{N-1}. \end{aligned}$$

上式对任意的状态 x_{N-1} 均成立，因此有

$$P_{N-1} = Q_{N-1} + K_{N-1}^{\tau} R_{N-1} K_{N-1} + A_{c,0,N-1}^{\tau} P_N A_{c,0,N-1} + \sum_{i=1}^{m} A_{c,i,N-1}^{\tau} P_N A_{c,i,N-1} \sigma^2.$$

重复上述证明过程，用归纳法可证明乘性随机系统的最优控制结论式(12)和式(13). 证毕.

由式(12)可知，矩阵 P_k 的解满足

$$\begin{cases} P_N = F_N \geqslant 0, \\ P_k \geqslant Q_k \geqslant 0, \quad k = \overline{1, N-1} \end{cases} \tag{20}$$

4　无限时间最优控制问题求解

由上述关于有限时间最优控制解的定理 2，有如下无限时间最优控制解的定理.

定理 3. 乘性随机离散系统(4)在 LQ 指标(7)下的最优指标和最优控制律分别为

$$J = E[\boldsymbol{x}_0^\tau P \boldsymbol{x}_0], \quad \boldsymbol{u}_k = -K\boldsymbol{x}_k \tag{21),(22}$$

其中 x_0 为初始状态，矩阵 K 和 $P>0$ 满足如下 Riccati 方程

$$P = Q + K^\tau RK + (A_0 - B_0K)^\tau P(A_0 - B_0K) + \sum_{i=1}^{m}(A_i - B_iK)^\tau P(A_i - B_iK)\sigma^2 \tag{23}$$

$$K = \widetilde{R}^{-1}S \tag{24}$$

其中 $S = B_0^\tau PA_0 + \sum_{i=1}^{m} B_i^\tau PA_i\sigma^2$，$\widetilde{R} = R + B_0^\tau PB_0 + \sum_{i=1}^{m} B_i^\tau PB_i\sigma^2$.　　证毕.

定理 3 的证明可由有限时间 LQ 最优控制问题的 Riccati 方程(14)和(15)的解的收敛性得到[10]，这里不再赘述. 式(23)与(24)描述的 Riccati 方程又有如下形式

$$P = Q + A_0^\tau PA_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i^\tau PA_i\sigma^2 - S^\tau\widetilde{R}^{-1}S \tag{25}$$

针对 Riccati 方程(25)的正定矩阵解存在性和闭环系统渐近稳定性，有如下假定.

假定 1．矩阵对(A_0, B_0)能控且加权矩阵 $Q>0$(即矩阵对$(A_0, Q^{1/2})$能观).

关于 Riccati 方程(25)的正定矩阵解的存在性，我们有如下定理.

定理 4. 乘性随机离散系统 LQ 最优控制问题在假定 1 下，对充分小的 σ^2，Riccati 方程(25)存在正定矩阵解 P，且正定解 P 在 $\sigma^2=0$ 处的微分满足如下 Lyapunov 方程

$$\mathrm{d}P = A_{c0}^\tau \mathrm{d}PA_{c0} + \sum_{i=1}^{m} A_{ci}^\tau \overline{P} A_{ci} d\sigma^2 \tag{27}$$

其中

$$A_{c0} = A_0 - B_0(R + B_0^\tau \overline{P} B_0)^{-1} B_0^\tau \overline{P} A_0 \tag{28}$$

$$A_{ci} = A_i - B_i(R + B_0^\tau \overline{P} B_0)^{-1} B_0^\tau \overline{P} A_0 \tag{29}$$

这里矩阵$\overline{P}$正定并满足如下 Riccati 方程(即方程(25)在不考虑乘性随机因素时的特例)

$$\overline{P} = Q + A_0^\tau \overline{P} A_0 - A_0^\tau \overline{P} B_0(R + B_0^\tau \overline{P} B_0)^{-1} B_0^\tau \overline{P} A_0 \tag{30}$$

证明. 对 Riccati 方程(25)求微分，有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}P =& A_0^\tau \mathrm{d}PA_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i^\tau(\mathrm{d}P\sigma^2 + P\mathrm{d}\sigma^2)A_i - \mathrm{d}S^\tau\widetilde{R}^{-1}S - S^\tau\widetilde{R}^{-1}\mathrm{d}S + S^\tau\widetilde{R}^{-1}\mathrm{d}\widetilde{R}\widetilde{R}^{-1}S = \\
& A_0^\tau \mathrm{d}PA_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i^\tau(\mathrm{d}P\sigma^2 + P\mathrm{d}\sigma^2)\ A_i - \Big(A_0^\tau \mathrm{d}PB_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i^\tau(\mathrm{d}P\sigma^2 + P\mathrm{d}\sigma^2)B_i\Big)\widetilde{R}^{-1}S - \\
& S^\tau\widetilde{R}^{-1}\Big(B_0^\tau \mathrm{d}PA_0 + \sum_{i=1}^{m} B_i^\tau(\mathrm{d}P\sigma^2 + P\mathrm{d}\sigma^2)A_i\Big) + \\
& S^\tau\widetilde{R}^{-1}\Big(B_0^\tau \mathrm{d}PB_0 + \sum_{i=1}^{m} B_i^\tau(\mathrm{d}P\sigma^2 + P\mathrm{d}\sigma^2)\ B_i\Big)\widetilde{R}^{-1}S\ .
\end{aligned}$$

