第 29 卷 第 5 期 自 动 化 学 报 Vol. 29, No. 5
2003 年 9 月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 2003

# 一类时滞系统的绝对稳定性问题研究[1)]

俞 立

(浙江工业大学信息工程学院 杭州 310032)

(E-mail: lyu@hzenc.com)

**摘 要** 基于线性矩阵不等式处理方法，研究了一类具有扇形非线性关联的时滞系统绝对稳定性问题. 导出了用一个线性矩阵不等式系统的可行性表示的绝对稳定性滞后依赖型条件，进而，通过求解一组线性矩阵不等式，给出使得闭环系统绝对稳定的无记忆状态反馈控制律设计方法，最后用例子验证了文中提出的结果.

**关键词** 时滞，绝对稳定性，线性矩阵不等式，状态反馈

**中图分类号** TP13

## On the Absolute Stability of a Class of Time-Delay Systems

YU Li

(*College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou* 310032)

(E-mail: lyu@hzenc.com)

**Abstract** The paper studies the absolute stability problem of a class of time-delay systems with nonlinearities satisfying a given sector condition. A delay-dependent sufficient condition for the absolute stability is derived and is expressed as the feasibility problem of a certain linear matrix inequality (LMI) system. Furthermore, a procedure to design state feedback absolutely stabilizing controllers is presented by solving a set of LMIs. Finally, examples are given to illustrate the proposed results.

**Key words** Delay, absolute stability, LMI, state feedback

## 1 引言

近年来，对时滞系统绝对稳定性问题的研究取得了不少的结果[1~4]，但多数结果[1~3]都是与时滞的大小无关，因此具有很大的保守性. 文献[4]应用 Razumikhin 方法，给出了时滞系统绝对稳定性的时滞依赖条件. 但是由于其在导出过程中，经过了多步的放大，使

1) 国家自然科学基金(60274034)、高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划基金资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China(60274034), the Teaching and Research Award Program for Outstanding Young Teachers in Higher Education Institutions of MOE, P. R. China
收稿日期 2001-05-14 收修改稿日期 2001-08-24
Received May 14, 2001; in revised form August 24, 2001

得结果仍具有相当的保守性. 另外，该文仅讨论了单变量的非线性关联，而且所得结果难以用来处理控制器的设计问题.

本文针对以上指出的问题，采用线性矩阵不等式处理方法，进一步研究具有一般关联结构的时滞系统绝对稳定性问题，导出了时滞依赖型的系统绝对稳定性条件. 基于这一条件，提出使得闭环系统绝对稳定的状态反馈控制律设计方法.

## 2 问题的描述和准备

考虑由状态空间模型描述的时滞系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}(t-h) + D\boldsymbol{w}(t) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{z}(t) = C\boldsymbol{x}(t) \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 是状态向量，$\boldsymbol{w}(t)\in R^m$ 是输入信号，$\boldsymbol{z}(t)\in R^m$ 是输出信号，$h>0$ 是系统的滞后时间. 系统的反馈关联具有形式

$$\boldsymbol{w}(t) = -\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z}(t)) \tag{3}$$

非线性函数 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z}):[0,\infty)\times R^m\to R^m$ 属于扇形区域$[V_1,V_2]$，即

$$[\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z}) - V_1\boldsymbol{z}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z}) - V_2\boldsymbol{z}] \leqslant 0, \quad \forall t\geqslant 0, \forall \boldsymbol{z}\in R^m \tag{4}$$

其中 $V_1$ 和 $V_2$ 是已知的实矩阵，且 $V=V_2-V_1$ 是一个对称正定矩阵.

**定义 1.** 如果对所有属于扇形区域$[V_1,V_2]$的非线性函数 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z})$，系统(1)是全局渐近稳定的，则系统(1)称为是在扇形区域$[V_1,V_2]$内绝对稳定的.

本文的主要目的是导出系统(1)绝对稳定的时滞依赖条件. 为此，首先给出一个引理.