令上式中 $\sigma^2=0$，则相应的有 $P=\overline{P}$，且上式可记为如下 Lyapunov 方程

$$\mathrm{d}P = A_0^\tau \mathrm{d}PA_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i^\tau \overline{P} A_i \mathrm{d}\sigma^2 - \Big(A_0^\tau \mathrm{d}PB_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i^\tau \overline{P} B_i \mathrm{d}\sigma^2\Big)(R + B_0^\tau \overline{P} B_0)^{-1} B_0^\tau \overline{P} A_0 -$$

$$A_0^{\tau}\,\overline{P}B_0(R+B_0^{\tau}\,\overline{P}B_0)^{-1}\Big(B_0^{\tau}\mathrm{d}PA_0+\sum_{i=1}^{m}B_i^{\tau}\,\overline{P}A_i\mathrm{d}\sigma^2\Big)+$$

$$A_0^{\tau}\,\overline{P}B_0{}^{\tau}(R+B_0^{\tau}\,\overline{P}B_0)^{-1}\Big(B_0^{\tau}\mathrm{d}PB_0+\sum_{i=1}^{m}B_i^{\tau}\,\overline{P}B_i\mathrm{d}\sigma^2\Big)(R+B_0^{\tau}\,\overline{P}B_0)^{-1}B_0^{\tau}\,\overline{P}A_0=$$

$$A_{c0}^{\tau}\mathrm{d}PA_{c0}+\sum_{i=1}^{m}A_{ci}^{\tau}\,\overline{P}A_{ci}\mathrm{d}\sigma^2 \tag{31}$$

由于矩阵对(A_0,B_0)能控且加权矩阵 $Q>0$(即矩阵对$(A_0,Q^{1/2})$能观),因此未考虑随机因素 v_{ik}的如下名义系统和 LQ 指标

$$x_{k+1}=A_0x_k+B_0u_k,\quad J=\sum_{k=0}^{\infty}(x_k^{\tau}Qx_k+u_k^{\tau}Ru_k) \tag{32),(33}$$

下最优控制问题的 Riccati 方程(30)存在正定矩阵解$\overline{P}$,并使得相应闭环矩阵

$$A_{c0}=A_0-B_0(R+B_0^{\tau}\,\overline{P}B_0)^{-1}B_0^{\tau}\,\overline{P}A_0$$

渐近稳定. 由于$\overline{P}>0$, 因此有$\sum_{i=1}^{m}A_{ci}^{\tau}\overline{P}A_{ci}\mathrm{d}\sigma^2\geqslant 0$,考虑到闭环矩阵 A_{c0}渐近稳定,故关于 $\mathrm{d}P$ 的 Lyapunov 方程(31)存在 $\mathrm{d}P$ 的非负定解. 此时,关于乘性随机离散系统(4)的 LQ 最优控制的 Riccati 方程(25)存在正定矩阵解 P,并可近似表示为$\overline{P}+\mathrm{d}P$ 且有 $P\geqslant\overline{P}$. 证毕.

对在 LQ 指标(7)意义之下的最优状态反馈(22)的闭环稳定性问题,有如下定理.

定理 5. 若乘性随机离散系统(4)在 LQ 指标(7)意义之下的 Riccati 方程(25)存在正定解,则在相应的最优状态反馈(22)构成的闭环系统为状态均方渐近稳定的.

证明. 在最优状态反馈(22)下,系统的闭环状态方程为

$$x_{k+1}=G_{k+1}x_k+H_{k+1}u_k=(G_{k+1}-H_{k+1}K)x_k=\Big[A_0-B_0K+\sum_{i=1}^{m}(A_i-B_iK)v_{i,k}\Big]x_k.$$

因此,由关于乘性随机系统均方渐近稳定性的定理 1 知,闭环系统均方渐近稳定的充要条件为

$$(A_0-B_0K)^{\tau}P(A_0-B_0K)+\sum_{i=1}^{m}(A_i-B_iK)^{\tau}P(A_i-B_iK)\sigma^2<P,\quad \exists P>0\,.$$

故,当 Riccati 方程(25)存在正定矩阵解时,有

$$(A_0-B_0K)^{\tau}P(A_0-B_0K)+\sum_{i=1}^{m}(A_i-B_iK)^{\tau}P(A_i-B_iK)\sigma^2=P-Q-K^{\tau}RK<P\,,$$

即闭环系统(26)为均方渐近稳定. 证毕.