**引理 1.** 对任意适当维数的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和矩阵 $N,X,Y,Z$，其中 $X$ 和 $Z$ 是对称的，若 $\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & Z\end{bmatrix}\geqslant 0$，则

$$-2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}N\boldsymbol{b} \leqslant \inf_{X,Y,Z}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} X & Y-N \\ Y^{\mathrm{T}}-N^{\mathrm{T}} & Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{bmatrix} \tag{5}$$

**证明.** 由定理条件和矩阵运算即可得到不等式(5). 证毕.

若在式(5)中取 $N=Y=I, Z=X^{-1}$，则可得 $-2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\leqslant \inf\limits_{X>0}\{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}X\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}X^{-1}\boldsymbol{b}\}$. 当取 $N=I$, $Y=I+XM, Z=(M^{\mathrm{T}}X+I)X^{-1}(XM+I)$时，由式(5)可得文献[5]中的主要不等式

$$-2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \leqslant \inf_{X>0,M}\{(\boldsymbol{a}+M\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}X(\boldsymbol{a}+M\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}X^{-1}\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}M\boldsymbol{b}\}.$$

因此和现有文献中采用的一些不等式相比，不等式(5)具有更小的保守性.

## 3 主要结论

首先考虑一类特殊情况：非线性函数 $\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z})$属于扇形区域$[0,V]$，即 $\varphi$ 满足

$$\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{z})[\boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{z}) - V\boldsymbol{z}] \leqslant 0 \tag{6}$$

对这样一类非线性关联，关于系统(1)的稳定性有以下结论.

**定理 1.** 对系统(1)，如果存在对称正定矩阵 $P$、对称矩阵 $Q,X,Z$ 和矩阵 $Y$，使得

$$\begin{bmatrix} M & PA_1-Y & PD-C^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}} & hA^{\mathrm{T}}Z \\ A_1^{\mathrm{T}}P-Y^{\mathrm{T}} & -Q & 0 & hA_1^{\mathrm{T}}Z \\ D^{\mathrm{T}}P-VC & 0 & -2I & hD^{\mathrm{T}}Z \\ hZA & hZA_1 & hZD & -hZ \end{bmatrix}<0 \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix}\geqslant 0 \tag{8}$$

其中 $M=PA+A^{\mathrm{T}}P+Y+Y^{\mathrm{T}}+hX+Q$，则系统(1)是在扇形区域$[0,V]$内绝对稳定的.

**证明**. 假定存在对称正定矩阵 $P$、对称矩阵 $Q,X,Z$ 和矩阵 $Y$，使得矩阵不等式(7)和(8)成立，由于 $\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t-h)=\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha$，则系统(1)可被重新写成

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(A+A_1)\boldsymbol{x}(t)-A_1\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha+D\boldsymbol{w}(t) \tag{9}$$

选取一个 Lyapunov 泛函 $V=V_1+V_2+V_3$，其中

$$V_1=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{x}(t),\quad V_2=\int_{-h}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\alpha)Z\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta,\quad V_3=\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\alpha)Q\boldsymbol{x}(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

则沿系统(1)的任意轨线，$V_1$关于时间的导数是

$$\dot{V}_1=2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P(A+A_1)\boldsymbol{x}(t)-\int_{t-h}^{t}2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PA_1\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PD\boldsymbol{w}(t) \tag{10}$$

取 $N=PA_1,\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{b}=\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)$，应用不等式(5)可得

$$-2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PA_1\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\leqslant\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} X & Y-PA_1 \\ Y^{\mathrm{T}}-(PA_1)^{\mathrm{T}} & Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\end{bmatrix}$$

将以上不等式代入到式(10)，经整理可得

$$\dot{V}_1\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(PA+A^{\mathrm{T}}P+hX+Y+Y^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}(t)+\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\alpha)Z\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha-$$
$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(Y-PA_1)\boldsymbol{x}(t-h)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PD\boldsymbol{w}(t)$$

$V_2$和$V_3$关于时间的导数分别是

$$\dot{V}_2=h\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)Z\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\alpha)Z\dot{\boldsymbol{x}}(\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

$$\dot{V}_3=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)Q\boldsymbol{x}(t-h)$$

因此，利用 $0\leqslant2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{w}-V\boldsymbol{z})$，得到

$$\dot{V}\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(PA+A^{\mathrm{T}}P+hX+Y+Y^{\mathrm{T}}+Q)\boldsymbol{x}(t)-2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(Y-PA_1)\boldsymbol{x}(t-h)+$$
$$h\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)Z\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)Q\boldsymbol{x}(t-h)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PD\boldsymbol{w}(t)-2\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{w}(t)+V\boldsymbol{z}(t)]$$

利用方程(1)，进一步可得

$$\dot{V}\leqslant\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t-h)\\ \boldsymbol{w}(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\left(\begin{bmatrix} M & PA_1-Y & PD-C^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}} \\ A_1^{\mathrm{T}}P-Y^{\mathrm{T}} & -Q & 0 \\ D^{\mathrm{T}}P-VC & 0 & -2I\end{bmatrix}+h\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}\\ A_1^{\mathrm{T}}\\ D^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}Z[A\ \ A_1\ \ D]\right)\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t-h)\\ \boldsymbol{w}(t)\end{bmatrix}$$

其中矩阵 $M$ 如定理中给出. 应用矩阵的 Schur 补性质，如果矩阵不等式(7)成立，则可得 $\dot{V}<0$. 因此，由 Lyapunov 稳定性定理可知，对所有扇形区域$[0,V]$中的非线性函数 $\boldsymbol{\varphi}$，系统(1)是全局渐近稳定的. 定理得证. 证毕.