由定理 3 和上述结论,本文提出求解 Riccati 方程(25)的算法如下:

步骤 1. 求解关于名义系统(32)LQ 最优控制问题的 Riccati 方程(30)的$\overline{P}$,并计算 A_{c0},由于矩阵对(A_0,B_0)能控且矩阵对$(A_0,Q^{1/2})$能观,则对应方程(25)的解$\overline{P}$正定且 A_{c0}渐近稳定;

步骤 2. 令 $P_0=0$ 或 $P_0=\alpha I/\sigma^4$, α 充分大, I 为单位矩阵, $K_0=R^{-1}B^{\tau}\overline{P}$, 进行如下迭代计算直至收敛为止

$$P_k=A_{c0,k-1}^{\tau}P_kA_{c0,k-1}+Q+K_{k-1}^{\tau}RK_{k-1}+\sum_{i=1}^{m}A_{ci,k-1}^{\tau}P_{k-1}A_{ci,k-1}\sigma^2,\quad k=1,2,\cdots \tag{34}$$

$$K_k=\Big(R+B_0^{\tau}P_kB_0+\sum_{i=1}^{m}B_i^{\tau}P_kB_i\sigma^2\Big)^{-1}\Big(B_0^{\tau}P_kA_0+\sum_{i=1}^{m}B_i^{\tau}P_kA_i\sigma^2\Big),\ k=1,2,\cdots \tag{35}$$

其中 $A_{ci,k}=A_i-B_iK_k$，$i=\overline{0,m}$.

对上述算法的迭代收敛性有如下讨论.

1) 一般情况下，随机因素 $v_{i,k}(i=\overline{1,n})$ 的方差 σ^2 较小，故由式(30)所求解的 $\overline{P}$ 已充分逼近式(25)的解，因此步骤 2 的迭代过程可以较快收敛.

2) 迭代计算式(34)其实是要求解一个 Lyapunov 方程. 只要在迭代过程中，反馈矩阵 K_{k-1} 保证闭环矩阵 $A_{c0,k-1}=A_0-B_0K_{k-1}$ 渐近稳定，考虑到

$$Q+K_{k-1}^{\tau}RK_{k-1}+\sum_{i=1}^{m}A_{ci,k-1}^{\tau}P_{k-1}A_{ci,k-1}\sigma^2>0\ ,$$

则方程(34)的解 P_k 正定. 求解 Lyapunov 方程已有成熟的数值算法，迭代式(34)求解是可行的.

3) 由定理 4 知，若矩阵对 (A_0,B_0) 能控且 $Q>0$，当方差 σ^2 充分小时，式(25)一定存在正定解 P. 下面给出的定理表明，按迭代式(34)和(35)求得的解 P_k 将一致收敛于式(25)的正定解 P.

定理 6. 乘性随机离散系统 LQ 最优控制问题在假定 1 下，对迭代式(34)和(35)，有如下结论(证明略)：

1) 当 $P_0=0$ 时，$0=P_0\leqslant P_1\leqslant\cdots\leqslant P_k\leqslant P_{k+1}$；

当 $P_0=\alpha I$ 时($\alpha\gg 0$)，有 $0<P_{k+1}\leqslant P_k\leqslant\cdots\leqslant P_1\leqslant P_0$；

2) $\lim\limits_{k\to\infty}P_k=P$.

5 计算机仿真与结束语

例 1. 考虑如下乘性随机离散系统

$$x_{k+1}=\left\{\begin{bmatrix}0&1\\-2&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\-2&-2\end{bmatrix}v_{1,k+1}\right\}x_k+\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}v_{1,k+1}\right\}u_k,\quad x_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$

其中乘性随机因素 $v_{1,k}$ 在区间 $[-\delta,\delta]$ 内满足均匀分布(下同)，在如下指标下的最优控制

$$J=E\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left\{x_k^{\tau}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}x_k+u_k^2\right\}\right].$$

例 2. 考虑如下乘性随机离散系统

$$x_{k+1}=\left\{\begin{bmatrix}0&1\\-2&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}v_{1,k+1}+\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}v_{2,k+1}\right\}x_k+$$

$$\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}v_{1,k+1}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}v_{2,k+1}\right\}u_k,\quad x_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$

在如下指标下的最优控制

$$J=E\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left\{x_k^{\tau}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}x_k+u_k^2\right\}\right].$$

例 1 中的乘性随机因素具有在自适应控制和鲁棒控制中的通常的模型匹配假定. 对上述两例的 LQ 最优控制问题，在不同随机因素下进行了最优控制计算和仿真，结果如表 1 所示.