对非线性函数在一般扇形区域$[V_1,V_2]$中的情形，通过应用环的变换[6]，可得系统(1)

在扇形区域$[V_1, V_2]$内的绝对稳定性等价于系统

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= (A - DV_1C)\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}(t-h) + D\boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{z}(t) &= C\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{w}(t) = -\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{z}(t)) \end{aligned} \tag{11}$$

在扇形区域$[0, V_2 - V_1]$内的绝对稳定性. 因此，根据定理 1，可得如下定理.

**定理 2.** 如果存在对称正定矩阵 $P$、对称矩阵 $Q, X, Z$ 和矩阵 $Y$，使得不等式(8)和

$$\begin{bmatrix} M_1 & PA_1 - Y & PD - C^{\mathrm{T}}(V_2 - V_1)^{\mathrm{T}} & h(A - DV_1C)^{\mathrm{T}}Z \\ A_1^{\mathrm{T}}P - Y^{\mathrm{T}} & -Q & 0 & hA_1^{\mathrm{T}}Z \\ D^{\mathrm{T}}P - (V_2 - V_1)C & 0 & -2I & hD^{\mathrm{T}}Z \\ hZ(A - DV_1C) & hZA_1 & hZD & -hZ \end{bmatrix} < 0 \tag{12}$$

成立，其中 $M_1 = P(A - DV_1C) + (A - DV_1C)^{\mathrm{T}}P + Y + Y^{\mathrm{T}} + hX + Q$，则系统(1)是在扇形区域$[V_1, V_2]$内绝对稳定的.

不等式(8)和(12)是关于矩阵变量 $P, Q, X, Y$ 和 $Z$ 的一个线性矩阵不等式系统. 因此，系统(1)的绝对稳定性问题转化成了一个线性矩阵不等式系统的可行性问题，而后者可以应用现有的求解 LMI 的方法和软件有效地求解.

应用定理 2 可以求出使得系统(1)保持绝对稳定的最大允许滞后时间 $\hat{h}$. $\hat{h}$ 可以通过求解以下的优化问题得到

$$\begin{gathered} \max_{P,Q,X,Y,Z,h} h \\ \text{s. t.} \quad P > 0, (8), (12) \end{gathered} \tag{13}$$

该问题具有广义特征值的形式，故可以应用相关的算法有效地求得该问题的全局最优解.

应用以上得到的绝对稳定性条件可以研究具有某些非线性关联的控制系统综合问题. 考虑由状态空间模型描述的时滞系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}(t-h) + D\boldsymbol{w}(t) + B\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{z}(t) = C\boldsymbol{x}(t) \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t) \in R^n$ 是状态向量，$\boldsymbol{u}(t) \in R^p$ 是控制输入，$\boldsymbol{w}(t) \in R^m$ 是输入信号，$\boldsymbol{z}(t) \in R^m$ 是输出信号，$h > 0$ 是系统的滞后时间，被控对象的反馈关联 $\boldsymbol{w}(t) = -\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{z}(t))$，其中 $\boldsymbol{\varphi}$ 是属于扇形区域$[V_1, V_2]$的非线性函数. 则以下的定理给出了使得闭环系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A + BK)\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}(t-h) + D\boldsymbol{w}(t) \tag{15}$$

绝对稳定的无记忆线性状态反馈控制律 $\boldsymbol{u}(t) = K\boldsymbol{x}(t)$ 的存在条件和设计方法.

**定理 3.** 对系统(14)和给定的扇形区域$[V_1, V_2]$，如果存在对称正定矩阵 $\widetilde{P}$、对称矩阵 $\widetilde{Q}, \widetilde{X}, \widetilde{Z}$ 和矩阵 $\widetilde{W}, \widetilde{Y}$，使得以下的矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \widetilde{M} & A_1\widetilde{P} - \widetilde{Y} & D - \widetilde{P}C^{\mathrm{T}}(V_2 - V_1) & h[\widetilde{P}(A - DV_1C)^{\mathrm{T}} + \widetilde{W}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}] \\ * & -\widetilde{Q} & 0 & h\widetilde{P}A_1^{\mathrm{T}} \\ * & * & -2I & hD^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & -h\widetilde{Z} \end{bmatrix} < 0 \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X} & \widetilde{Y} \\ \widetilde{Y}^{\mathrm{T}} & \widetilde{P}\widetilde{Z}^{-1}\widetilde{P} \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{17}$$

成立，其中 $\widetilde{M} = (A - DV_1C)\widetilde{P} + B\widetilde{W} + \widetilde{P}(A - DV_1C)^{\mathrm{T}} + \widetilde{W}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + \widetilde{Y} + \widetilde{Y}^{\mathrm{T}} + h\widetilde{X} + \widetilde{Q}$，$*$ 处是由矩阵的对称性得到的矩阵块，则 $\boldsymbol{u}(t) = \widetilde{W}\widetilde{P}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$ 是系统(14)的一个绝对稳定化控制律.

**证明.** 根据定理 2，并应用变量替换方法，即可得到本定理的结论.　　证毕.

容易看到矩阵不等式(17)不是一个线性矩阵不等式，但是如果令 $\tilde{P}=\tilde{Z}$，则可得如下推论.

**推论 1.** 对系统(14)和给定的扇形区域$[V_1,V_2]$，如果存在对称矩阵 $\tilde{P}$，$\tilde{Q},\tilde{X}$ 和矩阵 $\tilde{W},\tilde{Y}$，使得以下矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \tilde{M} & A_1\tilde{P}-\tilde{Y} & D-\tilde{P}C^{\mathrm{T}}(V_2-V_1) & h[\tilde{P}(A-DV_1C)^{\mathrm{T}}+\tilde{W}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}] \\ * & -\tilde{Q} & 0 & h\tilde{P}A_1^{\mathrm{T}} \\ * & * & -2I & hD^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & -h\tilde{P} \end{bmatrix} < 0 \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ \tilde{Y}^{\mathrm{T}} & \tilde{P} \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{19}$$

成立，其中 $\tilde{M}=(A-DV_1C)\tilde{P}+B\tilde{W}+\tilde{P}(A-DV_1C)^{\mathrm{T}}+\tilde{W}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+\tilde{Y}+\tilde{Y}^{\mathrm{T}}+h\tilde{X}+\tilde{Q}$，$*$ 处是由矩阵的对称性得到的矩阵块，则 $\boldsymbol{u}(t)=\tilde{W}\tilde{P}^{-1}\boldsymbol{x}(t)$是系统(14)的一个绝对稳定化控制律.

式(18)和(19)是一个关于矩阵变量 $\tilde{P},\tilde{Q},\tilde{X},\tilde{W},\tilde{Y}$ 的线性矩阵不等式系统，推论 1 是以结果的保守性换取求解计算的方便和有效性.

## 4 例子

考虑时滞系统(1)，其中

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ -0.5 & -0.4 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\quad C=[1 \quad -0.5]$$

非线性部分所在的扇形区域为[0.5,2]. 根据定理 2，通过应用 MATLAB 软件 LMI Toolbox 中的命令 gevp，可以得到相应的优化问题(13)有解，保持该系统绝对稳定的最大允许滞后时间是 $\hat{h}=2.3154$.


## References

1 Popov V M, Halanay A. About stability of nonlinear controlled systems with delay. *Automat & Remote Control*, 1962, **23**(7): 849～851

2 Somolines A. Stability of Lurie-type functional equations. *Journal of Differential Equations*, 1977, **26**(2): 191～199

3 Nian X H. Absolute stability for Lurie type robust control systems. *Journal of Northwest Normal University*, 1997, **33**(1): 9～14(in Chinese)

4 Nian X H. Delay dependent conditions for absolute stability of Lurie type control system. *Acta Automatica Sinica*, 1999, **25**(4): 564～566(in Chinese)

5 Park P G. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time invariant delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(4): 876～878

6 Khalil H K. Nonlinear Systems. 2nd Edition. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1996



**俞 立** 见本刊第 27 卷第 3 期.

(**Yu Li** He is now a professor and the head at the Institute of Information and Control in Zhejiang University of Technology. Received his bachelor degree from NanKai University, Tianjin, P. R. China in 1982, and his master degree and Ph. D. degree in automatic control both from Zhejiang University, Hangzhou, P. R. China. During the years 1993～1995 he was with the Institute of Automation at EPEL, Switzerland. His research interests include robust control, time-delay system, networked control systems, decentralized control.)