表 1 计算机仿真结果
Table 1 The simulation results

	δ	反馈矩阵 K		最优指标 J		反馈阵为名义系统的最优反馈阵时的仿真值
				理论计算值	仿真值	
例 1	0.0	−1.732051	−1.366025	16.392303	16.390997	
	0.1	−1.733454	−1.367688	16.419455	16.420566	16.429848
	1.0	−1.832633	−1.498283	18.870741	18.831177	19.796152
	5.0	−1.995585	−1.916617	61.091961	61.381458	均方不稳定
	50.0	−2.000000	−1.999042	4186.4624	4177.7354	均方不稳定
	1000.0	−2.000000	−1.999998	1666686.5	1654221.9	均方不稳定
例 2	0.0	−1.732051	−1.366025	16.392303	16.390997	
	0.1	−1.732626	−1.371131	16.986681	16.986427	16.994328
	0.3	−1.735937	−1.408976	24.116306	24.139625	24.386800
	0.5	−1.737645	−1.470662	206.69780	202.38062	242.02172

在表 1 中，$\delta=0$ 即为不考虑乘性随机因素时名义系统的 LQ 最优控制问题. 表中最后一列是指反馈矩阵取为名义系统的 LQ 最优控制反馈矩阵时乘性随机系统的闭环控制的指标. 考虑到系统存在随机因素，在指标计算中，共仿真 30 000 次，并求取其指标值平均值.

从仿真结果知，若存在乘性随机扰动，名义系统的最优反馈轻则使控制指标下降，严重时闭环不能均方稳定. 而本文的乘性随机系统 LQ 方法则能很好地使系统闭环稳定，并得到优于名义系统最优控制在相同扰动下得到的控制指标，是一种有效的乘性随机系统控制方法.

上述理论与仿真表明本文提出的乘性随机离散系统 LQ 最优控制方法的有效性. 由于许多实际系统可用乘性随机系统建模，因此研究该类系统的分析与控制具有理论与应用意义. 对该类系统的系统辨识、稳定性及状态估计等问题都有待进一步深入研究.

References

1 Astrom K J. Introduction to Stochastic Control. London: Academic Press, 1970

2 Hang Chong-Zhao, Wang Yue-Jun, Wan Bei-Wu. Theory of Stochastic Systems. Xi′an: Xi′an Jiaotong University Press, 1987(in Chinese)

3 Zhao M W, Lu Y Z. Parameter identification and convergence analysis for a class of nonlinear systems with time-varying random parameters. *International Journal of System Science*, 1991, **22**(8): 1467～1476

4 Zhao Ming-Wang, Lu Yong-Zai. Parameter identification and convergence analysis based on stochastic approximation method for random parameters. *Control Theory and Application*, 1992, **9**(3): 256～261(in Chinese)

5 Liou L W, Ray A. A stochastic regulator for integrated communication and control systems—Part II: Numerical and simulation. *Journal of dynamic Systems Measurement and Control*, 1991, **113**: 612～617

6 Ray A, Shen J H. Control of output feedback systems under randomly varying distributed delays. In: Proceedings of the ACC, USA: San Francisco, 1993. 1731～1735

7 Nilsson J, Berhardsson B, Wittenmark B. Stochastic analysis and control of real-time systems with random time-delays. *Automatica*, 1998, **34**(1): 57～64

8 Yu Zhi-Xun, Chen Hui-Tang, Wang Yue-Jun. Control of network system with random communication delay and noise disturbance. *Control and Decision*, 2000, **15**(5): 518～522(in Chinese)

9 Yu Zhi-Xun, Chen Hui-tang, Wang Yue-Jun. Research on mean square exponential stability of time-delayed network control system. *Control and Decision*, 2000, **15**(3): 278～281(in Chinese)

10 Xie Xue-Shu. Optimal Control. Beijing: Tsinghua University Press, 1986(in Chinese)

赵明旺 1990 年在浙江大学获博士学位，现为武汉科技大学教授. 主要研究领域为系统辨识与自适应控制、随机控制、智能理论与智能控制.

(**ZHAO Ming-Wang** Received his Ph. D. degree from Zhejiang University in 1990, and now is a professor of Wuhan University of Science and Technology. His research interests include system identification, adaptive control, stochastic control, intelligent theory, and intelligent control.)